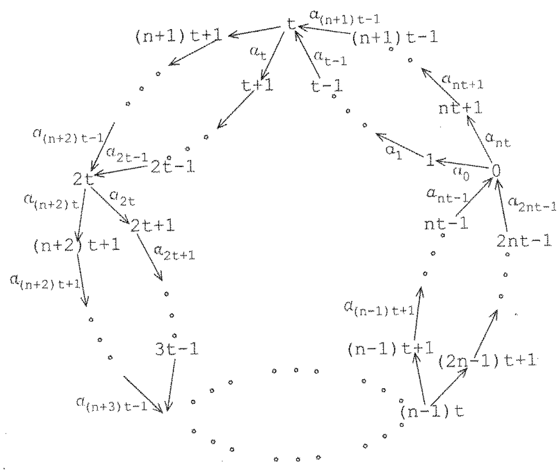
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

М. А. Качалова

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБРЫ МЁБИУСА

Введение

Пусть R – алгебра Мёбиуса, т.е. алгебра вида $R = k[\mathcal{Q}]/I$, где k – поле, а $\mathcal{Q}$ – следующий колчан:



.

где $n, t \in \mathbb{N}, t \geqslant 2$, а I – идеал в алгебре путей $k[\mathcal{Q}]$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый

а) всеми путями длины $t+1$;

б) путями вида

$$a_{rt}a_{(r+n)t-1} \quad \text{и} \quad a_{(r+n)t}a_{rt-1};$$

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00200.

в) выражениями вида

$$a_{(n+r)t-1}a_{(n+r)t-2}\dots a_{(n+r-1)t}+a_{rt-1}a_{rt-2}\dots a_{(r-1)t},\quad 1\le r\le n.$$

В этом случае используем также обозначение $R=R_{n,t}$. Алгебры Мёбиуса возникают при исследовании алгебр типа A_n (согласно классификации самоинъективных базисных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечный тип представления; см. [1]). Как доказано в [2], любая алгебра типа A_n стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо алгебре Мёбиуса.

В [4] вычислено подкольцо $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ кольца когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса, порождённое однородными элементами, степень которых делится на r, где $r=2t-1$. Используя бимодульную резольвенту для R, описанную в [3], в данной статье мы даем описание аддитивной структуры всего кольца когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$.

Основной результат статьи – следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $R=R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\mathrm{HH}^s(R)$ – s-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m+\ell t$ на n.*

(1) *Пусть $n>1$ и $\operatorname{char}k\neq 2$. Тогда $\dim_k\mathrm{HH}^s(R)=1$, если*

$\ell t\equiv 1 \pmod n$, $r=0$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$; *или*

$m+\ell t\equiv 1 \pmod n$, r *четно*, $\ell+p\not\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$; *или*

$m+\ell t\equiv 0 \pmod n$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$; *или*

$t-1+\ell t\equiv 0 \pmod n$, $r=2t-2$, $\ell\,\vdots\,2$; *или*

$m+\ell t\equiv 0 \pmod n$, r *нечётно*, $p\,\vdots\,2$.

В остальных случаях $\dim_k\mathrm{HH}^s(R)=0$.

(2) *Пусть $n>1$ и $\operatorname{char}k=2$. Тогда $\dim_k\mathrm{HH}^s(R)=1$, если*

$\ell t\equiv 1 \pmod n$, $r=0$, $\ell+p\,\vdots\,2$; *или*

$m+\ell t\equiv 1 \pmod n$, r *чётно*, $\ell+p\not\vdots\,2$; *или*

$m+\ell t\equiv 0 \pmod n$, $\ell+p\,\vdots\,2$; *или*
$t-1+\ell t\equiv 0 \pmod n$, $r=2t-2$; *или*
$m+\ell t\equiv 0 \pmod n$, r *нечётно*.

В остальных случаях $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

(3) *Пусть* $n = 1$.

(а) *Если выполнено одно их условий*

$r = 0,\ \ell = 0$; *или*

r *чётно*, $\ell + p \,\vdots\, 2,\ \operatorname{char} k = 2$; *или*

r *чётно*, $r < 2t - 2,\ \ell + p \,\vdots\, 2,\ \ell \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} k \neq 2$,

то $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 2$.

(б) *Если выполнено одно их условий*

$r = 0,\ \ell + p \not\vdots\, 2$; *или*

r *чётно*, $\ell + p \,\vdots\, 2,\ \ell \,\vdots\, 2,\ \operatorname{char} k \neq 2$; *или*

r *нечётно*, $p \,\vdots\, 2$; *или*

r *нечётно*, $\operatorname{char} k = 2$; *или*

$r = 2t - 2,\ \ell + p \,\vdots\, 2,\ \ell \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} k \neq 2$; *или*

$r = 2t - 2,\ \ell + p \not\vdots\, 2,\ \ell \,\vdots\, 2$; *или*

$r = 2t - 2,\ \ell + p \not\vdots\, 2,\ \operatorname{char} k = 2$,

то $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$.

(в) *В остальных случаях* $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

§1. Размерности групп гомоморфизмов

Пусть $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_k R^{\mathrm{op}}$ – ее обертывающая алгебра. Так как $\mathrm{HH}^s(R) = \mathrm{Ext}^s_\Lambda(R, R)$, то мы можем вычислить эти группы когомологий следующим образом: $\mathrm{HH}^s(R) = \mathrm{H}^s\big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)\big)$, где

$$0 \longleftarrow R \xleftarrow{\varepsilon} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} Q_3 \longleftarrow \dots \qquad (1)$$

– минимальная проективная резольвента Λ-модуля R, построенная в [3]. Напомним, что эта резольвента периодична (ср. [4]). В ее описании используется автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, определяемый следующим образом:

$$\sigma(e_j) = \begin{cases} e_{j+t^2}, & \text{если } j \text{ делится на } t, \\ e_{j+t(t+n)} & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\sigma(a_j) = \begin{cases} -a_{j+t(t+n)}, & \text{если } j = st - 1 \text{ или} \\ & j = st \quad \text{для} \quad s = 0, 1, \dots, n-1, \\ a_{j+t(t+n)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Периодичность резольвенты (1) вытекает из того, что σ имеет конечный порядок. Однако описание порядка автоморфизма σ, данное в [4], содержит неточность. В следующем предложении эта неточность исправляется.

Предложение 2. *Автоморфизм σ имеет конечный порядок, причем*

(1) если $\operatorname{char} k = 2$, то порядок σ равен $2\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$, если $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ нечетно, и $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ в противном случае;

(2) если $\operatorname{char} k \neq 2$, то порядок σ равен $4\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$, если $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ и $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ нечетны, и $2\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ в противном случае.

Доказательство. (1) Для случая, когда $\operatorname{char} k = 2$, можно использовать рассуждение из [4, предложение 4.5].

(2) Для $\operatorname{char} k \neq 2$ рассмотрим (как и в [4]) автоморфизм $\tilde{\sigma}$, действующий на вершинах ориентированного графа $\mathcal{Q}$. По лемме 2.5 из [4], порядок $\tilde{\sigma}$ равен $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$, если $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ четно, и $2\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$, если $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ нечетно.

Если $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ четно, то из рассуждений доказательства предложения 4.5 из [4], получаем, что порядок σ равен $2\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$.

Если $\frac{n+t}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ нечетно, то аналогично [4] получаем, что $\tilde{\sigma}^{\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}}$, меняет местами стрелки в каждой паре параллельных путей, следовательно, мы имеем $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ минусов для каждой стрелки. Значит, если $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ четно, то порядок σ равен $2\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$. А если $\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$ нечетно, то этот порядок равен $4\frac{n}{\mathrm{CMD}(n,t)}$.

В следующем предложении мы даем описание размерностей групп $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s, R)$.

Предложение 3. *Пусть $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2. Тогда:*

(1) *если r четно и $n > 1$, то*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R) =$$
$$\begin{cases} 2n(t-m-1)+n, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 0 \pmod{2n}; \\ 2n(t-1)+n, & \text{если } \ell(t+n) \equiv 1 \pmod{2n} \text{ и } m=0; \\ n, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 1 \pmod{2n} \text{ и } m>0; \\ 2nm+n, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv n+1 \pmod{2n}; \\ 2n(t-1)+n, & \text{если } t-1+\ell(t+n) \equiv n \pmod{2n} \text{ и } m=t-1; \\ n, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv n \pmod{2n} \text{ и } m<t-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2) *если r четно и $n = 1$, то*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R) =$$
$$\begin{cases} 2t, & \text{если } m+\ell(t+1) \equiv 0 \pmod{2}; \\ 2t, & \text{если } m+\ell(t+1) \equiv 1 \pmod{2} \text{ и } m \in \{0, t-1\}; \\ 2, & \text{если } m+\ell(t+1) \equiv 1 \pmod{2} \text{ и } 0<m<t-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3) *если r нечетно, то*

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R) = \begin{cases} 2n(t-m), & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 0 \pmod{2n}; \\ 2n(m+2), & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv n \pmod{2n}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что размерность $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R)$ равна количеству линейно независимых ненулевых путей, ведущих из j-ой вершины в i-ую. Рассмотрим два случая.

Случай I. r **четно, т.е.** $r = 2m$, **где** $0 \leqslant m \leqslant t-1$.

В этом случае модуль Q_s имеет вид:

$$Q_s = Q_{\ell(2t-1)+2m} = Q_s^{(1)} \oplus Q_s^{(2)} \oplus Q_s^{(3)}, \quad \text{где}$$

$$Q_s^{(1)} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1} P_{(i+m)t+\ell t^2, it}\right),$$
$$Q_s^{(2)} = \left(\bigoplus_{j=1}^{t-m-1} \bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+\ell(t+n))t+j+m, it+j}\right),$$
$$Q_s^{(3)} = \left(\bigoplus_{j=t-m}^{t-1} \bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m-1+n+\ell(t+n))t+j+m+1, it+j}\right).$$

Отсюда получаем, что $\dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s, R) = \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s^{(1)}, R) + \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s^{(2)}, R) + \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s^{(3)}, R)$. Вычислим значение каждого слагаемого отдельно.

(1) Найдем $d_{ev}^{(1)} = \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s^{(1)}, R)$. В случае $n = 1$ при любых m, ℓ и t модуль $Q_s^{(1)}$ равен P_{00}, а так как есть ровно два линейно независимых пути, ведущих из нулевой вершины в нулевую (длины 0 и t), то получаем $d_{ev}^{(1)} = 2$.

Теперь рассмотрим случай $n > 1$. Размерность $d_{ev}^{(1)}$ будет ненулевой, только если вершины $e_{(i+m)t+\ell t^2}$ и e_{it} совпадают, либо если первая является "следующей" узловой вершиной в колчане. В этих случаях все размерности $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{(i+m)t+\ell t^2, it}, R)$ равны единицам, т. е. $d_{ev}^{(1)} = n$. Итого, получаем для $n > 1$

$$d_{ev}^{(1)} = \begin{cases} n, & \text{если } m + \ell t \equiv 0 \pmod{n} \\ & \text{или } m + \ell t \equiv 1 \pmod{n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(2) Теперь найдем $d_{ev}^{(2)} = \dim_k \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s^{(2)}, R)$.

Здесь так же либо все размерности P_{ij} в прямой сумме одновременно равны единице, либо все нули. То есть $d_{ev}^{(2)}$ может принимать значения 0 или $2n(t - m - 1)$. Ненулевой путь из $(it + j)$-й вершины в $((i + m + \ell(t + n))t + j + m)$-ую существует, только если либо e_{it+j} и $e_{(i+m+\ell(t+n))t+j}$ – одна и та же вершина, либо $m = 0$ и e_{it+j+t} и $e_{(i+\ell(t+n))t+j}$ – одна и та же вершина. В первом случае имеем пути длины m, а во втором длины t. Таким образом, получаем:

$$d_{ev}^{(2)} = \begin{cases} 2n(t-m-1), & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 0 \pmod{2n} \\ & \text{или } m=0 \text{ и } m+\ell(t+n) \equiv 1 \pmod{2n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(3) Вычислим $d_{ev}^{(3)} = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(3)}, R)$.

Эта размерность может принимать значения 0 или $2nm$. Ненулевой путь из $(it+j)$-й вершины в $((i+m-1+n+\ell(t+n))t+j+m+1)$-ую существует, только если либо e_{it+j} и $e_{(i+m-1+n+\ell(t+n))t+j}$ – одна и та же вершина, либо $m=t-1$ и e_{it+j} и $e_{(i+m+n+\ell(t+n))t+j}$ – одна и та же вершина. В первом случае имеем пути длины $m+1$, а во втором длины 0. Таким образом, получаем:

$$d_{ev}^{(3)} = \begin{cases} 2nm, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv n+1 \pmod{2n} \\ & \text{или } m=t-1 \text{ и } m+\ell(t+n) \equiv n \pmod{2n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, случай четного r разобран – для нахождения искомой размерности надо сложить величины, полученные в пунктах (1)–(3).

Случай II. r нечетно, т.е. $r = 2m+1$, где $0 \leqslant m \leqslant t-2$.

Модуль Q_s имеет вид:

$$Q_s = Q_{\ell(2t-1)+2m+1} = Q_s^{(1)} \oplus Q_s^{(2)} \oplus Q_s^{(3)} \oplus Q_s^{(4)}, \quad \text{где}$$

$$Q_s^{(1)} = \left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+\ell(t+n))t+m+1,it} \right),$$

$$Q_s^{(2)} = \left(\bigoplus_{j=1}^{t-m-2} \bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+\ell(t+n))t+j+m+1,it+j} \right),$$

$$Q_s^{(3)} = \left(\bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+1+\ell t)t,it+t-m-1} \right),$$

$$Q_s^{(4)} = \left(\bigoplus_{j=t-m}^{t-1} \bigoplus_{i=0}^{2n-1} P_{(i+m+n+\ell(t+n))t+j+m+1,it+j} \right).$$

Значит,

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R) = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(1)}, R)$$
$$+ \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(2)}, R) + \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(3)}, R) + \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(4)}, R).$$

Вычислим значение каждого слагаемого отдельно.

(1) Вычислим $d_{od}^{(1)} = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(1)}, R)$.

Так как $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(1)}, R)$ – прямая сумма $2n$ слагаемых, размерность каждого из которых может быть 0 или 1, причем размерности всех слагаемых равны, то $d_{od}^{(1)}$ может принимать значения 0 или $2n$. Ненулевой путь из (it)-й вершины в $((i+m+\ell(t+n))t+m+1)$-ую существует, только если e_{it} и $e_{(i+m+\ell(t+n))t}$ – одна и та же вершина, и этот путь будет иметь длину $m+1$. Следовательно,

$$d_{od}^{(1)} = \begin{cases} 2n, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 0 \pmod{n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(2) Найдем $d_{od}^{(2)} = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(2)}, R)$.

Эта размерность может принимать значение 0 или $2n(t-m-2)$. Ненулевой путь из $(it+j)$-й вершины в $((i+m+\ell(t+n))t+j+m+1)$-ую существует, только в случае, когда e_{it+j} и $e_{(i+m+\ell(t+n))t+j}$ – одна и та же вершина, это будет путь длины $m+1$. Таким образом,

$$d_{od}^{(2)} = \begin{cases} 2n(t-m-2), & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv 0 \pmod{2n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(3) Далее, найдем $d_{od}^{(3)} = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(3)}, R)$.

Эта размерность равна 0 или $2n$. Ненулевой путь из $(it-t-m-1)$-й вершины в $((i+m+1+\ell t)t)$-ую существует только в случае, когда e_{it} и $e_{(i+m+\ell t)t}$ – одна и та же вершина. Длина такого пути будет $m+1$. Значит,

$$d_{od}^{(3)} = \begin{cases} 2n, & \text{если } m+\ell t \equiv 0 \pmod{n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(4) Наконец, вычислим $d_{od}^{(4)} = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s^{(4)}, R)$.

Размерность $d_{od}^{(4)}$ может быть равна либо 0, либо $2nm$. Опишем, когда она ненулевая. Из $(it+j)$-й вершины в $((i+m+n+\ell(t+n))t+$

$j+m+1$)-ую есть ненулевой путь, только если вершины e_{it+j} и $e_{(i+m+n+\ell(t+n))t+j}$ совпадают. Этот путь будет длиной $m+1$. Тогда

$$d_{od}^{(4)} = \begin{cases} 2nm, & \text{если } m+\ell(t+n) \equiv n \pmod{2n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, размерность $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R)$ есть сумма четырех значений, полученных в пунктах (1)–(4). Отсюда требуемое утверждение вытекает непосредственно.

§2. Размерности групп кограниц

Предложение 4. *Пусть $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, и пусть*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \xrightarrow{\delta^0} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \xrightarrow{\delta^1} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots \quad (2)$$

комплекс, полученный применением функтора $\operatorname{Hom}_\Lambda(-, R)$ к минимальной проективной бимодульной резольвенте (1) алгебры R.

Рассмотрим группы кограниц $\operatorname{Im}\delta^s$ комплекса (2). Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2. Тогда:

(1) *если $m+\ell t \not\equiv 0 \pmod{n}$, то $\dim_k \operatorname{Im}\delta^s = 0$;*

(2) *если $m+\ell t = np$, r четно и $r < 2t-2$, то*

$$\dim_k \operatorname{Im}\delta^s = \begin{cases} n, \text{ если } \ell+p \not\vdots\, 2; \\ 2n(t-m-1)+n-1, \quad \text{если } \ell+p \,\vdots\, 2 \text{ и } \ell \,\vdots\, 2; \\ 2n(t-m-1)+n-1, \text{ если } \ell+p \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k = 2; \\ 2n(t-m-1)+n, \text{ если } \ell+p \,\vdots\, 2,\ \ell \not\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \end{cases}$$

(3) *если $m+\ell t = np$, r нечетно, то*

$$\dim_k \operatorname{Im}\delta^s = \begin{cases} n, \quad \text{если } \ell+p \,\vdots\, 2; \\ 2n(m+1)+n-1, \quad \text{если } \ell+p \not\vdots\, 2 \text{ и } \ell \not\vdots\, 2; \\ 2n(m+1)+n-1, \quad \text{если } \ell+p \not\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k = 2; \\ 2n(m+1)+n, \quad \text{если } \ell+p \not\vdots\, 2,\ \ell \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \end{cases}$$

(4) *если* $m + \ell t = np$, $r = 2t - 2$, *то*

$$\dim_k \operatorname{Im} \delta^s = \begin{cases} n-1, & \text{если } \ell + p \,\vdots\, 2 \text{ и } \ell \,\vdots\, 2; \\ n-1, & \text{если } \ell + p \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k = 2; \\ n, & \text{если } \ell + p \,\vdots\, 2,\ \ell \not\,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \\ 2n(t-1) + n - 1, & \text{если } \ell + p \not\,\vdots\, 2 \text{ и } \ell \,\vdots\, 2; \\ 2n(t-1) + n - 1, & \text{если } \ell + p \not\,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k = 2; \\ 2n(t-1) + n, & \text{если } \ell + p \not\,\vdots\, 2,\ \ell \not\,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2. \end{cases}$$

Обозначение. Для $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ через $(a)_n$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю n (в частности, $0 \leqslant (a)_n \leqslant n-1$).

Лемма 5. *Пусть A – $(n \times n)$-матрица над полем k (здесь для единообразия нумерация строк и столбцов матрицы начинается с 0), в которой элементы A_{ij} имеют вид:*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = (j+1)_n; \\ \alpha_i & \text{если } i = j; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где α_i равно 1 или -1.

Пусть a – остаток от деления на 2 количества α_i, равных 1. Тогда ранг матрицы A равен $n-1$, если $\operatorname{char} k = 2$, или $n - 1 + a$, если $\operatorname{char} k \neq 2$.

Доказательство. Чтобы вычислить ранг матрицы A, приведем ее к верхнетреугольному виду. Сначала перенесем строчку с номером 0 на $(n-1)$-ое место. Получим, что ранг матрицы A равен рангу матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее прибавим к последней строчке нулевую, домноженную на $-\alpha_0$. Получим, что ранг матрицы A совпадает с рангом матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\alpha_0\alpha_1 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к последней строчке первую, домноженную на $\alpha_0\alpha_1$, потом вторую, домноженную на $-\alpha_0\alpha_1\alpha_2$ и т.д. После прибавления к последней строчке предпоследней, домноженной на $(-1)^{n+1}\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-2}$, получим, что ранг матрицы A равен n, если $(-1)^{n+1}\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1} \neq -1$, и $n-1$, если $(-1)^{n+1}\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1} = -1$. Заметим, что $(-1)^{n+1}\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}$ может быть равным либо 1, либо -1. А так как в поле характеристики 2 имеем $1=-1$, то при $\operatorname{char} k = 2$ ранг всегда равен $n-1$. В случае $\operatorname{char} k \neq 2$ получаем нужное непосредственно из рассмотрения $(-1)^{n+1}\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1} = -(-\alpha_0)(-\alpha_1)\dots(-\alpha_{n-1})$.

Доказательство предложения 4. Введем вспомогательное отображение κ, действующее из множества $\{ia | i \in k, a - \text{путь длины } 1\}$ в поле k следующим образом: $\kappa(ia) = i$. Рассмотрим три случая.

Случай I. r четно и $r < 2t-2$, т.е. $r = 2m$, где $0 \leqslant m \leqslant t-2$. Так как $\operatorname{Im}\delta^{\ell(2t-1)+2m} \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R)$, то в случае, когда $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R) = 0$, имеем $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{\ell(2t-1)+2m} = 0$. Если $m + \ell t \not\equiv 0 \pmod n$, то $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R) = 0$. Значит, размерность может быть ненулевой, только если $m+\ell t \equiv 0 \pmod n$. Теперь предположим, что $m + \ell t \equiv 0 \pmod n$. Тогда существует $p \in \mathbb{Z}$, такое, что $m + \ell t = np$. Если $\ell + p$ нечетно, то

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m}, R) = \begin{cases} n, & \text{если } n > 1 \\ 2t, & \text{если } n = 1 \text{ и } m = 0; \\ 2, & \text{если } n = 1 \text{ и } m > 0. \end{cases}$$

Если $\ell + p$ четно, то

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m}, R) = \begin{cases} 2n(t-m-1)+n, & \text{если } n > 1; \\ 2t, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим каждый случай отдельно.

(1) $\ell+p$ нечетно. В этом случае у матрицы дифференциала δ^s будут ненулевыми только первые n строк, причем эти n строк будут линейно независимы, поскольку у i-й строки среди первых n элементов имеется ровно один ненулевой с номером i.

Значит, в этом случае $\dim_k \operatorname{Im} \delta^s = n$.

(2) $\ell+p$ четно. Рассмотрим элементы $(\delta^{\ell(2t-1)+2m})_{ij}$, у которых $i \geqslant 2n(t-m-1)+n$. Они получаются из соответствующих элементов $(d_{\ell(2t-1)+2m})_{ij}$ домножением на путь из $(it+j)$-ой вершины в $((i+m-1+n+\ell(t+n))t+j+m+1)$-ую (см. описание $Q_s^{(3)}$ для четного r в доказательстве предложения 2). Для $n>1$ таких ненулевых путей нет, а для $n=1$ имеются пути длины $m+1$. Но у всех $(d_{\ell(2t-1)+2m})_{ij}$ при $i \geqslant 2n(t-m-1)+n$ сумма длин путей, стоящих в правой и левой компонентах тензоров, равна t. Значит, после домножения этого тензора на путь длины, большей 0, мы получим путь длины, большей t, т. е. ноль.

Далее рассмотрим $(d_{\ell(2t-1)+2m})_{ij}$ для $j \geqslant 2n(t-m)$. Распишем их подробнее (см. [3, с. 41]):

$$(d_s)_{ij} = \begin{cases} \varkappa_1 a_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_2+m} \cdots a_{(i_2+m+1+n+\ell(t+n))t} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \qquad \text{если } i=(i_2+1)_n; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_2+m} \cdots a_{(i_2+m-1+n+\ell(t+n))t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \qquad \text{если} \\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+i_2,\ j_2 \leqslant j_1 \leqslant t-1; \\ \varkappa_3 a_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_2+m} \cdots a_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \quad \text{если} \\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+(i_2+1)_{2n},\ t-m \leqslant j_1 \leqslant j_2; \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

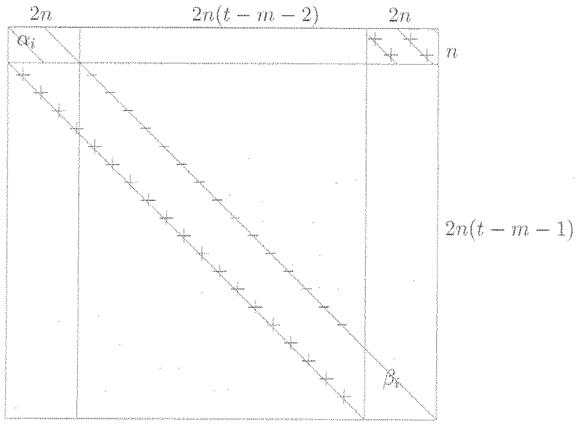
$$= \begin{cases} \varkappa_1 a_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_2+m} \cdots a_{(i_2+1+n+n\ell+np)t} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \qquad \text{если } i=(i_2+1)_n; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_2+m} \cdots a_{(i_2-1+n+n\ell+np)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{i_2t+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \qquad \text{если} \\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+i_2,\ j_2 \leqslant j_1 \leqslant t-1; \\ \varkappa_3 a_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_2+m} \cdots a_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_1+m+1} \otimes \\ \qquad \otimes a_{(i_2+1)t+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \quad \text{если} \\ \qquad i=n+2n(j_1-1)+(i_2+1)_{2n},\ t-m \leqslant j_1 \leqslant j_2; \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$
= \begin{cases}
\varkappa_1 a_{(i_2+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+1+n)t} \otimes \\
\qquad\qquad \otimes\, a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2 t + j_2}, \qquad \text{если } i = (i_2+1)_n; \\
\varkappa_2 a_{(i_2+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2-1+n)t+j_1+m+1} \otimes \\
\qquad\qquad \otimes\, a_{i_2 t + j_1 - 1} \dots a_{i_2 t + j_2}, \qquad \text{если} \\
\qquad\qquad i = n + 2n(j_1 - 1) + i_2,\ j_2 \leqslant j_1 \leqslant t-1; \\
\varkappa_3 a_{(i_2+n)t+j_2+m} \dots a_{(i_2+n)t+j_1+m+1} \otimes \\
\qquad\qquad \otimes\, a_{(i_2+1)t+j_1-1} \dots a_{i_2 t + j_2}, \quad \text{если} \\
\qquad\qquad i = n + 2n(j_1 - 1) + (i_2+1)_{2n},\ t-m \leqslant j_1 \leqslant j_2; \\
0 \quad \text{в противном случае}
\end{cases}
$$

(где i_2 – остаток, а j_2 – целая часть от деления j на $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ – некоторые ненулевые элементы поля k).

Отсюда получаем, что все $(d_{\ell(2t-1)+2m})_{ij}$ $(j \geqslant 2n(t-m))$ при переходе к $\delta^{\ell(2t-1)+2m}$ станут нулями.

Поэтому размерность образа $\operatorname{Im}\delta^s$ равна рангу следующей матрицы:



(3)

Здесь "плюсами" отмечены единицы, "минусами" – (-1), α_i – число, стоящее на $((i)_n, i)$-м месте,

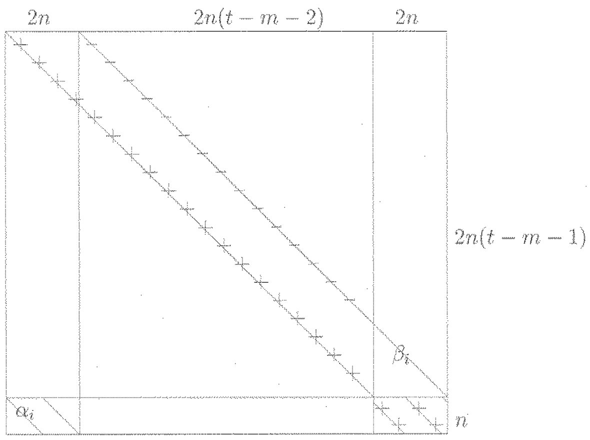
$$\beta_i = \kappa\big((\delta^{2m})_{(2n(t-m-1)+i)(n+2n(t-m-2)+i)}\big).$$

Из описания d_s получаем, что

$$\alpha_i = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+m)t})),\ \beta_i = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1})).$$

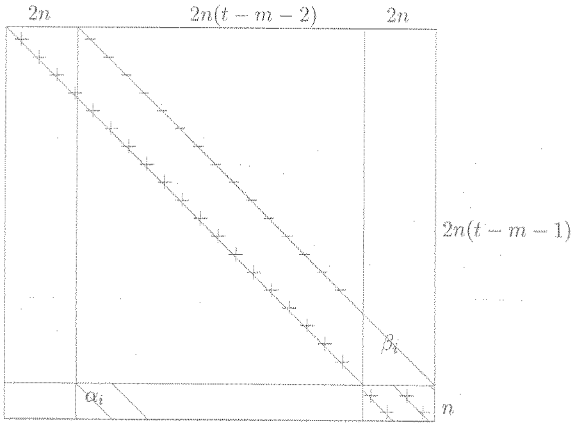
Замечание 1. Последняя матрица была получена следующим образом. В матрице дифференциала каждая строка соответствует некоторому слагаемому P_{ij} из Q_s. Тогда для каждой строки фиксируем образующую этого P_{ij}, т. е. путь из j-ой вершины в i-ую (если такого пути нет, то возьмем нулевой путь; если путей несколько – а их может быть два, – то возьмем любой из них). Далее в каждой строке будем заменять тензоры $a \otimes b$ на путь acb, где c – фиксированный для этой строки путь. Получится матрица, элементы которой – пути, домноженные на коэффициенты из поля k. Причем пути, лежащие в одном столбце, либо равны, либо отличаются на множитель -1. Ясно, что $\dim_k \operatorname{Im} \delta^s$ равна рангу матрицы, состоящей из соответствующих коэффициентов перед выбранными базисными путями. Для построения матрицы (3) остается подходящие столбцы умножить на -1.

Вычислим ранг матрицы (3). Для этого сначала перенесём первые n строчек "вниз". Получаем, что ранг матрицы (3) равен рангу следующей матрицы:

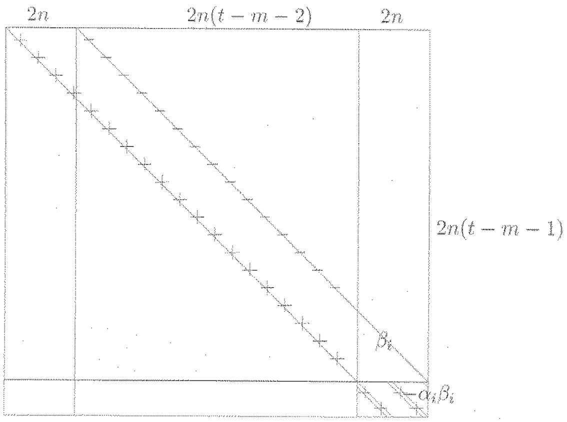


(4)

Далее прибавим к $(2n(t-m-1)+i)$-й строчке i-ую, умноженную на $-\alpha_i$, по всем i, таким, что $0 \leqslant i < 2n$. Получим, что ранг матрицы (4) равен рангу матрицы:



Проделаем подобную операцию еще $t-m-2$ раза. То есть сделаем $t-m-2$ шага, причем на k-ом шаге $(1 \leqslant k \leqslant t-m-2)$ прибавим к $(2n(t-m-1)+i)$-й строчке $(i+2nk)$-ую, умноженную на $-\alpha_i$ для всех i, таких, что $0 \leqslant i < 2n$.



Ранг последней матрицы равен $2n(t-m-1)+\operatorname{rk} M$, где

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_0\beta_0 & 0 & & \dots & 1 & -\alpha_n\beta_n & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -\alpha_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha\beta & & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & -\alpha\beta & 0 & 0 & & -\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Имеем: $-\alpha_i\beta_i = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(j+m)t})\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1}))$. Применяя лемму 5, получаем

$$\dim_k \operatorname{Im}\delta^s = \begin{cases} 2n(t-m-1)+n-1, & \text{если } \ell \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} k = 2; \\ 2n(t-m-1)+n, & \text{если } \ell \not\vdots 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2. \end{cases}$$

Случай II. r нечетно, т.е. $r = 2m+1$, где $0 \leqslant m \leqslant t-2$.

Так как $\delta^{\ell(2t-1)+2m+1}$ действует из $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R)$, то в случае, когда $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R) = 0$, имеем $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{\ell(2t-1)+2m+1} = 0$. Следовательно, если $m+\ell t \not\equiv 0 \pmod n$, то $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{\ell(2t-1)+2m+1} = 0$. Осталось рассмотреть случай, когда $m+\ell t \equiv 0 \pmod n$. Пусть $m+\ell t = np$, где $p \in \mathbb{Z}$. Для изучения размерности образа $\delta^{\ell(2t-1)+2m+1}$ заметим сначала, что $(\delta^{\ell(2t-1)+2m+1})_{ij} = 0$, если $n \leqslant j \leqslant 2n(t-m-2)+n-1$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим соответствующие элементы $(d_s)_{ij}$, у которых $n \leqslant j \leqslant 2n(t-m-2)+n-1$. Из описания d_s следует, что сумма длин путей, стоящих в левой и правой компонентах у тензоров d, равна t. А путь, представляющий $\operatorname{Hom}(Q_s, R)$, имеет длину $m+1$. Таком образом, после домножения соответствующих тензоров на путь, получаем путь длины $t+m+1$, который нулевой.

Если $\ell+p$ четно, то $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R) = 2n(t-m)$. Если $\ell+p$ нечетно, то $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{\ell(2t-1)+2m+1}, R) = 2n(m+2)$. Рассмотрим отдельно эти два случая.

(1) $\ell+p$ четно. В этом случае $(\delta^{\ell(2t-1)+2m+1})_{ij} = 0$ при $j \geqslant 2n(t-m-2)+n$, поскольку при таких j получаем (см [3, с. 43])

$$(d_{\ell(2t-1)+2m+1})_{ij} =$$
$$\begin{cases} \varkappa_1 e_{(i_2+m+1+n+\ell(t+n))t+m+1} \otimes a_{i_2t+t-1}, & \text{если} \\ \qquad i = (i_2+n+1)_{2n},\ j_2 = t-1; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+m+1+n+\ell(t+n))t} \otimes e_{i_2t+t-m-1}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(t-m-1)+i_2, j_2 = t-m-1; \\ \varkappa_3 a_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_2+m+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_2+i_2\ , j_2 > t-m-1; \\ \varkappa_4 e_{(i_2+m+n+\ell(t+n))t+j_2+m+2} \otimes a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(j_2+1)+i_2,\ j_2 < t-1; \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

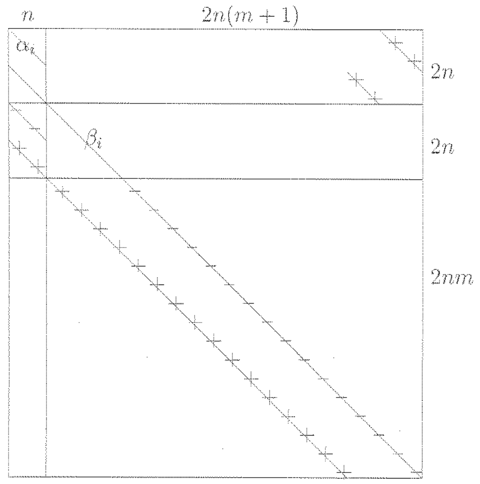
$$= \begin{cases} \varkappa_1 e_{(i_2+1+n+n\ell+np)t+m+1} \otimes a_{i_2t+t-1}, & \text{если} \\ \qquad i = (i_2+n+1)_{2n},\ j_2 = t-1; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+1+n+n\ell+np)t} \otimes e_{i_2t+t-m-1}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(t-m-1)+i_2, j_2 = t-m-1; \\ \varkappa_3 a_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_2+m+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_2+i_2\ , j_2 > t-m-1; \\ \varkappa_4 e_{(i_2+n+n\ell+np)t+j_2+m+2} \otimes a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(j_2+1)+i_2,\ j_2 < t-1; \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varkappa_1 e_{(i_2+1+n)t+m+1} \otimes a_{i_2t+t-1}, & \text{если} \\ \qquad i = (i_2+n+1)_{2n},\ j_2 = t-1; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+1+n)t} \otimes e_{i_2t+t-m-1}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(t-m-1)+i_2, j_2 = t-m-1; \\ \varkappa_3 a_{(i_2+n)t+j_2+m+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2nj_2+i_2\ , j_2 > t-m-1; \\ \varkappa_4 e_{(i_2+n)t+j_2+m+2} \otimes a_{i_2t+j_2}, & \text{если} \\ \qquad i = 2n(j_2+1)+i_2,\ j_2 < t-1; \\ 0 \quad \text{в противном случае} \end{cases}$$

(где i_2 – остаток, а j_2 – целая часть от деления $j+n$ на $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ – некоторые ненулевые элементы поля k), а такие элементы в $\delta^{\ell(2t-1)+2m+1}$ переходят в ноль. Таким образом, при четном $\ell+p$ имеем $(\delta^{\ell(2t-1)+2m+1})_{ij} = 0$ при $j \geqslant n$. Причем первые n столбцов линейно независимы, так как у j-ого столбца из первых n компонент ровно одна j-ая ненулевая. Следовательно, $\dim_k \operatorname{Im} \delta^s = n$.

(2) $\ell+p$ нечетно. В этом случае ранг матрицы дифференциала

δ^s равен рангу матрицы

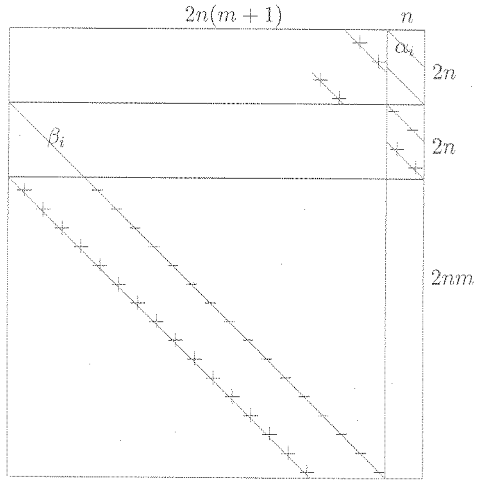


(5)

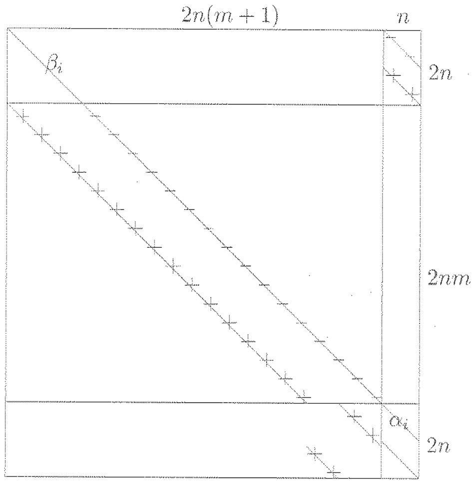
Здесь так же “плюсами” и “минусами” отмечены 1 и -1 соответственно,

$$\alpha_i = \begin{cases} \kappa(\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1})), & i < n; \\ \kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1})), & i \geqslant n, \end{cases}$$

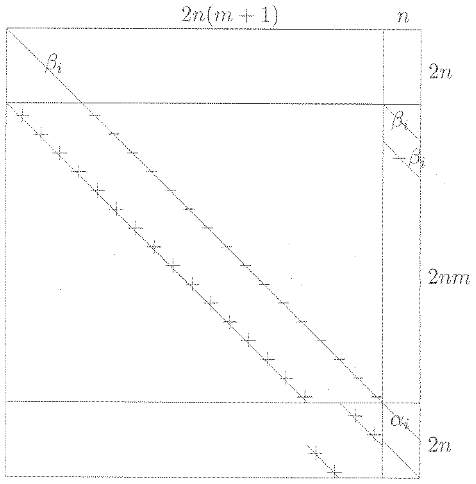
$\beta_i = \kappa(\sigma^\ell(a_{(i+m+1+n)t}))$. Для начала перенесем первые n столбцов матрицы (5) вправо:



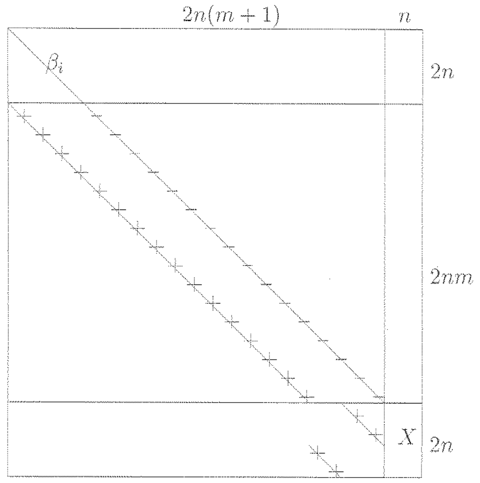
Далее перенесем первые $2n$ строчек вниз:



Прибавим к $(j+2n(m+1))$-ому столбцу $(0 \leqslant j < n)$ j-ый, домноженный на β_i; затем к $(j+2n(m+1))$-ому $(0 \leqslant j < n)$ $(j+n)$-ый, домноженный на $-\beta_i$. Получим матрицу



Проделав подобное еще m раз, получим



(6)

Здесь X – $(2n \times n)$-матрица, компоненты которой имеют вид:

$$X_{ij} = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } j = (i)_n; \\ \beta_j, & \text{если } i = (j+n+1)_{2n}; \\ -\beta_{j+n}, & \text{если } i = (j+1)_{2n}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ранг матрицы (6) равен $2n(m+1) + \operatorname{rk} X$. Осталось найти ранг X.

Домножим i-ую строчку матрицы X на $-\beta_{(i-n-1)_{2n}}$, если $1 \leqslant i \leqslant n$, и на $\beta_{(i-n-1)_{2n}}$, если $i = 0$ или $i > n$. Получим матрицу Y, где

$$Y_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i \beta_{(i-n-1)_{2n}}, & \text{если } j = (i)_n, 1 \leqslant i \leqslant n; \\ \alpha_i \beta_{(i-n-1)_{2n}}, & \text{если } j = (i)_n, i = 0 \text{ или } i > n; \\ 1, & \text{если } j = (i-1)_n; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подставим значения α_i и β_i. Получим

$$Y_{ij}=\begin{cases}\kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1})\sigma^\ell(a_{(i+m)t})), \text{если } j=(i)_n,\, i\not\equiv 0 \pmod n;\\ \kappa(\sigma^\ell(a_{(i+m+1)t-1})\sigma^\ell(a_{(i+m)t})), \text{если } j=(i)_n,\, i\equiv 0 \pmod n;\\ 1, \quad \text{если } j=(i-1)_n;\\ 0, \quad \text{в противном случае.}\end{cases}$$

К матрице Y можно применить лемму 5: ее ранг равен n, если $\operatorname{char} k\neq 2$ и ℓ четно, и равен $n-1$ в остальных случаях.

Таким образом,

$$\dim_k \operatorname{Im}\delta^s=\begin{cases}2n(m+1)+n-1, & \text{если } \ell \not\vdots\, 2 \text{ или } \operatorname{char} k=2;\\ 2n(m+1)+n, & \text{если } \ell \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k\neq 2.\end{cases}$$

Случай III. $r=2t-2$.

Так как δ^s действует из $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)},R)$, то из того, что $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)},R)=0$, следует, что $\dim_k \operatorname{Im}\delta^s=0$. Так как $\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)},R)=0$, если $t-1+\ell t\not\equiv 0,1 \pmod n$, а при $t-1+\ell t\equiv 1 \pmod n$ группа $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)},R)$ содержит только пути длины, большей нуля, то $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{2t-2+\ell(2t-1)}=0$, если $t-1+\ell t\not\equiv 0 \pmod n$. Остался случай $t-1+\ell t\equiv 0 \pmod n$, т. е. когда существует $p\in\mathbb{Z}$, такое, что $t-1+\ell t=np$. Рассмотрим два случая.

(1) $\ell+p$ четно. Тогда

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)},R)=\begin{cases}n, & \text{если } n>1;\\ 2t, & \text{если } n=1.\end{cases}$$

Убедимся в том, что у матрицы дифференциала δ^s элементы $(\delta^s)_{ij}$ равны нулю, если $i\leqslant n$. Действительно, если $n>1$, то элементы $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s,R)$, представляющие эти строки, нулевые. Если $n=1$, то пути, представляющие $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s,R)$, имеют длину t, поэтому после домножения на тензоры из d_s, они тоже перейдут в ноль. Таким образом, нас интересуют только первые n строк в матрице образа. Тогда ранг этой матрицы равен рангу матрицы X размера n, компоненты которой равны:

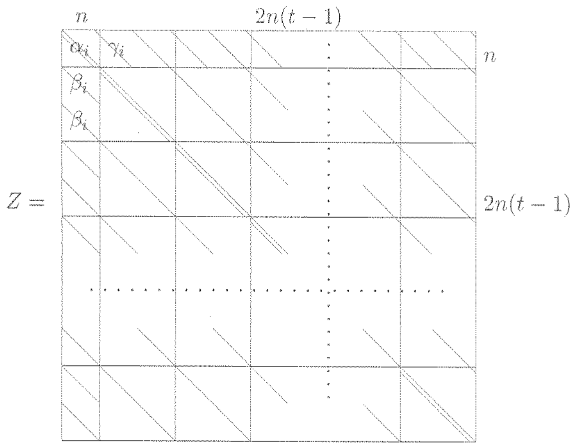
$$X_{ij}=\begin{cases}\alpha_i, & \text{если } i=j;\\ 1, & \text{если } i=(j+1)_n;\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\alpha_i = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(j+t)t-1})\sigma^\ell(a_{(j+t-1)t}))$. По лемме 5 ранг X равен n, если ℓ нечетно и $\operatorname{char} k \neq 2$, и равен $n-1$ в остальных случаях.

(2) $\ell + p$ нечетно. В этом случае

$$\dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2t-2+\ell(2t-1)}, R) = \begin{cases} n + 2n(t-1), & \text{если } n > 1; \\ 2t, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Размерность образа $\operatorname{Im}\delta^s$ совпадает с рангом матрицы:



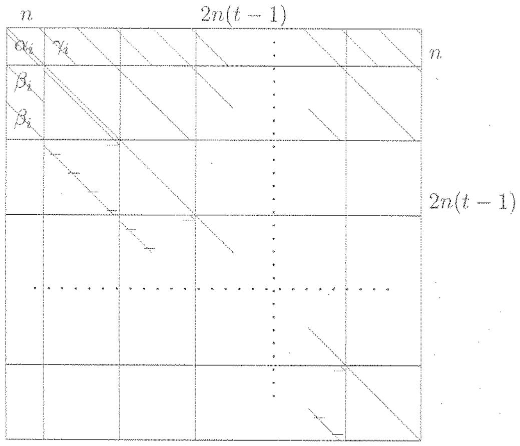
(7)

Здесь $\alpha_i = Z_{ii} = \kappa(\sigma^\ell(a_{(i+t)t-1})\sigma^\ell(a_{(i+t-1)t}))$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\beta_i = Z_{(i+n)(i)_n} = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+n+t)t-1}))$, $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$, $\gamma_i = Z_{(i+1)_n(i+n)} = \kappa(-\sigma^\ell(a_{(i+t+n)t}))$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n-1)$. Причем $Z_{(i+n+2ns)(i)_n} = Z_{(i+n)(i)_n}$ и $Z_{((i+1)_n+2ns)(i+n)} = Z_{(i+1)_n(i+n)}$ для любого $1 \leqslant s \leqslant t-2$, а остальные Z_{ij} – либо 1, либо 0.

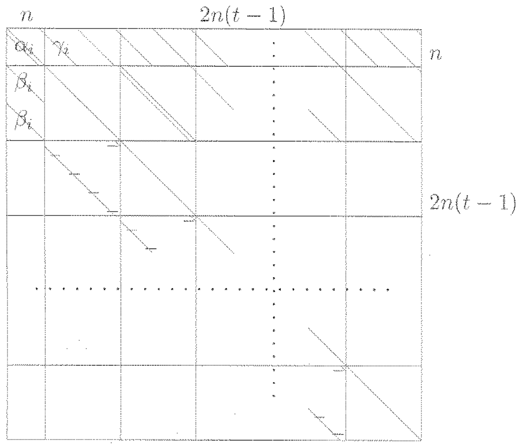
Замечание 2. В случае $n = 1$ у матрицы (7) левый верхний квадрат состоит из одного элемента, равного $\alpha_0 + 1$. Однако эта особенность не влияет на дальнейшую логику рассуждений.

Вычтем из $(i + 2n)$-ой строки i-ую для всех i таких, что $3n \leqslant$

$i < n + 2n(t-1)$. Получим матрицу



Далее прибавим к i-й строчке $(i+2n)$-ую для i таких, что $n \leqslant i < 3n$. Получим матрицу



(8)

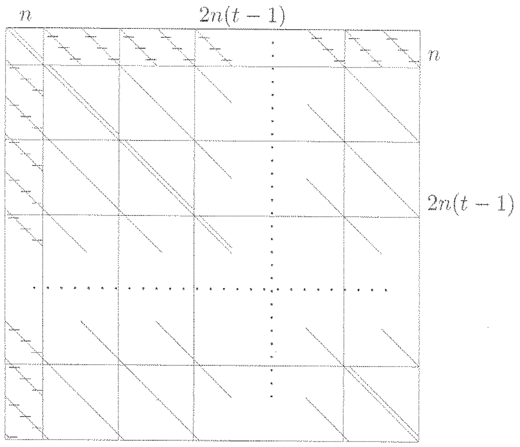
Обозначим через $Z(i,j)$ подматрицу матрицы (8), стоящую на пересечении s-ых строк с u-ыми столбцами для всех s и u таких, что $i \leqslant s \leqslant j$, $i \leqslant u \leqslant j$. Тогда ранг матрицы (8) не меньше суммы рангов подматриц $Z(0, n-1)$, $Z(n, 3n-1)$, $Z(3n, n+2n(t-1)-1)$. По лемме 5 имеем: $\operatorname{rk} Z(0, n-1)$ равен n, если ℓ нечетно и $\operatorname{char} k \neq 2$, и равен $n-1$ в остальных случаях. Ясно, что $\operatorname{rk} Z(n, 3n-1) = 2n$ и $\operatorname{rk} Z(3n, n+2n(t-1)-1) = 2n(t-2)$. Получаем, что

$$\dim_k \operatorname{Im} \delta^s \geqslant \begin{cases} n + 2n(t-1), & \text{если } \ell \not\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \\ n - 1 + 2n(t-1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждаем, что в последнем соотношении на самом деле имеет место равенство. Для доказательства этого нам достаточно показать, что, если $\operatorname{char} k = 2$ или ℓ четно, то ядро матрицы, транспонированной к (7), имеет размерность 1. Отметим, что тогда p нечетно.

Замечание 3. С помощью элементов ядра матрицы, транспонированной к (7), можно описать элементы $\operatorname{Ker} \delta^s$. В этой статье мы этого делать не будем, так как эти элементы нам не понадобятся.

Домножим i-ый столбец матрицы, транспонированной к (7), на $\kappa(\sigma^\ell(a_{(i+t-1)t}))$ для всех i, таких, что $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Также домножим i-ую строчку на $\kappa(\sigma^\ell(a_{(i+t)t-1}))$. Так как $\beta_i = \beta_{i+n}$ и $\gamma_i = \gamma_{i+n}$, получаем матрицу:



Рассмотрим два случая.

(a) n нечетно. Так как $(\ell+1)t = np+1$, то из того, что n нечетно, p нечетно и ℓ четно, следует, что t четно. В этом случае ядро матрицы (9) имеет базисный элемент $V = (v_i)$ (нумерация элементов вектора V начинается с нуля), где

$$v_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i < n; \\ (-1)^{i\lfloor\frac{i-n}{2n}\rfloor}, & \text{если } i \geqslant n. \end{cases}$$

(б) n четно. Так как $(\ell+1)t = np+1$, то из того, что n четно, p нечетно и ℓ четно, следует, что t нечетно. Тогда ядро матрицы (9) имеет базисный элемент $U = (u_i)$, где

$$u_i = \begin{cases} (-1)^i, & \text{если } i < n; \\ (-1)^{i\lfloor\frac{i-n}{2n}\rfloor}, & \text{если } i \geqslant n. \end{cases}$$

Итак,

$$\dim_k \operatorname{Im}\delta^s = \begin{cases} n + 2n(t-1), & \text{если } \ell \not\,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \\ n - 1 + 2n(t-1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, мы рассмотрели все случаи, и предложение 4 доказано.

§3. Размерности групп когомологий. Случай $n > 1$

В этом параграфе мы докажем пункты (1) и (2) теоремы 1.

Так как $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = \dim_k \operatorname{Ker}\delta^s - \dim_k \operatorname{Im}\delta^{s-1}$, то из $\dim_k \operatorname{Ker}\delta^s = 0$ следует $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 0$. Представим s в виде

$$s = \ell(2t-1) + r, \quad \text{где } 0 \leqslant r \leqslant 2t-2.$$

Если $m + \ell t \not\equiv 0, 1 \pmod n$, то $\dim_k \operatorname{Ker}\delta^s = 0$. Осталось рассмотреть случаи $m + \ell t \equiv 0 \pmod n$ и $m + \ell t \equiv 1 \pmod n$.

Случай I. $m + \ell t \equiv 1 \pmod n$.

Пусть $p \in \mathbb{Z}$ таково, что $m + \ell t = np + 1$. Если $r = 2m+1$, то $\dim_k \operatorname{Ker}\delta^s = 0$, значит, $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 0$.

(1) Пусть $r = 0$. Если $\ell + p$ четно, то

$$\dim_k \operatorname{Ker}\delta^s = \dim_k \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_s, R) - \dim_k \operatorname{Im}\delta^s = 2n(t-1) + n.$$

При этом $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{s-1} = 2n(t-1) + n - w$ (где $w = 1$, если ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$, и $w = 0$ в остальных случаях). Получаем $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$, и ноль в остальных случаях.

Если $\ell + p$ нечетно, то $\dim_k \operatorname{Ker}\delta^s = n$, а $\dim_k \operatorname{Im}\delta^{s-1} = n - w$, где $w = 1$, если $\ell \not\,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$, и $w = 0$ в остальных случаях.

Таким образом, $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$, и ноль в остальных случаях.

(2) Пусть $r = 2m$ $(0 < m \leqslant t-1)$. Если $\ell + p$ четно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = n$ и $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = n$, то есть в этом случае размерности групп когомологий нулевые.

Если $\ell + p$ нечетно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = n + 2nm$, а $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 2nm + n - w$ (где $w = 1$, если ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$, и $w = 0$ в остальных случаях). Значит, $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$.

Случай II. $m + \ell t \equiv 0 \pmod n$.

В этом случае существует $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $m + \ell t = np$.

(1) Пусть $r = 2m$ $(0 \leqslant m < t-1)$. Если $\ell + p$ нечетно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = n - n = 0$, и группы когомологий тривиальны.

Если $\ell + p$ четно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, а $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 0$. Получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$.

(2) Пусть $r = 2t - 2$. Если $\ell + p$ нечетно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, а $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 0$. Получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$.

Если $\ell + p$ четно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, а $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 0$. Получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$.

(3) Пусть $r = 2m + 1$. Если $\ell + p$ нечетно, то

$$\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = \begin{cases} n + 1, & \text{если } \ell \not\vdots\, 2 \text{ или } \operatorname{char} k = 2; \\ n & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, размерность образа $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = n$. Получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$.

Если $\ell + p$ четно, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2n(t - m) - n$, а

$$\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = \begin{cases} 2n(t - m - 1) + n - 1, & \text{если } \ell \,\vdots\, 2 \text{ или } \operatorname{char} k = 2; \\ 2n(t - m - 1) + n & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$.

§4. Размерности групп когомологий. Случай $n = 1$

В этом параграфе мы докажем оставшийся пункт (3) теоремы 1.

Как и выше, представим s в виде

$$s = \ell(2t-1) + r, \quad \text{где } 0 \leqslant r \leqslant 2t-2.$$

Пусть ℓ_0 и p_0 – значения параметров ℓ и p для $s-1$. Рассмотрим четыре случая.

Случай I. $r = 0$**.**

Получаем $\ell_0 = \ell - 1$, $p_0 = \ell t - 1 = p - 1$.

(1) Пусть $\ell + p$ нечетно. В этом случае $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2t - 1$. Имеем ℓ_0 четно, p_0 нечетно. Тогда $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 2(t-1)$, следовательно, $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 1$.

(2) Пусть $\ell + p$ четно. Если $\ell = 0$, то $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 2$.

Для $\ell > 0$ имеем $\ell_0 + p_0 \equiv \ell + p \equiv 0 \pmod 2$. Если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2$. Тогда

$$\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \\ 2, & \text{если} \operatorname{char} k = 2. \end{cases}$$

Если ℓ нечетно и $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 1$, таким образом, $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 2$.

Случай II. $r = 2m$ $(0 < m < t-1)$**.**

Получаем $\ell_0 = \ell$, $p_0 = m - 1 + \ell t = p - 1$.

(1) Пусть $\ell + p$ нечетно. В этом случае $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 1$. Имеем $\ell_0 + p_0$ четно. Следовательно, $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 1$ и $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 0$.

(2) Пусть $\ell + p$ четно. Получаем $\ell_0 + p_0 \equiv \ell + p - 1 \equiv 1(2)$.

Если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2(m+1)$. Тогда

$$\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell \,\vdots\, 2 \text{ и } \operatorname{char} k \neq 2; \\ 2, & \text{если } \operatorname{char} k = 2. \end{cases}$$

Если ℓ нечетно и $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2(m+1) - 1$, и $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 2$.

Случай III. $r = 2m + 1$ $(0 \leqslant m < t-1)$**.**

Получаем $\ell_0 = \ell$, $p_0 = p$.

(1) Пусть $\ell + p$ четно. Если ℓ четно или $\operatorname{char} k = 2$, то $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 1$. В остальных случаях группа когомологий тривиальна.

(2) Пусть $\ell + p$ нечетно. При условии, что ℓ нечетно или $\operatorname{char} k = 2$, получаем $\dim_k \operatorname{HH}^s(R) = 1$. В остальных случаях эта размерность нулевая.

Случай IV. $r = 2t - 2$.

Для $(s-1)$-го дифференциала имеем $\ell_0 = \ell$, $p_0 = p - 1$.

(1) Пусть $\ell + p$ четно. Если ℓ четно и $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2t$, $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 2t - 1$, следовательно, $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$.

Если $\operatorname{char} k = 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2t$, $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 2t - 2$, то есть $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 2$.

Если ℓ нечетно и $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\dim_k \operatorname{Ker} \delta^s = 2t-1$, $\dim_k \operatorname{Im} \delta^{s-1} = 2t - 2$, а тогда $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$.

Результаты этого пункта можно сформулировать более кратко:

$$\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{char} k \neq 2; \\ 2, & \text{если } \operatorname{char} k = 2. \end{cases}$$

(2) Пусть $\ell + p$ нечетно. При четном ℓ или $\operatorname{char} k = 2$, имеем $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$. В остальных случаях эта размерность нулевая.

Литература

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math. **832**, Berlin et. al. (1980), 449–520.
3. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
4. K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.

Kachalova M. A. Hochschild cohomology for Möbius algebra.

Additive structure of the Hochschild cohomology ring for Möbius algebra is described in this paper. We use a structure of the bimodule minimal projective resolution of the algebra. This resolution was constructed in the previous publication.

ООО “Энвион Софтвеар”

Поступило 11 января 2006 г.