Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

А. И. Виноградов

ОБОБЩЕННЫЙ КВАДРАТ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. II.

Введение

В работе [1], в равенстве (3.3), обобщенный квадрат дзета-функции разбит на главный член (3.5) и остаток (3.6). Остальная часть работы [1] посвящена спектральному разложению главного члена (3.5). Об остатке (3.6) кратко упомянуто, что его можно оценить с помощью укороченных функциональных уравнений для сдвинутых дзета-функций.

На самом деле остаток также можно разложить по спектру, что существенно упрощает его оценку и повышает ее точность. Об этом кратко упомянуто в §7, [1]. Подробной расшифровке этого краткого замечания и посвящена эта работа.

Для начала кратко поясним фразу из работы [1], которая следует за равенством (7.9):

"Используя явный вид (6.22) для $\zeta(0,\alpha)$:

$$\zeta(0,\alpha) = \{\alpha\} - \frac{1}{2}, \tag{0.1}$$

можно получить явный вид и всех остальных значений $\zeta(-n,\alpha)$ при $n \geqslant 1$."

Отметим, что в равенстве (0.1) используется полуоткрытый интервал: $\alpha \in (0,1]$. Если параметр α принадлежит открытому интервалу

$$\alpha \in (0,1), \tag{0.2}$$

то равенство (0.1) принимает вид:

$$\zeta(0,\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}. \tag{0.3}$$

Поэтому знак дробной доли $\{\alpha\}$ в равенстве (0.1) означает, что равенства (0.3) и (0.1) отличаются только в точке $\alpha = 1$, где сдвинутая дзета-функция $\zeta(s,\alpha)$ переходит в классическую дзета-функцию Римана $\zeta(s)$ и вместо равенства (0.3) появляется классическое равенство

$$\zeta(s)\Big|_{s=0} = -\frac{1}{2} = \zeta(0,1). \tag{0.4}$$

Возвращаясь к общему случаю $\zeta(-n,\alpha)$, при любом целом $n \geqslant 1$, надо вспомнить представление (6.20^a), [1]. Из него видно, что все случаи, когда $-s = n \geqslant 1$, делятся на два класса:

1) когда n – нечетные;
2) когда n – четные.

Для первого случая (n – нечетные), обращается в ноль второе слагаемое правой части (6.20^a), [1]:

$$\cos\frac{\pi}{2}s = \cos\frac{\pi}{2}n = 0. \tag{0.5}$$

Для второго случая – четных n, обращается в ноль первое слагаемое правой части (6.20^a), [1], т.к. в этом случае:

$$\sin\frac{\pi}{2}s = -\sin\frac{\pi}{2}n = 0. \tag{0.6}$$

Поэтому равенство (6.20^a), [1] делится на два случая:

1) для нечетных $n \geqslant 1 : -s = n \equiv 1 \pmod 2$:

$$\frac{1}{n!}\zeta(-n,\alpha) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (2\pi)^{-n-1} \cdot \zeta^*_{+1}(n+1,\alpha); \tag{0.7}$$

2) для четных $n \geqslant 2 : -s = n \equiv 0 \pmod 2$:

$$\frac{1}{n!}\cdot\zeta(-n,\alpha) = (i)^{n-1} \cdot (2\pi)^{-n-1} \cdot \zeta^*_{-1}(n+1,\alpha). \tag{0.8}$$

Напомним, что по определению (6.1), [1] справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \zeta^*_{+1}(w,\alpha) &= \zeta^*(w,\alpha) + \zeta^*(w,-\alpha), \\ \zeta^*_{-1}(w,\alpha) &= \zeta^*(w,\alpha) - \zeta^*(w,-\alpha). \end{aligned} \tag{0.9}$$

В свою очередь, в открытом интервале $\alpha \in (0,1)$ функция $\zeta^*(w,\alpha)$ при $\operatorname{Re} w \geqslant 1$ определена равенством (0.13) [1]:

$$\zeta^*(w,\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-w} \cdot e^{2\pi i\alpha\cdot m}. \tag{0.10}$$

Для того, чтобы получить явный вид величины $\zeta(-n,\alpha)$ при $n \geqslant 1$, надо взять n-ую производную по параметру α обеих частей равенств (0.7) и (0.8). (Напомним, что мы работаем с функциональным уравнением сдвинутой дзета-функции: $\zeta(-n,\alpha) \to \zeta^*_{\pm 1}(1+n,\alpha)$, поэтому при $n \geqslant 1$ все ряды из правых частей равенств (0.7) и (0.8) абсолютно сходятся). В результате, мы получим, как в (0.7), так и в (0.8), одно и тоже равенство:

$$\frac{1}{n!}\cdot\zeta^{(n)}(-n,\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\alpha m}{\pi m}. \tag{0.11}$$

Теперь нам осталось воспользоваться классическим равенством:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi\alpha m}{\pi m} = \frac{1}{2}-\alpha, \quad \alpha \in (0,1) \tag{0.12}$$

и подставить его в правую часть (0.11). В результате равенство (0.11) примет вид:

$$\frac{1}{n!}\zeta^{(n)}(-n,\alpha) = \frac{1}{2}-\alpha. \tag{0.13}$$

Отметим, что на последнем шаге, когда мы берем n-ую производную по параметру α, мы получаем в правой части (0.11) не абсолютно сходящийся ряд. Но мы работаем в открытом интервале $\alpha \in (0,1)$, поэтому процедуру взятия n-производной можно дополнить предельным переходом. В результате получается строгость равенства (0.11) и на последнем шаге. Процедура предельного перехода стандартная, поэтому мы ее опускаем для краткости.

Получив явный вид n-ой производной (0.13), теперь можно получить явный вид исходной величины $\zeta(-n,\alpha)$, проделав n интегрирований равенства (0.13) в обратную сторону. Эта процедура также стандартна, как и в случае с кратным дифференцированием. Поэтому мы ее тоже пропустим и сразу скажем, что в финале получается полиномиальное равенство:

$$\frac{1}{n}\cdot\zeta(-n,\alpha) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(n)}\cdot\alpha^k. \tag{0.14}$$

Для того, чтобы проще понять, каков явный вид коэффициентов $a_k^{(n)}$ в полиноме (0.14), следует для кратных интегрирований отдать предпочтение интервалам $(0,\alpha)$, вместо дополнительных интервалов $(\alpha,1)$. Кроме того, в процессе счета нам постоянно приходится иметь дело с дзета-функциями $\zeta^*_{\pm 1}(s,\alpha)$ из (0.9) и (0.10). Легко видеть, что $\zeta^*_{+1}(s,\alpha)$ является рядом Фурье по косинусам, а $\zeta^*_{-1}(s,\alpha)$ – по синусам. Это замечание позволяет легко разобраться, каков явный вид интегралов на нижних пределах интегрирований. Эти константы существенно влияют на явный вид коэффициентов $a_k^{(n)}$ в полиноме (0.14).

На самом деле можно выписать их явный вид, но он громоздкий. К тому же в дальнейшем их явный вид не потребуется, достаточно знать, что все они ограничены абсолютными константами, не зависящими от параметра n. Это тоже понятно почему, т.к. при многократных интегрированиях полинома его коэффициенты имеют в знаменателях факториалы соответствующего порядка.

§1. Переход на спектральный язык

Во введении мы только что получили равенство (0.14). Его можно использовать для спектрального представления остатков (2.11), [1] и (2.16), [1]. Они оба объединены в одном равенстве (7.8), [1], которое имеет два варианта символа $\zeta_{\pm m}(c)$ (см. равенство (7.9), [1]). Символ $\zeta_{+m}(c)$ определен равенствами (1.5), $(1.5)^a$, [1], а его второй вариант: $\zeta_{-m}(c)$ – равенством (1.10), [1] вместе с равенствами (1.11), (1.13) [1]. Главным препятствием к спектральному представлению остатка (7.8), [1] является, по прежнему, конечный отрезок суммирования по параметру $m \in [1,c]$ в правой части равенства (7.9), [1]. Для обхода этого препятствия мы используем другой подход, отличный от подхода в §2, [1]. Для этого введем интегральный оператор вида

$$I_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s>1} \frac{\alpha^{-s}}{(s+k)\cdot s} ds, \quad \alpha > 0, k \geqslant 1. \tag{1.1}$$

Полагая $\alpha = \frac{m}{c}$, получаем явный вид оператора (1.1):

$$I_k\left(\frac{m}{c}\right) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad m \geqslant c, \\ \frac{1}{k}\left[1 - \left(\frac{m}{c}\right)^k\right], \quad m \in [1,(c-1)]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Для того чтобы использовать оператор (1.2) в остатке (7.9), [1] при $n \geqslant 1$, преобразуем (7.9), [1], выделив слагаемое с номером

$m = c > 1$ (случай $c = 1$ тривиален):

$$\frac{1}{n!}R_n(c) = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{c-1}\zeta\big(-n, \frac{m}{c}\big)\cdot\zeta_{\pm m}(c) + \frac{1}{n!}\cdot\zeta(-n,1)\cdot\zeta_{\pm c}(c). \tag{1.3}$$

Из равенства (6.20^a), [1] получаем явный вид $\zeta(-n,1)$, $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{n!}\cdot\zeta(-n,1) = 2\cdot\frac{\zeta(n+1)}{(2\pi)^{n+1}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}n, \tag{1.4}$$

где $\zeta(n+1)$ – классическая дзета-функция Римана в целой точке $n+1$. Из определяющих равенств (1.5), [1] и (1.10), [1], а также из равенства (1.13), [1], получаем транзитивное равенство:

$$\zeta_{-c}(c) = \zeta_{+c}(c) = \zeta_0(c) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\frac{s_c(n_1,n_2;0)}{n_1^{1-s_1}\cdot n_2^{1-s_2}}. \tag{1.5}$$

Для суммы Клоостермана (1.5) получаем явный вид:

$$s_c(n_1,n_2;0) = c\cdot\sum_{\substack{c=c_1\cdot c_2,\\ c_1/(c,n_1)\\ c_2/(c,n_2)}} 1. \tag{1.6}$$

Поэтому транзитивное равенство (1.5) преобразуется к новому виду:

$$\zeta_{\pm c}(c) = \zeta_0(c) = \zeta(1-s_1)\cdot\zeta(1-s_2) \cdot\sum_{c=c_1\cdot c_2} c_1^{s_1}\cdot c_2^{s_2}, \tag{1.7}$$

где $\zeta(1-s_1)$ и $\zeta(1-s_2)$ – классическая дзета-функция Римана. Напомним, что $\operatorname{Re}s_1 < 0$, $\operatorname{Re}s_2 < 0$, как это следует из равенства (0.11), [1]. Перемножая правые части равенств (1.4) и (1.7), получаем явный вид второго слагаемого правой части равенства (1.3):

$$\frac{1}{n!}\cdot\zeta(-n,1)\cdot\zeta_{\pm c}(c) = 2\cdot(2\pi)^{-n-1}\cdot\sin\frac{\pi}{2}n\cdot\zeta(n+1) \times\zeta(1-s_1)\cdot\zeta(1-s_2)\cdot\big(\sum_{c=c_1\cdot c_2} c_1^{s_1}\cdot c_2^{s_2}\big) \tag{1.8}$$

Осталась первая сумма правой части (1.3) с интервалом суммирования:

$$1 \leqslant m \leqslant c-1. \tag{1.9}$$

Для того чтобы связать равенство (0.14) с оператором (1.1) и его явным видом (1.2), придадим полиному (0.14) каноническую форму относительно явного вида оператора (1.2). Для этого будем считать, что $\alpha = \frac{m}{c}$, где m – из интервала (1.9), после чего воспользуемся транзитивным тождеством:

$$\alpha^k = (\alpha^k - 1) + 1 = -k \cdot I_k(\alpha) + 1. \tag{1.10}$$

Затем подставим правую часть (1.10) в (0.14) при $\alpha = \frac{m}{c}$, $m \in [1,(c-1)]$, и преобразуем равенство (0.14) к новому виду:

$$\frac{1}{n!}\zeta(-n, \frac{m}{c}) = A_n - \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot a_k^{(n)} \cdot I_k(\frac{m}{c}), \tag{1.11}$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^{(n)}.$$

Подставляя (1.11) в правую часть (1.3), преобразуем ее первое слагаемое к новому виду:

$$\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{c-1} \zeta(-n, \frac{m}{c}) \cdot \zeta_{\pm m}(c) = A_n \cdot \sum_{m=1}^{c-1} \zeta_{\pm m}(c) - \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot a_k^{(n)} \cdot \sum_{m=1}^{c-1} I_k(\frac{m}{c}) \cdot \zeta_{\pm m}(c). \tag{1.12}$$

Теперь обратим внимание на то, что суммирование по m во второй (двойной) сумме правой части (1.12) можно продолжить на бесконечный интервал $1 \leqslant m = M \leqslant \infty$, т.к. $J_k(\frac{m}{c}) = 0$, если $m = M \geqslant c$. Поэтому, пользуясь интегралом (1.1) при $\alpha = \frac{m}{c}$, получаем равенство:

$$\sum_{m=1}^{c-1} J_k(\frac{m}{c}) \cdot \zeta_{\pm m}(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s > 1} \frac{c^s \cdot L_c(s)}{(s+k) \cdot s} ds, \tag{1.13}$$

где

$$L_c(s) = \sum_{M=1}^{\infty} M^{-s} \cdot \zeta_{\pm m}(c).$$

Из равенства (1.13) видно, что его левая часть является спектральным c-ядром в $R_n(c)$ нового типа. После домножения этого c-ядра на весовую функцию из §3, [1] и суммирования его по всем $c \geqslant 1$, получаем канонический ряд по $c \geqslant 1$, который можно разложить по спектру аналогично равенству (4.1), [1].

Кроме c-ядра (1.13), остаток $R_n(c)$ имеет и второе c-ядро "старого" типа, как в работе [1], §3. Его явный вид возникает после подстановки (1.13) в (1.12) и затем в (1.3). В результате получается явный вид $R_n(c)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\cdot R_n(c) = A_n\cdot\sum_{m=1}^{c}\zeta_{\pm m}(c) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{k\cdot a_k^{(n)}}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}s>1}\frac{c^s\cdot L_c(s)}{(s+k)\cdot s}ds \\ +\frac{1}{n!}\zeta(-n,1)\cdot\zeta_{\pm c}(c) - A_n\cdot\zeta_{\pm c}(c) \\ = R_n^{(1)}(c) - R_n^{(2)}(c) + R_n^{(3)}(c) - R_n^{(4)}(c). \qquad (1.14)\end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (1.14) и есть "старое" c-ядро в работе [1], §1, (1.4), (1.9). Отметим, по пути, что при переходе от равенства (1.12) к (1.14) мы прибавили и вычли в правой части (1.12) величину $A_n\cdot\zeta_{\pm c}(c)$ для того, чтобы свести первую сумму в правой части (1.12) к полному интервалу суммирования: $1 \leqslant m \leqslant c$, вместо не полного: $1 \leqslant m \leqslant c-1$. Этим и объясняется присутствие четвертого слагаемого в правой части (1.14) вида: $-A_n\cdot\zeta_{\pm c}(c)$. Напомним, что явный вид $\zeta_{\pm c}(c)$ приведен в (1.7), а явный вид третьего слагаемого в (1.14), дан в (1.8). Перевод "старого" c-ядра из правой части (1.14) к спектральному виду происходит точно так же, как в §2, [1], т.е. появляется второй, итерационный шаг этого приведения.

Остался последний случай: $n = 0$. Для него явный вид остатка $R_0(c)$ получается из равенства (7.9), [1]:

$$R_0(c) = \sum_{m=1}^{c}\zeta(0,\frac{m}{c})\cdot\zeta_{\pm m}(c). \qquad (1.14^a)$$

Из равенства (0.1) мы уже знаем, что функция $\zeta(0,\alpha)$ непрерывна в открытом интервале $\alpha \in (0,1)$ и терпит разрыв в точке $\alpha = 1$ в полуоткрытом интервале $\alpha \in (0,1]$: $\zeta(0,1) = -\frac{1}{2}$. Поэтому в правой части равенства (1.14^a) надо выделить точку $m = c$ и переписать его в новом виде:

$$R_0(c) = \sum_{m=1}^{(c-1)} \zeta(0, \frac{m}{c}) \cdot \zeta_{\pm m}(c) - \frac{1}{2}\zeta_{\pm c}(c). \tag{1.15}$$

Теперь используем явный вид $\zeta(0, \frac{m}{c})$ вместе с равенством (0.1) для $m \in [1, c-1]$ и приведем его к канонической форме:

$$\zeta(0, \frac{m}{c}) = \frac{m}{c} - \frac{1}{2} = -[1 - (\frac{m}{c})] + \frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

А для канонической формы используем оператор (1.2). В результате правая часть равенства (1.15) принимает новый вид:

$$R_0(c) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{(c-1)} \zeta_{\pm m}(c) - \sum_{m=1}^{(c-1)} I_1(\frac{m}{c}) \cdot \zeta_{\pm m}(c) - \frac{1}{2}\zeta_{\pm c}(c). \tag{1.17}$$

Первую сумму правой части (1.17) мы снова можем сделать полной, т.е. по интервалу $[1, c]$, вместо $[1, c-1]$, как в (1.14), добавляя и вычитая $\frac{1}{2}\zeta_{\pm c}(c)$. Во второй сумме правой части (1.17) мы заменим оператор $I_1(\alpha)$ его интегральным видом как в (1.14). В результате получаем частный случай равенства (1.14) для случая $n = 0$:

$$R_0(c) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{c} \zeta_{\pm m}(c) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\, s>1} \frac{c^s \cdot L_c(s)}{(s+1)\cdot s} ds - \zeta_{\pm c}(c). \tag{1.18}$$

Для перевода на спектральный язык первого слагаемого правой части (1.18) снова будет использована итерация схемы из §2, [1], а для второго слагаемого – новая схема, как в равенстве (1.14). Явный вид третьего слагаемого правой части (1.18) приведен в равенстве (1.7).

§2. Спектральное разложение остатка

Окончательный вид R-остатка на уровне c-суммы приведен в равенстве (3.6) работы [1]. Поэтому сумма (3.6), [1] распадается на две части:

$$R(Y) = \cos\frac{\pi}{2}(s_1 - s_2) \cdot \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c) \cdot \tilde{R}(c)$$
$$- \cos\frac{\pi}{2}(s_1 + s_2) \cdot \sum_{c=1}^{\infty} f^*(c) \cdot R(c). \tag{2.1}$$

Остатки $\tilde{R}(c)$ и $R(c)$, на уровне c-ядра из равенств (2.16), [1] и (2.11), [1], отличаются только знаком нижнего индекса у символа $\zeta_{\pm m}(c)$. Он определен равенством (1.5), [1] для случая $(+m)$ и равенством (1.10), [1] для случая $(-m)$, т.к. сумма Клоостермана в (1.10), [1] может быть заменена суммой $s_c(n_1, n_2, -m)$, что следует из транзитивного равенства (1.13), [1]. Напомним, что два c-остатка: $\tilde{R}(c)$ и $R(c)$ из правой части равенства (2.1), только что приведенного выше, объединены в одном равенстве (7.8), [1], которое имеет два варианта правой части равенства (7.9), [1]. В дальнейшем на это двойственное равенство мы и будем ориентироваться. Подставляя его в любую из c-сумм правой части (2.1) получаем представление:

$$\sum_{c=1}^{\infty} f^*(c) \cdot R(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{c=1}^{\infty} \big(\frac{c}{N}\big)^n \cdot f^*(c) \cdot R_n(c). \tag{2.2}$$

Напомним, что функция $f^*(c)$ определена равенством (3.7), [1], а исходная обрезающая функция $f(c)$ – равенством (3.1), [1]. По пути отметим, что внешняя сумма по параметру n в (2.2) взята по всему натуральному ряду. Но это чисто формальное суммирование. На самом деле достаточно ограничиться коротким отрезком $n \leqslant 3$. Объяснение этому довольно простое. Из явного вида гладкой обрезающей функции f в (3.1), [1] видно, что $f(c)$ начинает экспоненциально убывать по параметру c, когда $c > Y$. Поэтому для рационального отношения c/N справедлива оценка $c/N \ll Y/N$, а для его n-ой степени – оценка

$$\big(\frac{c}{N}\big)^n \ll \big(\frac{Y}{N}\big)^n, \quad n \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Теперь вернемся к транзитивному равенству (7.14), [1], в котором задано оптимальное соотношение между тремя главными параметрами работы [1]:

$$Y = N^{2/3} = \sqrt{x}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) получаем оптимальную оценку левой части неравенства (2.3):

$$\big(\frac{c}{N}\big)^n \ll (\sqrt[4]{x})^{-n}. \tag{2.5}$$

Оценки (2.5) достаточно, чтобы отправить всю часть ряда (2.2) в остаток при $n \geqslant 4$ по тривиальной причине.

После этого замечания снова вернемся к равенству (2.2) и добавим множитель c^n к функции $f^*(c)$, вместе с нормировкой: $(c/2\pi)^n$ и умножим одновременно на эту нормировку. В результате равенство (2.2) примет вид:

$$\sum_{c=1}^{\infty} f^*(c)\cdot R(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2\pi)^n}{n!\cdot N^n}\cdot \sum_{c=1}^{\infty} f_n^*(c)\cdot R_n(c), \tag{2.6}$$

где

$$f_n^*(c) = f^*(c)\cdot \big(\frac{c}{2\pi}\big)^n = \frac{f(c)}{c}\cdot \big(\frac{2\pi}{c}\big)^{s_1+s_2-n-2}. \tag{2.7}$$

Затем подставим (1.14) в (2.6) и приведем равенство (2.6) к новому виду:

$$\sum_{c=1}^{\infty} f_n^*(c)\cdot R(c) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2\pi}{N}\right)^n \cdot (R_n^{(1)} - R_n^{(2)} + R_n^{(3)} - R_n^{(4)}), \tag{2.8}$$

где

$$R_n^{(\nu)} = \sum_{c=1}^{\infty} f_n^*(c)\cdot R_n^{(\nu)}(c), \quad 1\leqslant \nu\leqslant 4. \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) подразумевает соответствие между слагаемыми правых частей в равенствах (1.14) и (2.8). В дальнейшем нас особо будет интересовать новая спектральная сумма (2.9) с номером $\nu = 2$, которой не было в работе [1]:

$$R_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k\cdot a_k^{(n)}}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s>1} \frac{R_n^{(2)}(s)}{(s+k)\cdot s} ds, \tag{2.10}$$

где

$$R_n^{(2)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} f_n^*(c)\cdot c^s\cdot L_c(s). \tag{2.11}$$

Подставляя явный вид $L_c(s)$ из (1.13) в (2.11) и меняя порядки суммирования по M и c, приведем равенство (2.11) к новому виду

$$R_n^{(2)}(s) = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^s} \sum_{c=1}^{\infty} f_n^*(c)\cdot c^s\cdot \zeta_{\pm M}(c). \tag{2.12}$$

Для того чтобы привести внутреннюю сумму по c в (2.12) к канонической форме, мы снова используем спектральный параметр x из (3.15), [1], который мы повторим здесь для удобства читателя:

$$x = \frac{4\pi\cdot \sqrt{M\cdot n_1\cdot n_2}}{c}. \tag{2.13}$$

Для того чтобы исходную весовую функцию $f(c)$ перевести на язык спектрального параметра x, мы воспользуемся обращением равенства (2.13):

$$c = \frac{4\pi \cdot \sqrt{M \cdot n_1 \cdot n_2}}{x}. \tag{2.14}$$

В результате определяющее равенство (3.1), [1] для $f(c)$ примет вид:

$$f(c) = \exp\left[-\left(\frac{2 \cdot \sqrt{M \cdot n_1 \cdot n_2}}{x \cdot Y} \right)^2 \right], \tag{2.15}$$

соответственно равенство (3.17), [1] мы заменим аналогичным равенством для произведения из (2.12):

$$f_n^*(c) \cdot c^s = \frac{(2\pi)^s}{c} \cdot \varphi_2(x), \tag{2.16}$$

где

$$\varphi_2(x) = f(c) \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{m \cdot n_1 \cdot n_2}}{x} \right)^{\omega}, \tag{2.17}$$

где $\omega = s + n + 2 - s_1 - s_2$.

В правой части (2.17) под $f(c)$ понимается правая часть равенства (2.15), т.е. функция от спектрального параметра x из (2.13). После этих преобразований подставим явный вид $\zeta_{\pm M}(c)$ в (2.12). Для этого мы воспользуемся равенством (1.5), [1], где индекс m заменим двухвариантным индексом $\pm M$. В результате (2.12) преобразуется к новому виду:

$$R_n^{(2)}(s) = (2\pi)^s \cdot \sum_{M,n_1,n_2=1}^{\infty} \frac{F_2(n_1, n_2; \pm M)}{n_1^{1-s_1} \cdot n_2^{1-s_2} \cdot M^s}, \tag{2.18}$$

где

$$F_2(n_1, n_2; \pm M) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{s_c(n_1, n_2; \pm M)}{c} \cdot \varphi_2(x). \tag{2.19}$$

Символ $s_c(\dots)$ в правой части (2.19) означает сумму Клоостермана в двухвариантном случае $\pm M$. Их определение дано равенством (1.5), [1] и (1.10), [1]. При этом равенство (1.10), [1] надо дополнить транзитивным равенством (1.13), [1]. Получив каноническую спектральную сумму (2.19), нам осталось напомнить, что явный вид спектрального разложения для суммы (2.19) уже получен в §4, [1], причем в двух вариантах, как для $(+M)$, так и для $(-M)$. Детали этих разложений приведены в §5, [1].

В транзитивном равенстве (1.14) осталось еще слагаемое

$$R_n^{(1)}(c) = A_n \cdot \sum_{m=1}^{c} \zeta_{\pm m}(c), \tag{2.20}$$

которое хорошо знакомо нам по работе [1], §3, после усреднения его по $c \geqslant 1$. Туда мы и отсылаем читателя за деталями. По пути отметим, что второе спектральное разложение суммы (2.20), по схеме работы [1], является итерационным, т.к. оно встроено в первое разложение [1], в равенствах (2.10), [1] и в (2.16) [1]. При этом внешний рациональный коэффициент c/N в правых частях этих равенств является понижающим для остатков $R(c)$ и $\tilde{R}(c)$, но не для главных частей $V(N,c)$ и $\tilde{V}(N,c)$, т.к в них есть суммирование по M, длина которого имеет порядок N (дальше идет экспонециальное затухание по M при $M > N$). Поэтому на шаге $k \geqslant 0$ итерации общий понижающий множитель перед остатком $R(c)$ будет иметь степень $k+1$:

$$\Bigl(\frac{c}{N}\Bigr)^{k+1} \cdot R(c). \tag{2.21}$$

Аналогичная картина справедлива и для $\tilde{R}(c)$. Относительно рациональной степени в (2.21) можно повторить то же самое, что уже было сказано относительно ее оценки в (2.3), (2.4) и (2.5) при $n = k+1$. Поэтому трех итераций ($k = 3$) вполне достаточно, чтобы отправить (2.21) в остаток по тривиальной причине (на самом деле достаточно одной или двух итераций).

Относительно сумм $R_n^{(\nu)}$, при $\nu = 3, 4$, т.е. двух последних сумм в правой части (2.8), следует отметить, что они являются остатками от спектрального разложения левой части (2.8). Напомним, что согласно транзитивному равенству (1.14) их явный вид такой:

$$R_n^{(3)}(c) = A_n \cdot \zeta_{\pm c}(c), \tag{2.21^a}$$

$$R_n^{(4)}(c) = \frac{1}{n!} \cdot \zeta(-n, 1) \cdot \zeta_{\pm c}(c). \tag{2.21^b}$$

Подставляя эти равенства в (2.8), мы получаем явный вид (2.9) среднего по $c \geqslant 1$ для $R_n^{(\nu)}(c)$ при $\nu = 3, 4$. Единственной тонкостью здесь является структура функции $f_n^*(c)$ в (2.7): произведение степени c и экспоненты от $c \geqslant 1$ в виде $f(c)$-функции из равенства (3.1), [1]. Для того чтобы перейти к суммированию только степеней параметра $c \geqslant 1$, надо воспользоваться интегральным представлением экспоненты:

$$\exp[-x^2] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, w>1} x^{-2w} \cdot \Gamma(w) dw. \tag{2.22}$$

Полагая $x = c/2\pi Y$, получаем интегральное представление для функции $f(c)$ из равенства (3.1), [1]:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, w>1} (2\pi Y)^{2w} \cdot c^{-2w} \cdot \Gamma(w) \cdot dw. \tag{2.23}$$

Равенства (1.7) и (1.8) этой работы, вместе с представлением (2.23), дают явный вид среднего по $c \geqslant 1$ для $R_n^{(\nu)}(c)$ при $\nu = 3, 4$ в виде интегрального представления от дзета-функций. Подставляя в (2.9) явный вид $f_n^*(c)$ из (2.7) и правую часть (2.23), получаем интегральное представление для $R_n^{(3)}$:

$$R_n^{(3)} = A_n^{(3)} \cdot \frac{(2\pi)^{\omega}}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathrm{Re}\, w_1, \mathrm{Re}\, w_2 > \frac{1}{2}} (2\pi Y)^{2w} \cdot \Gamma(w) \cdot \zeta(2w_1) \cdot \zeta(2w_2) dw, \tag{2.24}$$

где

$$w_1 = w + \frac{1}{2}(s_1 - n - 1), \quad w_2 = w + \frac{1}{2}(s_2 - n - 1),$$
$$\omega = s_1 + s_2 - n - 1; \quad A_n^{(3)} = A_n \cdot \zeta(1 - s_1) \cdot \zeta(1 - s_2).$$

Дальше идет счет по полюсам с переносом контура по w в левую полуплоскость. Этот счет стандартный, поэтому мы пропустим его для краткости.

Аналог равенства (2.24) для случая $R_n^{(4)}$ из правой части равенства (2.8) имеет тот же вид, что и (2.24), только коэффициент $A_n^{(3)}$ будет заменен на $A_n^{(4)}$:

$$A_n^{(4)} = \frac{1}{n!} \cdot \zeta(-n, 1) \cdot \zeta(1 - s_1) \cdot \zeta(1 - s_2), \tag{2.25}$$
$$\frac{1}{n!} \cdot \zeta(-n, 1) = \frac{\zeta(n+1)}{(2\pi)^{n+1}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} n, \quad n \geqslant 1.$$

Случай $n = 0$ является упрощенным вариантом общего случая $n \geqslant 1$. Это видно из равенства (1.18), в котором имеется только три слагаемых в правой части. Поэтому и в аналоге равенства (2.8) при $n = 0$, будет только три суммы (2.9): $\nu = 1, 2, 3$. В аналоге интегрального представления (2.24) коэффициент $A_n^{(3)}$ при $n = 0$ будет иметь вид:

$$A_0^{(3)} = -\zeta(1 - s_1) \cdot \zeta(1 - s_2). \tag{2.26}$$

И, конечно, надо положить $n = 0$ в аргументах w_1 и w_2 интеграла (2.24).

Заключение

Рассуждая о количестве итераций в предыдущем параграфе, мы имели в виду проблему круга и точек под гиперболой. Для их решения достаточно двух-трех итераций. Но есть родственные им проблемы, типа высоких моментов дзета-функции Римана на половинной прямой:

$$I_k(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} s| \leqslant T, k \geqslant 1} |\zeta(s)|^{2k} \cdot ds. \tag{3.1}$$

Для получения истинного порядка интеграла (3.1) важно, как раз, большое число итераций, т.к. они дают сколь угодно малый остаток в спектральном разложении квадрата дзета-функции на половинной прямой:

$$|\zeta(s)|^2_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} = \zeta(s) \cdot \zeta(1 - s). \tag{3.2}$$

В связи с равенством (3.2) интеграл (3.1) принимает вид:

$$I_k(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} s| \leqslant T \to \infty} (\zeta(s) \cdot \zeta(1 - s))^k ds. \tag{3.3}$$

Сдвигая контур (3.3) в правую полуплоскость $\operatorname{Re} s > 1$ (но можно и в левую: $\operatorname{Re} s < 0$), сведем интеграл (3.3) к новому виду:

$$I_k^{(1)}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s > 1, |\operatorname{Im} s| \leqslant T} (\Gamma_1(s) \cdot \zeta^2(s))^k ds. \tag{3.4}$$

При переходе от интеграла (3.3) к (3.4) возникает вычет от полюсного члена k-ой степени в точке $s = 1$ (либо в точке $s = 0$, если сдвигать контур (3.3) в левую полуплоскость) и два интеграла на перекладинах, вверху и внизу. Ввиду тривиальности, мы не приводим их явный вид, ограничившись интегралом (3.4). Можно вообще избавиться от перекладин, если конечное условие $|\operatorname{Im} s| \leqslant T$ в (3.1), заменить гладкой обрезающей функцией

$$F(s) = \exp\left(-\frac{s(1-s)}{T^2}\right), \tag{3.5}$$

а в качестве контура в (3.1) взять всю половинную прямую. В этом случае интеграл (3.1) примет вид:

$$I_k(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} F(s) \cdot |\zeta(s)|^{2\cdot k} ds. \tag{3.6}$$

Аналогичные изменения произойдут и с другими интегралами: (3.3) и (3.4). В частности, интеграл (3.4) примет вид:

$$J_k^{(1)}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s > 1} F(s) \cdot (\Gamma_1(s) \cdot \zeta^2(s))^k ds; \tag{3.7}$$

напомним, что $\Gamma_1(s)$ – переходной Γ-множитель в классическом функциональном уравнении для дзета-функции Римана: $\zeta(1-s) = \Gamma_1(s) \cdot \zeta(s)$, где

$$\Gamma_1(s) = \frac{(2\pi)^{1-s}}{\pi} \cdot \Gamma(s) \cdot \cos\frac{\pi}{2}s. \tag{3.8}$$

При спектральном подходе к проблеме высоких моментов (3.7) наиболее важной новостью являются свободные параметры (по два параметра на каждый квадрат) в ядре (3.7). Причем, каждая пара свободных параметров отлична от всех остальных пар. Другими словами, высокий момент (3.7) расщепляется на квадратичные моменты, и каждый из них можно усреднять по своим параметрам.

Литература

1. А. И. Виноградов, *Обобщенный квадрат дзета-функции. Спектральное разложение.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **322** (2005), 17–44.

Vinogradov A. I. A generalized square of the zeta function. The spectral decomposition. II.

An estimate of the rest term in the spectral decomposition of the generalized ζ-function are given that is more precise than the known ones. This paper is a continuation of the previous paper of the author published in *Zapiski nauchn. semin. POMI*, **322**.

С.-Петербургское отделение
Математического института РАН

Поступило 12 декабря 2005 г.