Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

К. В. Зайнуллин, Н. С. Семенов

О КЛАССИФИКАЦИИ ПРОЕКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ТОЧНОСТЬЮ ДО МОТИВНОГО ИЗОМОРФИЗМА

1. Введение

Настоящая работа может рассматриваться как приложение методов и результатов, полученных авторами в [5].

Пусть k обозначает поле характеристики, отличной от 2-х, а k_s обозначает его сепарабельное замыкание. Для многообразия X над k обозначим через X_s замену базы $X \times_k k_s$. Через $\mathcal{M}(X)$ обозначим мотив Чжоу X. Напомним (см. [15, §1]), что X является скрученным флаговым многообразием внутреннего типа над k, если $X = {}_\xi(G/P)$ – скрученная форма проективного однородного многообразия G/P, где G – присоединенная простая расщепимая алгебраическая группа над k, P – ее параболическая подгруппа, а скручивание задано 1-коциклом $\xi \in Z^1(k, G(k_s))$.

Настоящая работа посвящена следующему вопросу.

1.1. Вопрос. *Описать все пары (X, Y) неизоморфных флаговых многообразий X и Y над k внутреннего типа, мотивы Чжоу которых изоморфны.*

Этот вопрос может быть разделен на две части:

(i) Описать все такие пары (X, Y) с условием $X_s \simeq Y_s$;
(ii) Описать все такие пары (X, Y) с условием $X_s \not\simeq Y_s$.

Напомним вкратце, что известно на данный момент. Полный ответ на вопрос (i) известен для квадрик и многообразий Севери–Брауера благодаря работам Вишика, Ижболдина, Карпенко, Меркурьева, Роста (см. [8, 10, 11, 18, 22]). Что касается вопроса (ii), пример (в размерности 5) был построен Боннэ в [2]. В нем рассматриваются скрученные флаговые многообразия ти-

Partially supported by DAAD Jahresstipendium program, Universität Bielefeld, INTAS project 00-566, RTN Network HPRN-CT-2002-00287 and AvH Foundation.

па G_2. Для исключительных многообразий типа F_4 аналогичный пример был построен в [16].

В настоящей работе мы даем полное решение приведенного выше вопроса для однородных проективных многообразий размерности меньшей 6-ти. А именно, мы доказываем следующую теорему (обозначения см. в 2.1).

1.2. Теорема. *Пусть X и Y обозначают неизоморфные скученные флаговые многообразия над k размерности $\leqslant 5$ внутреннего типа, мотивы Чжоу которых изоморфны.*

1. *Если $X_s \simeq Y_s$, то либо*
   (a) *$X = \mathrm{SB}(A)$ и $Y = \mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}})$ – многообразия Севери-Брауера, соответствующие центральной простой алгебре A и ей противоположной A^{op}, где $\deg(A) = 3, 4, 5, 6$ и $\exp(A) > 2$, либо*
   (b) *$X = \mathrm{SB}_{1,2}(A)$ и $Y = \mathrm{SB}_{1,2}(A^{\mathrm{op}})$ скученные формы флаговых многообразий, соответствующих центральной простой алгебре A такой, что $\deg(A) = \exp(A) = 4$.*
2. *Если $X_s \not\simeq Y_s$, то либо*
   (a) *$X = \mathrm{SB}_{1,3}(A)$ и $Y = \mathrm{SB}_{1,2}(A')$ – скученные формы флаговых многообразий, соответствующих центральным простым алгебрам A и A' таким, что $\deg(A) = \deg(A') = 4$ и $A \simeq A'$ или ${A'}^{\mathrm{op}}$, либо*
   (b) *$X = {}_\xi(\mathrm{G}_2/P_1)$ и $Y = {}_\xi(\mathrm{G}_2/P_2)$ – скученные формы многообразия G/P_i, $i = 1, 2$, где G – расщепимая исключительная группа типа G_2 и P_i – одна из ее максимальных параболических подгрупп, либо*
   (c) *$X = \mathbb{P}^n$ и $Y = Q^n$ – проективное пространство и расщепимая квадрика соответственно, где $n = 3, 5$, либо*
   (d) *$X = \mathbb{P}^5$ и $Y = \mathrm{G}_2/P_2$ – проективное пространство и расщепимое многообразие Фано типа G_2 соответственно.*

1.3. Замечание. Случай $X = {}_\xi(\mathrm{G}_2/P_1)$ и $Y = {}_\xi(\mathrm{G}_2/P_2)$ в теореме – это пример Боннэ, упомянутый выше. Как легко видеть, этот пример минимален в смысле размерности среди всех нетривиальных случаев.

1.4. Замечание. Случай $X = \mathrm{SB}_{1,3}(A)$ и $Y = \mathrm{SB}_{2,3}(A')$ с условием $A \simeq A', {A'}^{\mathrm{op}}$ дает другой нетривиальный минимальный пример двух неизоморфных многообразий, мотивы Чжоу которых изоморфны.

Кроме теоремы 1.2, мы доказываем следующую теорему.

1.5. Теорема. *Пусть*

$$X = \mathrm{SB}_{n_1,\dots,n_r}(A) \quad \textit{и} \quad Y = \mathrm{SB}_{m_1,\dots,m_r}(A')$$

– скрученные флаговые многообразия типа A_n, $n \geqslant 2$, *над* k, *где центральные простые алгебры* A *и* A' *имеют экспоненты* 1, 2, 3, 4 *или* 6. *Предположим, что*

1. $\mathcal{M}(X_s) \simeq \mathcal{M}(Y_s)$;
2. $n_1 = 1$ *или* $n_r = n$;
3. $m_1 = 1$ *или* $m_r = n$.

Тогда $\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow A \simeq A'$ *или* $A'^{\,\mathrm{op}}$.

Немедленно мы получаем следующее

1.6. Следствие. *Пусть* $X = \mathrm{SB}_{1,n}(A)$ *и* $Y = \mathrm{SB}_{n-1,n}(A')$, *где* A *и* A' *– центральные простые алгебры степени* $n+1$, $n \geqslant 3$, *экспонент* 1, 2, 3, 4 *или* 6. *Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow A \simeq A' \ \textit{или} \ A'^{\,\mathrm{op}}.$$

1.7. Замечание. Многообразия X и Y следствия 1.6 дают пример скрученных флаговых многообразий, дающих ответ на 1.1(ii). Действительно, $X_s \not\simeq Y_s$, так как их группы автоморфизмов неизоморфны по [6].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы рассматриваем случай расщепимой группы и формулируем несколько фактов, которые мы используем далее в доказательствах. Раздел 3 посвящен case by case доказательству теоремы 1.2. В разделе 4 мы доказываем теорему 1.5 и приводим несколько результатов, необходимых для доказательства 1.2.

2. Предварительные сведения

В работе мы используем следующие обозначения.

2.1. Пусть G обозначает расщепимую простую алгебраическую группу, определенную над полем k. Зафиксируем максимальный расщепимый тор T группы G и борелевскую подгруппу B в G, содержащую T и определенную над k. Обозначим через Φ систему корней G, через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\mathrm{rk}\, G}\}$ множество простых корней Φ, соответствующих B, через W группу Вейля и через $S = \{s_1, \ldots, s_{\mathrm{rk}\, G}\}$ соответствующее множество фундаментальных отражений. Пусть P_Θ обозначает стандартную параболическую подгруппу, соответствующую подмножеству $\Theta \subset \Pi$. Иными словами, $P_\Theta = BW_\Theta B$, где $W_\Theta = \langle s_\theta, \theta \in \Theta \rangle$. Обозначим через P_i максимальную параболическую подгруппу $P_{\Pi \setminus \{\alpha_i\}}$. Через Φ/P_Θ мы обозначаем флаговое многообразие G/P_Θ. Нумерация корней следует Бурбакам.

Обозначение $\mathrm{SB}_{n_1,\ldots,n_r}(A)$, $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_r \leqslant n$, используется для скрученной формы многообразия A_n/P_Θ, где $\Theta = \Pi \setminus \{\alpha_{n_1}, \ldots, \alpha_{n_r}\}$ и A – центральная простая алгебра степени $n+1$, соответствующая скручиванию. Заметим, что $\mathrm{SB}_{n_1,\ldots,n_r}(A) = X(A; n_1, \ldots, n_r)$ в обозначениях [15, Appendix] и $\mathrm{SB}(A) = \mathrm{SB}_1(A)$ – обычное многообразие Севери–Брауера, заданное A. Через $\mathrm{ind}(A)$ мы обозначаем индекс A, а через $\exp(A)$ ее экспоненту. Расщепимая проективная квадрика размерности n обозначается через Q^n.

2.2. Согласно [12] мотив Чжоу флагового многообразия $X = G/P_\Theta$, где G – расщепимая группа, изоморфен

$$\mathcal{M}(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\dim X} \mathbb{Z}(i)^{\oplus a_i(X)},$$

где $\mathbb{Z}(i)$ обозначает сдвиг мотива Лефшеца, а положительные числа (ранги) $a_i(X)$ являются коэффициентами производящего полинома $p_X(z) = \sum_{i=0}^{\dim X} a_i(X) z^i$. Этот полином определяется по следующей явной формуле:

$$p_X(z) = \Big(\prod_{i=1}^{\mathrm{rk}\, G} \frac{z^{d_i(W_\Theta)} - 1}{z-1}\Big) \Big/ \Big(\prod_{j=1}^{m} \prod_i \frac{z^{d_i(W_j)} - 1}{z-1}\Big).$$

Здесь $W_1 \times \ldots \times W_m$ является разложением группы W_Θ в произведение групп Вейля, соответствующих неприводимым системам корней, а $d_i(W_j)$ обозначают степени соответствующих фундаментальных полиномиальных инвариантов (см. [3, 9.4 A]).

Следующее наблюдение следует из изоморфизма, приведенного выше.

2.3. *Мотивы флаговых многообразий X и Y размерности n над сепарабельно замкнутым полем изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности рангов*

$$(a_0(X),\dots,a_n(X)) \quad \text{и} \quad (a_0(Y),\dots,a_n(Y))$$

равны.

Нам понадобятся следующие два факта.

2.4. (См. [11, Критерий 7.1]) *Пусть A, A' обозначают центральные простые алгебры над k, а* $\mathrm{SB}(A)$, $\mathrm{SB}(A')$ *обозначают соответствующие многообразия Севери–Брауера. Тогда*

$$\mathcal{M}(\mathrm{SB}(A)) \simeq \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A')) \Leftrightarrow A \simeq A', A'^{\,\mathrm{op}}.$$

2.5. (См. [8, Следствие 2.9 и Предложение 3.1]) *Пусть q, q' обозначают регулярные квадратичные формы ранга n, а X_q, $X_{q'}$ обозначают соответствующие проективные квадрики. Если n нечетно или $n<7$, то*

$$\mathcal{M}(X_q) \simeq \mathcal{M}(X_{q'}) \Leftrightarrow X_q \simeq X_{q'}.$$

Наконец, нам понадобится следующее наблюдение.

2.6. (См. [11, доказательство леммы 2.3]) *Пусть X и Y обозначают гладкие проективные многообразия над k, мотивы Чжоу которых изоморфны. Тогда имеет место изоморфизм абелевых групп*

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{CH}_0(X_s)) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(Y) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{CH}_0(Y_s)).$$

3. Малые размерности

В этом разделе мы классифицируем все пары (X,Y) неизоморфных скрученных флаговых многообразий над k внутреннего типа размерности $\leqslant 5$, Чжоу мотивы которых изоморфны, и, тем самым, доказываем теорему 1.2.

Размерность 1. Скрученные флаговые многообразия размерности 1 – это скрученные формы проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Скрученные формы проективной прямой $\mathbb{P}^1$ – это многообразия Севери–Брауера $\mathrm{SB}(H)$, где H – кватернионная алгебра. Согласно 2.4

$$\mathcal{M}(\mathrm{SB}(H)) \simeq \mathcal{M}(\mathrm{SB}(H')) \Leftrightarrow H \simeq H', H'^{\,\mathrm{op}}.$$

Так как $H \simeq H^{\mathrm{op}}$, мы заключаем, что мотивы изоморфны тогда и только тогда, когда многообразия изоморфны.

Размерность 2. Все скрученные флаговые многообразия размерности 2 – это скрученные формы проективного пространства $\mathbb{P}^2$ и расщепимой квадратичной поверхности $Q^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Заметим, что Q^2 является проективным однородным многообразием для группы типа D_2, которая не простая, а полупростая. Тем не менее, мы рассмотрим и этот случай.

Мотивы $\mathbb{P}^2$ и Q^2 неизоморфны, так как соответствующие последовательности рангов $(1,1,1)$ и $(1,2,1)$ различны.

Скрученные формы Q^2 внутреннего типа над k – это 2-мерные квадрики (см. [9, Следствие (15.12)]). Согласно 2.5 мотивы 2-х квадрик размерности 2 изоморфны тогда и только тогда, когда квадрики изоморфны.

Скрученные формы $\mathbb{P}^2$ – это многообразия Севери–Брауера $\mathrm{SB}(A)$, где A – центральная простая алгебра степени 3. Снова по 2.4 мы получаем

$$\mathcal{M}(\mathrm{SB}(A)) \simeq \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A')) \Leftrightarrow A \simeq A', A'^{\,\mathrm{op}}.$$

Так как многообразия $\mathrm{SB}(A)$ и $\mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}})$ изоморфны тогда и только тогда, когда A расщепима, мы заключаем, что все пары неизоморфных многообразий, мотивы которых изоморфны, имеют вид $(\mathrm{SB}(A), \mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}}))$, где A – алгебра с делением степени 3.

Размерность 3. Вычисляя производящие функции (см. 2.2), мы заключаем, что существует только три проективных однородных многообразия размерности 3 над k_s. А именно, проективное пространство $\mathbb{P}^3$, квадрика Q^3 и многообразие полных флагов A_2/B (B обозначает борелевскую подгруппу). Соответствующие последовательности рангов выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^3 \simeq \mathrm{A}_3/P_1 &: (1,1,1,1) \\ Q^3 \simeq \mathrm{B}_2/P_1 &: (1,1,1,1) \\ \mathrm{A}_2/B &: (1,2,2,1) \end{aligned}$$

В частности, мы видим, что мотивы $\mathbb{P}^3$ и Q^3 изоморфны, но мотивы Q^3 и A_2/B нет.

Согласно 2.4 все неизоморфные скрученные формы $\mathbb{P}^3$, мотивы которых изоморфны, образуют пары $(\mathrm{SB}(A),\ \mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}}))$, где A – алгебра с делением степени 4 и экспоненты 4. Заметим, что все скрученные формы Q^3 – это квадрики, и согласно 2.5 мотив квадрики определяет саму квадрику однозначно. Таким образом, остается описать все возможные мотивные изоморфизмы между скрученными формами ${}_\xi\mathbb{P}^3$ и ${}_\zeta Q^3$ и между скрученными формами ${}_\xi(\mathrm{A}_2/B)$ и ${}_\zeta(\mathrm{A}_2/B)$ многообразия полных флагов A_2/B.

Согласно следствию 4.4, не существует неизоморфных скрученных форм A_2/B, мотивы Чжоу которых изоморфны. Следующая лемма показывает, что то же самое верно для (нетривиальных) скрученных форм $\mathbb{P}^3$ и Q^3.

3.1. Лемма. *Пусть ξ, ζ обозначают* 1*-коциклы. Тогда $\mathcal{M}({}_\xi\mathbb{P}^3) \simeq \mathcal{M}({}_\zeta Q^3)$ тогда и только тогда, когда ξ и ζ тривиальны.*

Доказательство. Это утверждение является частным случаем более общего результата (см. лемму 4.2), который доказывается с помощью формулы редукции индекса. Ниже мы приводим элементарное доказательство. Оно использует только хорошо известные факты о квадриках и многообразиях Севери–Брауера.

Заметим, что любая скрученная форма $\mathbb{P}^3$ – это многообразие Севери-Брауера $\mathrm{SB}(A)$ для некоторой центральной простой алгебры A степени 4, а любая скрученная форма Q^3 – это несингулярная квадрика размерности 3.

Как в 2.6, рассмотрим для многообразия X абелеву группу

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(X_s)).$$

Если $X = \mathrm{SB}(A)$ – многообразие Севери–Брауера, соответствующее центральной простой алгебре A, то это коядро равно $\mathbb{Z}/\mathrm{ind}(A)\mathbb{Z}$ (см. [11]). В частности, это коядро тривиально тогда и только тогда, когда A расщепима. Если X – квадрика, то коядро тривиально тогда и только тогда, когда квадрика X изотропна (см. [19]). Если X – анизотропная квадрика, то это коядро изоморфно $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

В нашем случае нам даны два многообразия $X = \mathrm{SB}(A)$ и $Y = {}_\zeta Q^3$, мотивы которых изоморфны. Поэтому согласно 2.6 соответствующие коядра должны быть изоморфны.

Таким образом, если квадрика Y изотропна, то алгебра A расщепима. Из этого следует, что мотив $\mathcal{M}(\mathrm{SB}(A))$ расщепляется в прямую сумму мотивов Лефшеца, и, следовательно, то же самое верно для $\mathcal{M}(Y)$, то есть Y тоже расщепима согласно 2.5.

Предположим, что q анизотропна. Тогда существует квадратичное расширение поля l/k такое, что индекс Витта $Y_l = Y \times_k l$ равен единице (см. [22, §7.2]). Так как мотивы X и Y все еще изоморфны над l, мы заключаем, что A расщепима над l. Тогда Y_l тоже расщепима. Противоречие.

3.2. Замечание. Заметим, что пара скрученных форм $({}_{\xi}(\mathrm{B}_2/P_1),$ ${}_{\xi}(\mathrm{B}_2/P_2))$ может рассматриваться как маломерный аналог пары $({}_{\xi}(\mathrm{G}_2/P_1),\ {}_{\xi}(\mathrm{G}_2/P_2))$, рассмотренной Боннэ. Лемма утвержает, что в отличие от случая G_2, мотивы ${}_{\xi}(\mathrm{B}_2/P_1)$ и ${}_{\xi}(\mathrm{B}_2/P_2)$ неизоморфны (если ξ нетривиально).

Размерность 4. В размерности 4 существует три однородных проективных многообразия над k_s. А именно, проективное пространство $\mathbb{P}^4$, 4-мерная квадрика $Q^4 \simeq \mathrm{Gr}(2,4)$ и многообразие полных флагов B_2/B. Соответствующие последовательности рангов для этих случаев различны. Они выглядят следующим образом.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^4 \simeq \mathrm{A}_4/P_1 &: (1,1,1,1,1) \\ Q^4 \simeq \mathrm{A}_3/P_2 &: (1,1,2,1,1) \\ \mathrm{B}_2/B &: (1,2,2,2,1) \end{aligned}$$

Таким образом, мотивы $\mathbb{P}^4$, Q^4 и B_2/B друг другу неизоморфны.

Согласно 2.4 все неизоморфные скрученные формы $\mathbb{P}^4$, мотивы которых изоморфны, образуют пары $(\mathrm{SB}(A),\ \mathrm{SB}(A^{\mathrm{op}}))$, где A – алгебра с делением степени 5. Согласно следствию 4.5 не существует неизоморфных скрученных форм B_2/B, мотивы Чжоу которых изоморфны. Поэтому остается рассмотреть случай внутренних скрученных форм Q^4.

Внутренние формы Q^4 – это обобщенные многообразия Севери–Брауера $\mathrm{SB}_2(A)$, где A – центральная простая алгебра степени 4. Следующая лемма показывает, что не существует неизоморфных скрученных форм $\mathrm{SB}_2(A)$, мотивы которых изоморфны.

3.3. Лемма. *Пусть A, A' обозначают центральные простые алгебры степени 4. Тогда*

$$\mathcal{M}(\mathrm{SB}_2(A)) \simeq \mathcal{M}(\mathrm{SB}_2(A')) \Leftrightarrow \mathrm{SB}_2(A) \simeq \mathrm{SB}_2(A')$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(\mathrm{SB}_2(A)) \simeq \mathcal{M}(\mathrm{SB}_2(A'))$. Достаточно доказать, что для любого расширения поля l/k имеет место $\mathrm{ind}(A_l) = \mathrm{ind}(A'_l)$. В самом деле, согласно [11, Лемма 7.13] $\langle A\rangle = \langle A'\rangle$ в $\mathrm{Br}(k)$, и, следовательно, $A \simeq A'$ или A'^{op}. Но

$\mathrm{SB}_2(A) \simeq \mathrm{SB}_2(A^{\mathrm{op}})$ для любой центральной простой алгебры A степени 4.

Предположим, что существует расширение поля l/k такое, что $\mathrm{ind}(A_l) \neq \mathrm{ind}(A'_l)$. В зависимости от значения индексов A и A' мы будем различать следующие случаи.

Случай 1. $\mathrm{ind}(A) = 4$ и $\mathrm{ind}(A') = 1$ или 2.

В этом случае $\mathrm{SB}_2(A')$ имеет рациональную точку (см. [9, Случай $\mathrm{A}_3 = \mathrm{D}_3$]), и, следовательно, группа

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}_2(A')) \to \mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}_2(A'_{k_s}))$$

тривиальна. Согласно 2.6 коядро

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}_2(A)) \to \mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}_2(A_{k_s}))$$

тоже должно быть тривиальным. Если $\exp(A) = 2$, то A – бикватернионная алгебра, и согласно [9, Следствие (15.33)] $\mathrm{SB}_2(A)$ является анизотропной квадрикой. Тогда коядро, указанное выше, должно быть изоморфно $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, противоречие. Если $\exp(A) = 4$, то согласно [9, Следствие (15.33)] $A \simeq C^{\pm}(B, \sigma, f)$, где $(B, \sigma, f) \in {}^1\mathrm{D}_3$, а B – центральная простая алгебра степени 6 и индекса 2. По теореме Меркурьева (см. [14]) коядро, указанное выше, снова должно быть изоморфно $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, противоречие.

Случай 2. $\mathrm{ind}(A) = 2$ и $\mathrm{ind}(A') = 1$.

В этом случае A' расщепима, и, следловательно, соответствующее ей многообразие – это расщепимая квадрика. С другой стороны, $\mathrm{SB}_2(A) \simeq X_q$, где q – некоторая 6-мерная квадратичная форма и X_q – соответствующая ей проективная квадрика. С помощью 2.5 мы заключаем, что $\mathrm{SB}_2(A) \simeq \mathrm{SB}_2(A')$, противоречие. □

Размерность 5. Существует пять однородных проективных многообразий над k_s размерности 5. А именно, проективное пространство $\mathbb{P}^5$, квадрика Q^5, исключительное многообразие Фано G_2/P_2 и флаговые многообразия $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_1\}}$ и $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_2\}}$. Соответствующие последовательности рангов выглядят следующим образом.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}^5 \simeq \mathrm{A}_5/P_1 &: (1,1,1,1,1,1)\\
Q^5 \simeq \mathrm{B}_3/P_1 &: (1,1,1,1,1,1)\\
\mathrm{G}_2/P_2 &: (1,1,1,1,1,1)\\
\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_1\}} \simeq \mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_3\}} &: (1,2,3,3,2,1)\\
\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_2\}} &: (1,2,3,3,2,1)
\end{aligned}
$$

Поэтому мотивы $\mathbb{P}^5$, Q^5 и G_2/P_2 изоморфны и мотивы $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_1\}}$ и $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_2\}}$ изоморфны.

Как было сказано выше, скрученные формы $\mathbb{P}^5$ и Q^5 были полностью классифицированы с точностью до мотивного изоморфизма Карпенко и Ижболдиным (см. 2.4 и 2.5). Кроме того, согласно лемме 4.2 существует только одна пара $({}_\xi\mathbb{P}^5, {}_\zeta Q^5)$ скрученных форм, мотивы которых изоморфны.

Согласно результату Боннэ [2] мотив скрученной формы ${}_\xi(\mathrm{G}_2/P_2)$ изоморфен мотиву многообразия ${}_\xi(\mathrm{G}_2/P_1)$, которое является 5-мерной квадрикой.

Согласно следствию 1.6 мотивы скрученных форм $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_1\}}$ и $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_2\}}$ изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие центральные простые алгебры степени 4 изоморфны или противоположны. Это дает последний пример пары неизоморфных многообразий размерности 5 из теоремы 1.2.

4. Произвольные размерности

В данном разделе мы докажем несколько классификационных результатов. Мы начнем со следующей леммы.

4.1. Лемма. *Пусть X и Y обозначают скрученные флаговые многообразия внутреннего типа над k, мотивы Чжоу которых изоморфны. Предположим, что X не типа E_8 и расщепляется над своим полем функций $k(X)$, иными словами, группа, соответствующая X, расщепляется над $k(X)$. Тогда X расщепляется над полем функций Y.*

Доказательство. Так как мотивы изоморфны, существует изоморфизм коядер (2.6) и, следовательно, изоморфизм коядер над $k(Y)$:

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(X_{k(Y)}) \to \mathrm{CH}_0(X_{k(Y)_s})) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(Y_{k(Y)}) \to \mathrm{CH}_0(Y_{k(Y)_s})).$$

Так как $Y_{k(Y)}$ изотропно, коядро справа тривиально, и, следовательно, коядро слева тоже тривиально. Таким образом, отображение $\mathrm{res}\colon \mathrm{CH}_0(X_{k(Y)}) \to \mathrm{CH}_0(X_{k(Y)_s})$ сюръективно, и группа $\mathrm{CH}_0(X_{k(Y)_s})$ является свободной абелевой группой ранга один, порожденной классом рациональной точки $[pt]$. Из этого следует, что прообраз $\mathrm{res}^{-1}([pt])$ является 0-циклом степени 1 в $\mathrm{CH}_0(X_{k(Y)})$. Поэтому многообразие $X_{k(Y)}$ изотропно (см. [21, Q. 0.2]).

Согласно [17, 3.16.(iii)] поле функций $k(X)$ является общим полем расщепления группы G, соответствующей X. Так как $X_{k(Y)}$ изотропно, поле $k(Y)$ является k-специализацией $k(X)$ (см. [17, Определение 1.2]). Поэтому по [17, 3.9.(iii)] $k(Y)$ является полем расщепления G, то есть $X_{k(Y)}$ расщепимо. $\square$

4.2. Предложение. *Пусть γ, δ обозначают 1-коциклы, а $X = {}_\gamma\mathbb{P}^n$, $Y = {}_\delta Q^n$ соответствующие скрученные формы, причем $n > 1$ нечетно. Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow \gamma \ \text{ и } \ \delta \ \text{ тривиальны.}$$

Доказательство. Заметим, что X – это многообразие Севери–Брауера, соответствущее центральной простой алгебре A, а Y – n-мерная квадрика.

Предположим, что $\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y)$ и γ нетривиален. Согласно лемме 4.1, примененной к X и Y, алгебра $A_{k(Y)}$ расщепима, то есть $\mathrm{ind}(A_{k(Y)}) = 1$. С другой стороны, по формуле редукции индекса (см. [15]) мы получаем, что

$$\mathrm{ind}(A_{k(Y)}) = \min\{\mathrm{ind}(A), 2^{(n-1)/2}\,\mathrm{ind}(A \otimes_k C_0(q))\} > 1,$$

где $C_0(q)$ обозначает четную часть алгебры Клиффорда квадратичной формы q, соответствующей Y. Это приводит к противоречию.

Заметим, что то же самое доказательство работает для скрученных форм типа B_n и C_n. Точнее,

4.3. Предложение. *Пусть γ, δ обозначают 1-коциклы, а $X = {}_\gamma(\mathrm{C}_n/P_l)$, $Y = {}_\delta(\mathrm{B}_n/P_l)$ – соответствующие скрученные формы для нечетного $1 \leqslant l < n$. Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow \gamma \text{ и } \delta \text{ тривиальны.}$$

Доказательство. Для любой простой алгебраической группы G, как выше (см. 2.1), рассмотрим скрученное флаговое многообразие $W = {}_{\xi}(G/P_{\Theta})$ над k. На диаграмме Титса (см. [20]) группы ${}_{\xi}G$ над $k(W)$ все вершины, соответствующие простым корням из $\Pi \setminus \Theta$, обведены.

В нашем случае, так как l нечетно, то $X_{k(X)}$ расщепимо (полный список диаграмм Титса см. в [20]). Оставшаяся часть доказательства такая же, как и в 4.2. $\square$

Оставшаяся часть данного раздела посвящена скрученным формам многообразий флагов. В частности, мы получаем описание мотивных изоморфизмов для скрученных форм флаговых многообразий A_2/B, B_2/B и $\mathrm{A}_3/P_{\{\alpha_i\}}$, $i = 1, 2, 3$. Мы начнем с доказательства теоремы 1.5.

Доказательство теоремы 1.5. Предположим, что $\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y)$. Так как X и Y – скрученные формы многообразий флагов, содержащих подпространства размерности 1 (мы всегда можем считать, что $n_1 = m_1 = 1$), мотивы X и Y могут быть разложены в прямую сумму скрученных мотивов многообразий Севери–Брауера (см. [5, Теорема 2.1]). Точнее,

$$\mathcal{M}(X) \simeq \bigoplus_i \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A))(i), \quad \mathcal{M}(Y) \simeq \bigoplus_j \mathcal{M}(\mathrm{SB}(A'))(j). \qquad (*)$$

Вместе с 2.6 это влечет изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}(A)) \to \mathrm{CH}_0(\mathbb{P}^n)) \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{CH}_0(\mathrm{SB}(A')) \to \mathrm{CH}_0(\mathbb{P}^n))$$

и, следовательно, изоморфизм $\mathbb{Z}/\operatorname{ind}(A)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{ind}(A')\mathbb{Z}$. Таким образом, $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A')$. Так как мотивные изоморфизмы сохраняются при расширении скаляров, мы получаем, что $\operatorname{ind}(A_l) = \operatorname{ind}(A'_l)$ для любого расширения поля l/k. Согласно [11, Лемма 7.13] это эквивалентно тому, что $\langle A\rangle = \langle A'\rangle$ в $\mathrm{Br}(k)$. В частности, если $\exp(A) = \exp(A')$ равно 2, 3, 4, 6, мы получаем, что $A \simeq A'$ или A'^{op}.

Обратно, пусть $A \simeq A'$ или A'^{op}. Согласно условиям теоремы мы получаем мотивные разложения $(*)$ с одинаковыми наборами индексов i и j соответственно. Теперь согласно 2.4 мотивы $\mathrm{SB}(A)$ и $\mathrm{SB}(A')$ изоморфны, и, следовательно, $\mathcal{M}(X)$ и $\mathcal{M}(Y)$ изоморфны. $\square$

Следующие очевидные следствия теоремы 1.5 используются в доказательстве теоремы 1.2.

4.4. Следствие. *Пусть* $X = \mathrm{SB}_{1,\dots,n}(A)$ *и* $Y = \mathrm{SB}_{1,\dots,n}(A')$ *– скрученные формы многообразия полных флагов внутреннего типа* A_n. *Предположим, что соответствующие центральные простые алгебры* A *и* A' *имеют экспоненты* 1, 2, 3, 4 *или* 6. *Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow X \simeq Y.$$

4.5. Следствие. *Пусть* X *и* Y *обозначают скрученные формы многообразия полных флагов* B_2/B. *Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \Leftrightarrow X \simeq Y.$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения такое же, как и доказательство теоремы 1.5. Заметим, что в данном случае мотивное разложение, аналогичное $(*)$, приведено в [5, Следст. 2.9].

4.6. Рассмотрим псевдо-абелево замыкание $\mathcal{M}(G, R)$ категории мотивов проективных G-однородных многообразий с R-коэффициентами, где G – группа внутреннего типа A_n и R – кольцо коэффициентов. Такие категории были определены и тщательно изучены в [4]. В частности, известно, что любой объект в $\mathcal{M}(G, R)$, где R – кольцо дискретного нормирования, допускает единственное разложение в прямую сумму неразложимых объектов. С учетом этого результата доказательство теоремы 1.5 немедленно влечет следующее утверждение.

4.7. Следствие. *Пусть* G *– присоединенная простая алгебраическая группа внутреннего типа* A_n. *Пусть* R *– такое кольцо, что любой объект в* $\mathcal{M}(G, R)$ *допускает единственное разложение в прямую сумму неразложимых объектов. Пусть* $X = \mathrm{SB}_{n_1,\dots,n_r}(A)$ *и* $Y = \mathrm{SB}_{m_1,\dots,m_r}(A')$ *– два скрученных флаговых* G*-многообразия, заданные центральными простыми алгебрами* A *и* A' *простой степени. Предположим, что* $\mathcal{M}(X_s) \simeq \mathcal{M}(Y_s)$. *Тогда*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \mathcal{M}(Y) \ \text{в}\ \mathcal{M}(G, R) \Leftrightarrow \langle A \rangle = \langle A' \rangle \ \text{в}\ \mathrm{Br}(k).$$

Благодарности

Данная работа появилась в результате семинара, организованного в университете Bielefeld зимой 2004–2005. Мы благодарим участников семинара В. Петрова, O. Roendigs'a, B. Calmès'a и других за их замечания.

Литература

1. M. Artin, *Brauer–Severi varieties.* — Lect. Notes Math., **917** (1982), 194–210.
2. J.-P. Bonnet, *Un isomorphisme motivique entre deux variétés homogènes projectives sous l'action d'un groupe de type* G_2. — Docum. Math. **8** (2003), 247–277.
3. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* — John Wiley and Sons (1972).
4. V. Chernousov and A. Merkurjev, *Motivic decomposition of projective homogeneous varieties and the Krull–Schmidt theorem.* — Preprint (2004).
5. B. Calmès, V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, *Chow motives of twisted flag varieties.* — 2005, 18pp, to appear in Compositio Math.
6. M. Demazure, *Automorphismes et déformations des variétés de Borel.* — Inv. Math. **39** (1977), 179–186.
7. W. Fulton, *Intersection theory.* — Second edition, Springer-Verlag, Berlin et al. (1998).
8. O. Izhboldin, *Motivic equivalence of quadratic forms.* — Docum. Math. **3** (1998), 341–351.
9. M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, J.-P. Tignol, *The book of involutions.* — AMS Colloquium Publications, vol. 44 (1998).
10. Н. А. Карпенко, *Чжоу-мотивы Гротендика многообразий Севери–Брауэра.* — Алгебра и анализ, **7**, No. 4 (1995), 196–213.
11. N. Karpenko, *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras.* — Math. Ann. **317**, No. 3 (2000), 585–611.
12. B. Köck, *Chow motif and higher Chow theory of* G/P. — Manuscripta Math. **70** (1991), 363–372.
13. Ю. И. Манин, *Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования.* — Матем. сб. **77**, No. 4 (1968), 475–507.
14. А. С. Меркурьев, *Нульмерные циклы на некоторых инволютивных многообразиях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **227** (1995), 93–105.
15. A. S. Merkurjev, I. A. Panin, A. R. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties.* I. — K-Theory, **10**, No. 6 (1996), 517–596.
16. S. Nikolenko, N. Semenov, K. Zainoulline, *Motivic decomposition of anisotropic varieties of type* F_4 *into generalized Rost motives.* — Preprint Max-Planck-Institut für Mathematik (2005).
17. I. Kersten, U. Rehmann, *General splitting of reductive groups.* — Tohoku Math. J. **46** (1994), 35–70.
18. M. Rost, *The motive of a Pfister form.* — Preprint (1998) Available from `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/`.
19. R. G. Swan, *Zero cycles on quadric hypersurfaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **107**, No. 1 (1989), 43–46.
20. J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups.* — Proc. Symp. Pure Math., Vol IX, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1966).
21. B. Totaro, *Splitting fields for* E_8*-torsors.* — Duke Math. J. **121** (2004), No. 3, 425–455.
22. A. Vishik, *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms.* — Lect. Notes Math. **1835**, Berlin et. al. (2003), 25–101.

Zainoulline K. V., Semenov N. S. On classification of projective homogeneous varieties up to motivic isomorphism.

We give a complete classification of anisotropic projective homogeneous varieties of dimension less than 6 up to motivic isomorphism. We give several criterions for anisotropic flag varieties of type A_n to have isomorphic motives.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 23 ноября 2005 г.