Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко

СТРОЕНИЕ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ИЗ КНИГИ

В настоящей статье мы подробно описываем новый геометрический подход к доказательству основных структурных теорем для групп Шевалле $G = G(\Phi, R)$ типов $\Phi = \mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ над коммутативным кольцом R, который предложен в [10] и [11]. Мы считаем, что этот подход дает *окончательное* доказательство структурных теорем и, следуя Эрдешу, называем его Доказательством из Книги[1]. В идейном отношении Доказательство из Книги гораздо проще как локализационных методов типа localisation and patching или localisation–completion, так и геометрического метода разложения унипотентов, дальнейшим развитием которого он является. Мы иллюстрируем Доказательство из Книги на примере классической проблемы описания нормального строения группы G, или, на современном языке, описания подгрупп G, нормализуемых элементарной подгруппой $E = E(\Phi, R)$.

В отличие от статей [10] и [11], представляющих собой развернутые изложения дипломных работ второго и третьего авторов, выполненных под руководством первого, настоящая статья является текстом обзорного доклада с тем же названием, с которым мы несколько раз выступали в различных университетах

Исследования, составившие основу настоящей работы, выполнены в рамках проектов РФФИ 01–01–00924 (СПбГУ) и 03–01–00349 (ПОМИ РАН) и INTAS 03-51-3251 и были поддержаны грантами Минвуза “Геометрия корневых подгрупп” PD02–1.1–371 и “Надгруппы полупростых групп” E02–1.0–61. Значительная часть работы над статьями [10], [11] осуществлена в университете Билефельда при поддержке SFB-343, INTAS 00–566 и Эйлеровской программы DAAD. Первый автор признателен также за поддержку программы Минвуза “Развитие научных школ Санкт-Петербурга в области теоретической и прикладной математики” на заключительном этапе работы над настоящей статьей. Работа третьего автора была поддержана Федеральным агентством по науке и инновациям (гос. контракт No. 442.11.7291) и INTAS Fellowship Grant No. 05-109-5565.

[1]В 2002 году совет раввинов Университета Бар Илан официально разрешил авторам использование этого названия.

и на конференциях. В противоположность [10] и [11] здесь мы не приводим детали фактических вычислений, но зато сравниваем различные доказательства и детально обсуждаем некоторые принципиальные идейные аспекты. Чтобы поставить изложение в контекст, мы резюмируем существующие *геометрические* доказательства для классических групп [71], [13]–[15], [19], [2], [5]–[7], [42], [57], [66], а также доказательства для исключительных групп, основанные на методе разложении унипотентов, см. [12, 66, 70, 57, 68, 9]. Заметим, что не только центральный фрагмент статьи [11], но и некоторые вычисления из статьи [9] публикуются здесь впервые. В то же время, здесь мы вообще не касаемся *локализационных* доказательств (по этому поводу см. [16, 19, 20, 23–25], [32]–[34], [42]–[45], [48], [49], [59]–[66], где можно найти много дальнейших ссылок).

Мы уверены, что различные варианты Доказательства из Книги применимы ко всем структурным результатам, справедливым для произвольных коммутативных колец. В качестве таких результатов можно упомянуть описание автоморфизмов G, описание различных классов подгрупп, задание E образующими и соотношениями и т.д. Точно так же мы уверены, что аналогичное доказательство можно провести и для группы Шевалле типа E_8, но, так как у этой группы нет микровесовых представлений, многие детали доказательств в этом случае становятся заметно сложнее и мы не смогли пока преодолеть все возникающие здесь технические трудности.

§1. Фон и история

В настоящей работе мы изучаем исключительные группы Шевалле $G(\Phi, R)$ типа $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8, \mathrm{F}_4$ над коммутативным кольцом R. Поскольку мы не можем объяснять *все* используемые нами слова, предполагается, что присутствующие имеют некоторое понятие об алгебрах Ли и их представлениях, а также об алгебраических группах. Кроме того, предполагается, что они прочли любой канонический источник по теории групп Шевалле, скажем, [3], [18], или [35], притом достаточно внимательно, чтобы быть в состоянии разобраться хотя бы в одной – любой! – из статей [8]–[12], [22]–[27], [40], [45], [51], [52], [54], [56], [58]–[60], [62], [66]–[68], [70]. Исторически современные постановки рассматриваемых нами вопросов в такой общности возникли только в алгебраической K-теории, а некоторые наши вычисления пародируют стандартную технику теории представлений алгебраических групп и теории инвариантов. Некоторое знакомство с этими учениями не может повредить, но, строго говоря, не является необходимым для понимания настоящей работы. Наши обозначения совпадают с используемыми в [66]–[68], [70], [53], [45], [10], [11], поэтому настоящую работу лучше всего читать вместе с какими-то из этих работ.

Все известные доказательства структурных теорем основаны на индукции по размерности основного кольца R, и индукции по рангу группы $l = \mathrm{rk}(\Phi)$, или комбинации того и другого. По очевидным причинам мы называем доказательства, основанные на индукции по размерности, т.е. такие доказательства, которые зависят от природы основного кольца, **арифметическими**. С другой стороны, доказательства, основанные на индукции по рангу, не зависят от основного кольца[2], они функционируют исключительно в терминах геометрии подлежащего модуля и поэтому называются **геометрическими**.

До середины 1960-х годов структурные теоремы были известны лишь в некоторых очень специальных случаях, таких как нульмерные кольца и некоторые одномерные кольца арифметического происхождения, такие, как области Хассе. Для классических групп над конечными полями эти теоремы впервые появились в работах Камилла Жордана, Леонарда Диксона и Элиакима Мура в последние десятилетия XIX века. Впоследствии Жан Дьедонне, Клод Шевалле, Жак Титс и многие другие обобщили их на широкие классы групп, включая классические группы над телами, исключительные группы Шевалле и другие изотропные — но не обязательно расщепимые! – алгебраические группы над полями. Обобщения на нульмерные и арифметические кольца начали возникать в 1940-е годы в работах Джоэля Бреннера и позже, в начале 1960-х годов, в работах Вильгельма Клингенберга и Йенса Меннике, причем поток публикаций на эту тему не иссяк до сих пор, хотя идеологически это направление полностью исчерпало себя с появлением алгебраической K-теории.

В 1960 годах произошел подлинный взрыв общности, который начался с работ Хаймана Басса [1]. Одним из самых плодотворных аспектов его работы было поразительное открытие, что в

[2] По крайней мере, если оно коммутативно!

линейной алгебре ответы на большинство вопросов тем проще, чем выше размерность рассматриваемых объектов (скажем, ранги проективных модулей, степени матриц и т.д.), причем для *достаточно больших* – скажем, бесконечных! – размерностей ответ вообще не зависит ни от основного кольца, ни от рассматриваемой размерности. Это явление называется СТАБИЛИЗАЦИЕЙ. В контексте алгебраических групп стабилизация утверждает, что все структурные вопросы допускают стандартные ответы для групп, ранг которых велик по сравнению с размерностью основного кольца. В действительности, Басс ввел новый тип размерности, специально созданный для контроля подобных вопросов, — стабильный ранг. Сам он использовал его для того, чтобы доказать структурные результаты для $\mathrm{GL}(n, R)$, и вскоре его работа была распространена Энтони Баком на другие классические группы [31]. Совершенно замечательные результаты в этом направлении были получены Кейтом Деннисом, Вильбертом ван дер Калленом, Майклом Стейном, Андреем Суслиным, Леонидом Васерштейном и другими.

В середине 1970-х годов было обнаружено, что для *коммутативных* колец структурные теоремы выполняются, начиная с некоторого небольшого ранга – скажем, 2, 3 или 4, – который зависит только от рассматриваемой проблемы, но не от размерности рассматриваемого кольца. Это явление получило название качественной стабилизации. Первоначальный толчок развитию этого направления был дан замечательными теоремами Уилсона–Голубчика и Суслина о нормальном строении группы $\mathrm{GL}(n, R)$, [71], [13], [20]. В течение последующего десятилетия аналогичные результаты для других подобных задач были получены Андреем Суслиным и его учениками Вячеславом Копейко и Маратом Туленбаевым [16], [21], Вильбертом ван дер Калленом, Александром Михалевым и Игорем Голубчиком, Зеноном Боревичем и Николаем Вавиловым [2], Ефимом Зельмановым и другими. В [66], [34], [57] можно найти достаточно подробный обзор этого этапа и десятки дальнейших ссылок. Исторически первые доказательства подавляющего большинства структурных результатов для *классических* групп были геометрическими и использовали матрицы. Однако в то время, несмотря на огромные усилия, никто не смог перенести эти результаты на исключительные группы.

Примерно в то же самое время для решения проблемы Серра о проективных модулях и ее высших аналогов Даниэл Квиллен и Андрей Суслин развили первые версии могущественного метода локализации и склеивания [20]. Первоначально этот метод применялся для исследования ранней стабилизации, но в [61] Леонид Васерштейн сделал важное наблюдение, что этот метод дает также еще один подход к доказательству основных структурных теорем для классических групп. Впоследствии этот подход широко эксплуатировался как самим Васерштейном, который опубликовал 30 или 40 вариаций на эту тему [63], [64] и др., так и многими другими. Здесь можно упомянуть, в частности, важные работы Ли Фуаня [48], [49] и Васерштейна–Ю Хона [65]. Первые полные доказательства основных структурных теорем для исключительных групп были получены Эйичи Абе, Джованни Таддеи и Леонидом Васерштейном [24], [25], [60], [62] в 1986–1990 именно с использованием такой техники. Примерно одновременно с этими работами Энтони Бак [32] придумал еще более простой и мощный метод локализации–пополнения, который можно с успехом применять в структурной теории [44] – [46].

В 1987 году Алексей Степанов [19], [57] открыл более острую вариацию метода факторизации Суслина, и вскоре после этого первый автор заметил, что при помощи этого метода можно охватить все группы Шевалле. В простейшем варианте этот метод состоит в предъявлении явных полиномиальных формул, выражающих элементы корневого типа в группе Шевалле как произведения элементов корневого типа, лежащих в собственных параболических подгруппах типа P_i, по одной для каждого веса фундаментального представления $V(\varpi_i)$. Совершенно замечательно, что эти формулы носят чисто комбинаторный характер и никак не зависят от природы основного кольца. В более сложных случаях удается доказать лишь, что такое разложение существует, но написать явные формулы не получается. Смысл такого рода результатов состоит в том, что они позволяют сводить *все* вычисления, в которых участвует группа $E(\Phi, R)$, к аналогичным вопросам для групп меньшего ранга. При этом сама эта редукция осуществляется при помощи элементов корневого типа, лежащих в параболической подгруппе какого-то другого типа. Например, как мы увидим, при помощи вычислений в A_5 вычисления в E_6

могут быть сведены к вычислениям в D_5. Либо, в другом варианте, они могут быть сведены к вычислениям в A_5 при помощи вычислений в D_5. С точки зрения большинства обычных приложений эти редукции эквивалентны, но при этом получаются разные формулы, дающие различные оценки в более тонких количественных вопросах. Впервые этот метод был опубликован в совместной работе первого автора, Евгения Плоткина и Алексея Степанова [12], где он назван РАЗЛОЖЕНИЕМ УНИПОТЕНТОВ. Позже детальные доказательства для классических случаев и групп типов E_6, E_7 появились в [66], [57], [68]. Подробное описание всего проекта можно найти в [70].

Кроме элементарных вычислений, в которых используются лишь соотношения Стейнберга между элементарными образующими, метод разложения унипотентов требовал вычислений с одним столбцом или одной строкой матрицы $g \in G(\Phi, R)$ в некотором представлении. Технология таких вычислений была развита в основополагающих трудах Хидея Мацумото [51] и Майкла Стейна [56] и усовершенствована в дальнейшем, в частности, в работах первого автора и Евгения Плоткина [66], [70], [53], [52], [68]. Одним из основных инструментов при фактическом проведении этих вычислений были весовые диаграммы, по существу восходящие к работам Евгения Дынкина 50-х годов, см. ссылки в [66], [53], [68]. Для тех случаев, которые фактически возникают при доказательстве структурных теорем, весовые диаграммы совпадают с введенными Масахару Кашивара кристаллическими графами. С точки зрения большинства практических целей весовые диаграммы заменяют матрицы. Более того, для подавляющего большинства случаев они гораздо лучше матриц, так как правильнее отражают структуру представления. Традиционная запись матриц вводит линейный порядок на весах, который является *фиктивной* дополнительной структурой, в большинстве случаев лишь затрудняющей вычисления!

Для классических групп – по крайней мере в *векторных* представлениях – доказательства, получающиеся на этом пути, чрезвычайно просты, [57]. Однако их обобщения на исключительные группы оказались *гораздо* хитрее. Причина этого состоит в том, что даже в представлениях наименьшей размерности в исключительных группах недостаточно унипотентов для того, чтобы стабилизировать произвольный столбец, и это вынуждает использовать *уравнения на столбец*. Именно в этом месте появляется основная техническая трудность – необходимость согласовать знаки структурных констант со знаками уравнений. В 1988–1990 мы были не в состоянии найти концептуальное объяснение согласованности этих знаков и вместо этого полагались на обширные вычисления, в том числе компьютерные. В [66] по этому поводу просто говорится, что "можно проверить", что знаки согласованы. Для всех микровесовых и присоединенных представлений это было фактически проделано Евгением Плоткиным и первым автором в 1989–1991 годах с использованием компьютеров. Вначале мы просто водили пальцами по (неопубликованным) таблицам, которые прислали нам Поль Гилки и Гари Зейтц [41], а потом написали свои собственные программы для этих целей на языке `Mathematica` – одним из наблюдаемых побочных продуктов этой деятельности является [69], но сотни страниц кода и таблиц существуют только в электронном виде. Первое полное априорное доказательство для микровесовых представлений групп типов E_6 и E_7 было найдено нами в середине 1990-х годов и опубликовано в [68]. Полное доказательство для присоединенных представлений только сейчас готовится к печати [8], [9], и др.

§2. Стандартное описание

Японская пословица утверждает, что цветочность цветка гораздо легче увидеть в одном цветке, чем в тысяче цветков – впрочем, японский оригинал, скорее всего, говорит о *десяти тысячах* цветков. В настоящем докладе мы сконцентрируемся исключительно на описании подгрупп в группе Шевалле $G(\Phi, R)$, нормализуемых элементарной группой $E(\Phi, R)$. Напомним, что группа $E(\Phi, R)$ порождена всеми *элементарными* корневыми унипотентами $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi$, а $\xi \in R$. Однако полезно помнить, что это всего лишь *пробная задача*, на которой мы сравниваем эффективность и силу различных методов. В действительности каждый из этих методов можно применить к решению *тысяч* – или *десятков тысяч*? – аналогичных проблем.

1. Стандартное описание. Итак, как выглядят подгруппы H в $G = G(\Phi, R)$, нормализуемые $E(\Phi, R)$? Опишем, прежде всего, очевидные подгруппы с этим свойством. Пусть $I \trianglelefteq R$ – идеал в R. Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_I : G(\Phi, R) \longrightarrow G(\Phi, R/I)$.

Прообраз центра $\mathrm{Cent}(G(\Phi, R/I))$ по отношению к этому гомоморфизму обозначается через $C(\Phi, R, I)$ и называется полной конгруэнц-подгруппой уровня I. Группа

$$E(\Phi, R, I) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in I \rangle^{E(\Phi,R)}$$

называется элементарной подгруппой уровня I. Стандартное описание подгрупп, нормализуемых $E(\Phi, R)$, состоит в следующем: для каждой такой подгруппы H существует единственный идеал $I \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Phi, R, I) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, I).$$

По этому поводу следует отметить такие два момента:

• Часто в понятие стандартного описания включается также требование, что этот идеал I определяется из равенства $[H, E(\Phi, R)] = E(\Phi, R, I)$. Это требование заведомо выполнено, если в G выполняются **стандартные коммутационные формулы**:

$$[G(\Phi, R), E(\Phi, R, I)] = [E(\Phi, R), C(\Phi, R, I)] = E(\Phi, R, I),$$

поэтому некоторые авторы включают в понятие стандарного описания и выполнение коммутационных формул. Для классических групп над произвольным коммутативным кольцом первая коммутационная формула впервые доказана Суслиным и Копейко [20], [21], [16], а вторая – Васерштейном и Боревичем—Вавиловым [61], [2], [6], а для исключительных групп – Таддеи [60] и Васерштейном [62]. В работах [66], [32] – [34], [57], [45] можно найти детальный обзор и еще несколько доказательств.

• Этот ответ заведомо не имеет места для группы $\mathrm{Sp}(2l, R)$ над таким кольцом R, в котором 2 не является обратимой, и для некоторых групп маленького ранга. При этом нарушение стандартности для групп маленького ранга связано именно с нарушением стандартных коммутационных формул – эти группы не являются совершенными. В то же время для симплектической группы это отклонение носит неустранимый характер, связано с феноменом **гибридизации**[3] и не может быть правильно истолковано

[3] Появления групп, которые по одним максимальным идеалам ведут себя как ортогональные, а по другим – как симплектические.

без привлечения теории Бака форменных параметров и форменных идеалов.

В настоящей статье, где мы интересуемся главным образом исключительными группами типов E_6, E_7, E_8 и F_4, мы не будем подробно останавливаться на этих феноменах, тем более, что они во всех деталях исследованы в замечательных работах Косты и Келлера [38]–[40].

§3. Основные редукции

Каждый, кто задумывался над стандартным описанием или прочел две-три работы на эту тему, знает, что при условии выполнения стандартных коммутационных формул для доказательства стандартного описания достаточно доказать *гораздо* более простой, на первый взгляд, факт.

• **Level reduction:** чтобы доказать стандартное описание, достаточно проверить, что каждая нецентральная подгруппа H содержит нетривиальный элементарный корневой унипотент $x_\alpha(\xi)$, $\xi \in R^\bullet$.

• **Parabolic reduction:** чтобы гарантировать наличие в H нетривиального унипотента, достаточно предъявить нецентральный элемент $g \in H$, содержащийся в собственной параболической подгруппе.

Такой план доказательства был впервые предложен Хайманом Бассом в 1964 году и с тех пор без изменений используется в подавляющем большинстве публикаций[4]. Статус этих редукций совершенно различен. Доказательство первой из них занимает несколько строчек, но самым существенным образом зависит от трудного внешнего результата – стандартных коммутационных формул. С другой стороны, вторая редукция является чисто технической, но требует достаточно хорошего понимания строения параболических подгрупп (действия подгруппы Леви на унипотентном радикале). Несмотря на то, что это утверждение абсолютно очевидно для каждого профессионала, именно его проверка (причем обычно только для тех случаев, которые фактически

[4]Наиболее замечательным исключением являются работы Голубчика [14], [15], в которых стандартное описание устанавливалось в таких случаях, когда справедливость стандартных коммутационных формул неизвестна! Голубчик использовал технику многократного понижения уровня.

используются в доказательстве!) занимает около половины объема доказательства для исключительных групп. Однако, так как эти редукции в разных вариантах и с использованием разной техники отработаны в *десятках* публикаций, мы будем считать эту часть доказательства стандартной. Поэтому в настоящем докладе мы сконцентрируемся на единственной проблеме.

• **Hitting a parabolic:** пусть H – нецентральная подгруппа в $G = G(\Phi, R)$, нормализуемая $E(\Phi, R)$. Найти нецентральный элемент $g \in H$, содержащийся в собственной стандартной параболической подгруппе.

Эта часть доказательства отнюдь не является стандартной и дает обширный материал для изощрения изобретательности. В настоящей работе мы будем обсуждать только такие методы получения элемента в параболической подгруппе, которые основаны на теории представлений. Как мы упоминали во введении, имеются абсолютно другие методы получения такого элемента, основанные на коммутативной алгебре и алгебраической K-теории; о таких методах, как и о различных некоммутативных обобщениях, в дальнейшем ничего не говорится. Отметим, впрочем, что различные варианты метода локализации и так уже сверхизобильно представлены в имеющейся литературе, в то время как статьи, посвященные геометрическим методам для исключительных групп, можно пересчитать на пальцах, даже не снимая ботинок.

Мы мыслим элементы группы $G = G(\Phi, R)$ действующими в некотором рациональном представлении (V, π). Как правило, мы отождествляем элемент $g \in G$ с его образом $\pi(g) \in \mathrm{GL}(V)$ в этом представлении. Обычно, хотя и не всегда, $V = V(\varpi_i)$ будет являться i-м фундаментальным представлением. В этом случае проще всего целиться в i-ю максимальную параболическую подгруппу P_i. Чтобы попасть туда, обычно применяется следующий трюк. Выберем какой-то нецентральный элемент $g \in H$ и возьмем вес $\lambda \in \Lambda$ модуля V. Предположим, что $x \in E(\Phi, R)$ является унипотентом, стабилизирующим столбец матрицы g с номером λ, иными словами, $xg_{*\lambda} = g_{*\lambda}$. В этом случае $(g^{-1}xg)_{*\lambda} = v^{\lambda}$ и, таким образом, $g^{-1}xg$ попадает в собственную параболическую подгруппу P типа P_i. Если удачно выбрать x и λ, то x попадет в ту же самую параболическую подгруппу и, таким образом, мы получаем в свое распоряжение элемент $z = x^{-1}g^{-1}xg \in H \cap P$.

Если нам совсем не повезло, элемент z может, конечно, оказаться центральным, но обычно в выборе λ и x оказывается достаточно свободы, чтобы избежать фатального исхода.

§4. A_2-доказательство versus A_3-доказательства для классических групп

В настоящем параграфе мы наметим доказательства для линейных и ортогональных групп. Так как в этой статье мы интересуемся главным образом случаем исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 и тесно связанным с ними случаем групп типа F_4, мы не обсуждаем обобщения на другие типы классических групп.

1. A_2-доказательство для A_l**.** В качестве первого примера рассмотрим группу $\mathrm{SL}(n,R)$, $n \geqslant 3$, в естественном (векторном) представлении. С точки зрения групп Шевалле это односвязная группа типа A_l, $l = n-1$, в представлении со старшим весом $\overline{\omega}_1$. Веса этого представления имеют вид $e_1, \dots, e_n$. Элемент $g \in \mathrm{SL}(n,R)$ выражается матрицей $(g_{e_i e_j})$, элементы которой обычно обозначаются просто g_{ij}; элементы обратной матрицы g^{-1} будут обозначаться g'_{ij}.

Мы намереваемся стабилизировать k-й столбец g. Нет ничего проще! Достаточно взять три любых попарно различных индекса i, j, h (напомним, что $n \geqslant 3$) и два любых $\xi, \zeta \in R$, подчиненных условию $\xi g_{ik} + \zeta g_{jk} = 0$. Ясно, что унипотент

$$x = t_{hi}(\xi) t_{hj}(\zeta) = e + \xi e_{hi} + \zeta e_{hj}$$

как раз и стабилизирует k-й столбец g. Так как R коммутативно, то в качестве ξ и ζ можно взять, например, $\xi = g_{jk}$, $\zeta = -g_{ik}$. Оказывается – именно в этом и состоит *разложение унипотентов* в случае SL_n – что унипотенты $x = t_{hi}(g_{jk}) t_{hj}(-g_{ik})$, отвечающие всевозможным выборам i, j, h и k, порождают всю элементарную подгруппу $E(n,R)$. Выбирая унипотент x, который не коммутирует с нецентральным $g \in H$, мы получим нецентральный элемент $x^{-1} g^{-1} x g \in H \cap P$, где P – параболическая подгруппа типа P_1, состоящая из всех матриц, k-й столбец которых пропорционален k-му столбцу единичной матрицы. Это – в точности предложенное в [2], [57] доказательство теоремы Уилсона–Голубчика. Так как это доказательство опирается на существование двух корней, образующих угол $\pi/3$, это – A_2-доказательство.

2. A_3-доказательство для D_l. Перейдем теперь к следующему по сложности случаю четной ортогональной группы $G = \mathrm{SO}(2l, R)$, $l \geqslant 3$, снова в векторном представлении. С точки зрения теории групп Шевалле это группа типа D_l, в представлении со старшим весом $\overline{\omega}_1$. Веса этого представления имеют вид $e_1, \ldots, e_l, -e_l, \ldots, -e_1$. В дальнейшем удобно положить $-e_i = e_{-i}$ и считать, что индексы пробегают множество $I = \{1, \ldots, l, -l, \ldots, -1\}$ – сравни с [35] или [4]. В этих обозначениях элемент $g \in \mathrm{SO}(2l, R)$ выражается матрицей $(g_{e_i e_j})$, $i, j \in I$, элементы которой снова обозначаются просто g_{ij}.

В ортогональном случае тоже довольно легко стабилизировать столбец матрицы $g \in G$. С этой целью выберем три индекса i, j, h таких, что все шесть индексов $\pm i, \pm j, \pm h$ попарно различны (напомним, что $l \geqslant 3$) и любые три элемента $\xi, \zeta, \eta \in R$, подчиненных условиям $-\xi g_{-j,k} + \zeta g_{-i,k} = 0$, $\eta g_{-j,k} - \zeta g_{-h,k} = 0$, $-\eta g_{-i,k} + \xi g_{-h,k} = 0$. Обозначим через $T_{ij}(\xi) = t_{ij}(\xi) t_{j,-i}(-\xi)$ элементарную ортогональную трансвекцию, известную также как элементарный корневой унипотент $x_{e_i - e_j}(\xi)$. Знаки в приведенных выше уравнениях для ξ, ζ, η выбраны так, чтобы произведение

$$x = T_{h,-j}(-\xi) T_{h,-i}(\zeta) T_{i,-j}(\eta)$$

стабилизировало k-й столбец g. Снова, так как R коммутативно, мы можем положить $\xi = g_{-i,k}$, $\zeta = g_{-j,k}$ и $\eta = g_{-h,k}$. Точно так же, как и выше, легко видеть, что, варьируя здесь i, j, h и k, мы получим унипотенты $T_{h,-j}(-g_{-i,k}) T_{h,-i}(g_{-j,k}) T_{i,-j}(g_{-h,k})$, порождающие всю элементарную ортогональную группу $\mathrm{EO}(2l, R)$. Это – в точности *разложение унипотентов* для векторного представления SO_{2l}. Теперь можно слово в слово повторить доказательство для случая SL_n и получить нецентральный элемент в параболической подгруппе P_1. Так как это доказательство опиралось на существование трех корней, образующих угол $\pi/3$, это – A_3-доказательство.

Теперь естественно спросить: обобщается ли это доказательство на другие группы? Это действительно так. В действительности аналогичные разложения можно построить и для других групп, включая исключительные группы типа $G(\mathrm{E}_l, R)$, $l = 6, 7, 8$. Именно это и было целью работ [12], [66], [70], [68]. Однако сделать это совсем непросто[5]. Прежде всего, эти доказательства требуют огромного запаса коммутирующих унипотентов. Они зависят от вложения A_5 в E_6 и A_7 в E_7. Унипотент x, стабилизирующий столбец g, выражается как

$$x = x_{\alpha_1}(\pm g_{\lambda_1\mu_1})\dots x_{\alpha_m}(\pm g_{\lambda_m\mu_m}),$$

где $m = 5$ или $m = 7$, соответственно, и основной технический момент состоял в необходимости согласовать знаки в этих произведениях со знаками структурных констант и знаками коэффициентов в уравнениях на орбиту старшего веса. Трудность здесь состоит в том, что теперь свободных параметров в этих унипотентах гораздо меньше, чем затрагиваемых умножением на них компонент вектора. Это значит, что теперь нет никакого способа стабилизировать произвольный столбец; единственная причина, по которой эти дополнительные слагаемые могут сократиться, состоит в уравнениях, которым удовлетворяют столбцы матрицы $g \in G(E_l, R)$. То, что такое доказательство все-таки работает, следует рассматривать как одно из чудес, которыми изобилует математика, а вовсе не как нечто самоочевидное и/или естественное.

3. A_2**-доказательство для** D_l**.** В действительности, первое доказательство стандартности для группы $\mathrm{SO}(2l, R)$, которое было получено в 1975 Игорем Голубчиком, выглядело совершенно иначе. Так как Голубчик не предполагал выполнение стандартных коммутационных формул, он не мог прямо ссылаться на редукцию уровня и должен был извлекать трансвекции в несколько шагов. Позже первый автор, Дыбкова и другие широко использовали вычисления такого типа в описании различных классов подгрупп, причем не только для унипотентных, но и для полупростых элементов. В простейшем варианте этот трюк выглядит следующим образом.

Прежде всего, предположим, что в k-м столбце матрицы g есть ноль. Пусть, например, $g_{-h,k} = 0$. Тогда мы можем провести точно такое же вычисление, как в случае $\mathrm{SL}(n, R)$. Не аналогичное вычисление, а *точно такое же*! В самом деле, положим

$$x = T_{hi}(\xi)T_{hj}(\zeta) = T_{hi}(g_{jk})T_{hj}(-g_{ik})$$

[5]За исключением случая групп типа B_l, который ничем не отличается от случая групп типа D_l.

и посмотрим на произведение xg. С одной стороны, в k-м столбце слагаемые, прибавляемые к h-й компоненте, сокращаются по самому выбору ξ и ζ. С другой стороны, так как теперь мы работаем с произведением ортогональных трансвекций $T_{ij}(\xi)$, а не с линейными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, то, кроме этого, в каждом столбце появляются два дополнительных слагаемых, возникающих из-за того, что теперь $(-h)$-я строка прибавляется к $(-i)$-й и $(-j)$- й строкам. Однако, так как $g_{-h,k} = 0$, в k-м столбце оба этих прибавления ничего не меняют. Таким образом, для того, чтобы стабилизировать столбец с нулевой компонентой, достаточно использовать те же прибавления – и те же вычисления, – что в случае $\mathrm{SL}(n, R)$, которые зависят только от вложения $\mathrm{A}_2 \leqslant \mathrm{D}_l$.

Следующий шаг доказательства состоит в том, чтобы предъявить достаточное количество матриц с нулевыми элементами. Для этого посмотрим на трансвекции $x = gT_{rs}(\xi)g^{-1}$, где $g \in \mathrm{SO}(2l, R)$. Из уравнений, определяющих ортогональную группу, сразу вытекает, что $x_{i,-i} = 0$ для всех i. Концептуальное объяснение этого факта состоит в том, что это представление тоже является микровесовым. Для микровесового представления корневой элемент $x \in G$ имеет вид $e + y$, где y – корневой элемент алгебры Ли $L(G)$. Но ведь для каждого элемента $y \in L(G)$ и любых двух весов $\lambda \neq \mu$ имеем $y_{\lambda\mu} = 0$, если разность весов λ и μ не является весом. Так как нецентральный элемент $g \in H$ не может коммутировать со всеми ортогональными трансвекциями $T_{rs}(1)$, $r \neq \pm s$, то g можно заменить на $h = [g, T_{rs}(1)] = (gT_{rs}(1)g^{-1})T_{rs}(-1) \in H$. Однако элемент h отличается от корневого элемента $x = gT_{rs}(1)g^{-1}$ не более, чем в двух столбцах. Это значит, что для любого $l \geqslant 3$, в матрице h много нулевых элементов.

Для ортогональной группы получающееся на этом пути доказательство *хуже* разложения унипотентов, так оно и длиннее и более замысловатое, чем изложенное выше A_3-доказательство. С другой стороны, оно все равно не дает лучших оценок на ранг – на случай D_2 результат не обобщается, а случай $\mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_2$ все равно требует отдельного, весьма специального анализа. Но раз на раз не приходится (“raz na wozie, raz pod wozem”). Оказывается, что обобщить это A_2-доказательство на группы типов E_6 и E_7 гораздо проще, чем изложенное выше A_3-доказательство. Совершенно замечательно, что в получающихся на этом пути доказательствах никаких дополнительных требований на унипотенты не возникает, все они остаются A_2-доказательствами! Эти доказательства не только гораздо проще, но и значительно сильнее, чем доказательства, основанные на развитом в работах [12], [66], [68] разложении унипотентов в микровесовых представлениях! А именно, они позволяют перенести на исключительные группы все результаты о классических группах, с теми же оценками на (относительные) ранги!

§5. A_5-доказательство для E_6 и A_7-доказательство для E_7

В настоящем параграфе мы приведем некоторые детали, относящиеся к разложению унипотентов для исключительных групп типов E_6 и E_7 в микровесовых представлениях. Это доказательство было анонсировано в [12] и в основных чертах опубликовано в [66]. Однако приведенное там доказательство опиралось на явные компьютерные вычисления, а детальное априорное доказательство было опубликовано в [68].

1. Отличие от классических случаев. Как и в доказательствах для классических групп, о которых шла речь в предыдущем параграфе, сердцевина излагаемых в настоящем и следующем параграфе доказательств состоит в нахождении большого количества элементов корневого типа, стабилизирующих столбцы матрицы $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda(\pi)$, из группы $G = G(\Phi, R)$ в некотором представлении π.

Однако имеется принципиальное различие: в классических группах море[6] корневых элементов, и их хватало для стабилизации произвольного столбца. Корневыми элементами исключительных групп удается стабилизировать только столбцы, удовлетворяющие тем же уравнениям, что столбцы $v_\mu = g_{*\mu}$, $\mu \in \Lambda(\pi)$, матриц из $G = G(\Phi, R)$ – или, по крайней мере, части этих уравнений.

В действительности, как правило, нам достаточно стабилировать векторы из орбиты старшего веса. В дальнейшем мы – slightly loosely! – упоминаем столбцы из орбиты старшего веса как *сингулярные*. Сингулярные столбцы удовлетворяют квадратичным уравнениям, которые изучались и сами по себе [50], и с

[6] Народный перевод английского `more`.

других точек зрения, в частности, в связи с полилинейными инвариантами [28], [29], [36], [37] и теорией стандартных мономов [47]. Как форма [66], [53], так и знаки [68], [8] этих уравнений могут быть прочитаны непосредственно по весовой диаграмме представления. В микровесовых представлениях групп типов E_6 и E_7 все столбцы матриц из группы $G(\Phi, R)$ сингулярные. В этом параграфе, кроме того, используется только вейлевская орбита *старшего* уравнения. Конечно, для E_6 эта вейлевская орбита как раз и определяет сингулярные векторы, но для E_7 это только часть необходимых для этого уравнений [37], [68]. Однако в следующем параграфе мы вынуждены использовать уравнения из *двух* вейлевских орбит.

Как правило, построение корневого элемента, стабилизирующего столбец, разбивается на две части:

• выбор знаков в прибавлениях так, чтобы сократить все, что может сократиться по формальным причинам для *произвольного* столбца;

• явная ссылка на уравнения, которым подчинены компоненты *сингулярного* столбца, с тем, чтобы убедиться, что при этом не меняются и остальные компоненты.

В силу научно-популярного характера настоящей статьи мы не занимаемся всерьез уточнением *знаков* в этих уравнениях. Заметим, впрочем, что именно в этом и состоит подлинная техническая сложность *всех* упоминаемых в настоящем и следующем параграфе доказательств. Как возможность подобрать знаки прибавлений так, чтобы в тех местах, где происходит два прибавления, все сократилось по формальным причинам, так и совпадение *формы* прибавлений к оставшимся позициям с уравнениями, определяющими сингулярные столбцы, представляют собой чистую комбинаторику корней и весов и проделываются достаточно легко. Но вот проверка того, что при этом знаки прибавлений согласованы со *знаками* уравнений, требует либо детального понимания геометрии рассматриваемых представлений, либо *чрезвычайно* тягостных вычислений. Главным *техническим* преимуществом Доказательства из Книги является именно то, что знаки уравнений в нем вообще не используются!

2. A_5-доказательство для E_6. В этом доказательстве 27-мерный модуль V со старшим весом ϖ_1 для односвязной группы Шевалле

$G(\mathrm{E}_6,R)$ реализуется в стандартной параболической подгруппе P_7 односвязной группы Шевалле $G(\mathrm{E}_7,R)$. А именно, мы интерпретируем это представление как действие коммутанта подгруппы Леви L_7 сопряжением на унипотентном радикале $V=U_7$. Таким образом, корни системы E_6 изображаются дынкинской формой в E_6, в то время как веса – дынкинской формой в E_7, причем веса 27-мерного модуля – это в точности корни системы E_7, коэффициент которых при α_7 равен 1. Обозначим множество всех таких корней через Σ. В качестве базиса V в этой реализации можно взять векторы $v^\alpha = x_\alpha(1)$, $\alpha\in\Sigma$.

Напомним, что максимальное количество корней в E_6, образующих попарные углы $\pi/3$, равно пяти. Зафиксируем некоторый порядок на E_6 и выберем максимальное по отношению к этому порядку множество

$$\beta_1=\begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix},\quad \beta_2=\begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix},\quad \beta_3=\begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix},\quad \beta_4=\begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix},\quad \beta_5=\begin{smallmatrix}12210\\1\end{smallmatrix}.$$

Так как все попарные разности этих корней – тоже корни, то они как раз и образуют множество корней с попарными углами $\pi/3$. Тем самым, для любых $z_1,\dots,z_5\in R$ произведения

$$z=x_{\beta_1}(z_1)x_{\beta_2}(z_2)x_{\beta_3}(z_3)x_{\beta_4}(z_4)x_{\beta_5}(z_5)$$

являются элементами корневого типа. Действие элемента $x_{\beta_1}(z_1)\cdot\ldots\cdot x_{\beta_5}(z_5)$ на 27-мерном модуле V можно описать следующим образом. Рассмотрим следующие три серии весов:

$$\gamma_1=\begin{smallmatrix}001111\\1\end{smallmatrix},\quad \gamma_2=\begin{smallmatrix}001111\\0\end{smallmatrix},\quad \gamma_3=\begin{smallmatrix}000111\\0\end{smallmatrix},\quad \gamma_4=\begin{smallmatrix}000011\\0\end{smallmatrix},\quad \gamma_5=\begin{smallmatrix}000001\\0\end{smallmatrix},$$

$$\delta_1=\begin{smallmatrix}011111\\0\end{smallmatrix},\quad \delta_2=\begin{smallmatrix}011111\\1\end{smallmatrix},\quad \delta_3=\begin{smallmatrix}012111\\1\end{smallmatrix},\quad \delta_4=\begin{smallmatrix}012211\\1\end{smallmatrix},\quad \delta_5=\begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix},$$

$$\varepsilon_1=\begin{smallmatrix}111111\\0\end{smallmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{smallmatrix}111111\\1\end{smallmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{smallmatrix}112111\\1\end{smallmatrix},\quad \varepsilon_4=\begin{smallmatrix}112211\\1\end{smallmatrix},\quad \varepsilon_5=\begin{smallmatrix}112221\\1\end{smallmatrix}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что

- $\beta_i+\gamma_j\in\Sigma$, если и только если $i\neq j$,
- $\gamma_{ij}=\beta_i+\gamma_j=\beta_j+\gamma_i$,
- $\beta_i+\rho_j\in\Sigma$, $\rho=\delta,\varepsilon$, если и только если $i=j$,

• $\rho = \beta_i + \rho_i = \beta_j + \rho_j$, $\rho = \delta, \varepsilon$,

• $\beta_i + \alpha \notin \Sigma$, если $\alpha \neq \gamma_j, \delta_i, \varepsilon_i$,

• Все 27 весов γ_i, δ_i, ε_i, $\gamma_{ij} = \beta_i + \gamma_j$, $i < j$, $\delta = \beta_1 + \delta_1$ и $\varepsilon = \beta_1 + \varepsilon_1$ попарно различны.

Это полностью описывает действие z на *произвольном* столбце $u = (u_\lambda) \in V$ с точностью до знаков. А именно, элементарный корневой унипотент $x_{\beta_i}(z_i)$ умножает u_{γ_j} на z_i и прибавляет его к или вычитает его из $u_{\gamma_{ij}}$. Кроме того, $x_{\beta_i}(z_i)$ умножает u_{ρ_i}, $\rho = \delta, \varepsilon$, на z_i и прибавляет его к или вычитает его из u_ρ.

Теперь возьмем *сингулярный* столбец $u = (u_\lambda) \in V$ и попытаемся подобрать коэффициенты $z_1, \ldots, z_5$ в выражении для z так, чтобы z стабилизировало u. Легко видеть, что для этого следует положить

$$z_1 = \pm\xi u_{\gamma_1}, \quad \ldots, \quad z_5 = \pm\xi u_{\gamma_5},$$

и, как всегда, настоящая проблема состоит в том, как выбрать знаки, чтобы все сокращалось. В положительном базисе Шевалле для системы E_7, который дает кристаллический базис $V = U_7$, см. [68], Теорема 1, эти знаки фиксируются следующим образом:

$$z = x_{\beta_1}(\xi u_{\gamma_1}) x_{\beta_2}(\xi u_{\gamma_2}) x_{\beta_3}(\xi u_{\gamma_3}) x_{\beta_4}(\xi u_{\gamma_4}) x_{\beta_5}(-\xi u_{\gamma_5}).$$

Теперь непосредственное вычисление, которое, как и аналогичное вычисление для системы $\Phi = \mathrm{E}_7$, было проведено на компьютере [66], затем вручную при помощи описанного в [68] алгоритма, основанного на Теореме 2 этой работы, показывает, что

$$x_{\beta_i}(z_i) v^{\gamma_j} - v^{\gamma_j} = \begin{cases} \xi u_{\gamma_i} v^{\gamma_{ij}}, & \text{if} \quad i < j, \\ -\xi u_{\gamma_i} v^{\gamma_{ij}}, & \text{if} \quad i > j, \end{cases} \tag{4}$$

где $1 \leqslant i \neq j \leqslant 5$. Иными словами, для указанного выше выбора знаков вклады $x_{\beta_i}(z_i)$ и $x_{\beta_j}(z_j)$ в $u_{\gamma_{ij}}$ всегда имеют противоположные знаки и, таким образом, сокращаются!

Однако после этого у нас нет никакой дальнейшей свободы в выборе коэффициентов z_i. Таким образом, для произвольного столбца нет никакой надежды доказать, что умножение на z не меняет компоненты u_δ и u_ε. В действительности, умножение на z прибавляет

$$\xi(N_{\beta_1,\rho_1} u_{\gamma_1} u_{\rho_1} + \ldots + N_{\beta_4,\rho_4} u_{\gamma_4} u_{\rho_4} - N_{\beta_5,\rho_5} u_{\gamma_5} u_{\rho_5})$$

к u_ρ, где $\rho = \delta, \varepsilon$. Однако наш столбец не произвольный, а *сингулярный* и, как проверено в [68], для сингулярного столбца эти суммы как раз и являются левыми частями уравнений на его компоненты, и, тем самым, действительно обращаются в 0.

3. A_7-доказательство для E_7. В этом доказательстве 56-мерный модуль V со старшим весом $\overline{\varpi}_7$ для односвязной группы Шевалле $G(\mathrm{E}_7, R)$ реализуется в стандартной параболической подгруппе P_8 группы Шевалле $G(\mathrm{E}_8, R)$. А именно, мы интерпретируем это представление как действие коммутанта подгруппы Леви L_8 сопряжением на факторе центрального ряда унипотентного радикала $V = U_8/[U_8, U_8]$. Таким образом, корни системы E_7 изображаются дынкинской формой в E_7, в то время как веса – дынкинской формой в E_8, причем веса 56-мерного модуля – это в точности корни системы E_8, коэффициент которых при α_8 равен 1. Как и в случае E_6, мы обозначаем множество всех таких корней через Σ. Так как $[U_8, U_8] = X_\rho$, где

$$\rho = \begin{smallmatrix} 2465432\_ \\ 3 \end{smallmatrix}$$

максимальный корень системы E_8, то в качестве базиса V можно взять векторы $v^\alpha = x_\alpha(1) X_\rho$, $\alpha \in \Sigma$.

Напомним, что максимальное количество корней в E_7, образующих попарные углы $\pi/3$, равно семи. Как и выше, зафиксируем некоторый порядок на E_7 и выберем максимальное по отношению к этому порядку множество

$$\beta_1 = \begin{smallmatrix} 234321 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{smallmatrix} 134321 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{smallmatrix} 124321 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{smallmatrix} 123321 \\ 2 \end{smallmatrix},$$

$$\beta_5 = \begin{smallmatrix} 123221 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad \beta_6 = \begin{smallmatrix} 123211 \\ 2 \end{smallmatrix}, \quad \beta_7 = \begin{smallmatrix} 123210 \\ 2 \end{smallmatrix}.$$

Так как все попарные разности этих корней – тоже корни, то они как раз и образуют множество корней с попарными углами $\pi/3$. Тем самым, для любых $z_1, \dots, z_7 \in R$ произведения

$$z = x_{\beta_1}(z_1) x_{\beta_2}(z_2) \dots x_{\beta_7}(z_7)$$

являются элементами корневого типа. Действие элемента

$$x_{\beta_1}(z_1) \dots x_{\beta_7}(z_7)$$

на 56-мерном модуле V можно описать следующим образом. Рассмотрим следующую серию весов

$$\gamma_1 = \begin{smallmatrix}1111111\\0\end{smallmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{smallmatrix}0111111\\0\end{smallmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{smallmatrix}0011111\\0\end{smallmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{smallmatrix}0001111\\0\end{smallmatrix},$$

$$\gamma_5 = \begin{smallmatrix}0000111\\0\end{smallmatrix}, \quad \gamma_6 = \begin{smallmatrix}0000011\\0\end{smallmatrix}, \quad \gamma_7 = \begin{smallmatrix}0000001\\0\end{smallmatrix}.$$

Тогда непосредственное вычисление показывает, что

- $\beta_i + \gamma_j \in \Sigma$, если и только если $i \neq j$;
- $\gamma_{ij} = \beta_i + \gamma_j = \beta_j + \gamma_i$;
- 56 весов γ_i, γ_{ij}, $i < j$, $\gamma_{ij}^* = \rho - \gamma_{ij}$, $i < j$, $\gamma_i^* = \rho - \gamma_i$, попарно различны;
- $\beta_i + \gamma_{jh}^* \in \Sigma$, если и только если $i = j$ или $i = h$, в действительности, $\beta_i + \gamma_{ij}^* = \gamma_j^*$;
- $\beta_i + \alpha \notin \Sigma$, если $\alpha \neq \gamma_j, \gamma_{ij}^*$.

Эти четыре серии корней, отвечающие распадению 56-мерного модуля V при ограничении с E_7 на A_6, можно описать следующим образом:

- ∘ γ_i – это в точности корни $\gamma \in \Sigma$ такие, что $m_2(\gamma) = 0$;
- ∘ γ_{ij}^* – это в точности корни такие, что $m_2(\gamma) = 1$;
- ∘ γ_{ij} – это в точности корни такие, что $m_2(\gamma) = 2$;
- ∘ γ_i^* – это в точности корни $\gamma \in \Sigma$ такие, что $m_2(\gamma) = 3$.

Это полностью описывает действие z на *произвольном* столбце $u = (u_\lambda) \in V$ с точностью до знаков. В самом деле, $x_{\beta_i}(z_i)$ умножает u_{γ_j} на z_i и прибавляет его к или вычитает его из $u_{\gamma_{ij}}$. Кроме того, $x_{\beta_i}(z_i)$ умножает $u_{\gamma_{ij}^*}$, на z_i и прибавляет его к или вычитает его из $u_{\gamma_j^*}$.

Как всегда, возьмем *сингулярный* столбец $u = (u_\lambda) \in V$ и попытаемся подобрать коэффициенты $z_1, \dots, z_7$ в выражении для z так, чтобы z стабилизировало u. Легко видеть, что, как и выше, для этого следует положить $z_1 = \pm\xi u_{\gamma_1}$, …, $z_7 = \pm\xi u_{\gamma_7}$. Действительно, в этом случае $x_{\beta_i}(z_i)$ и $x_{\beta_j}(z_j)$ прибавляют $\pm\xi u_{\gamma_i} u_{\gamma_j}$ и $\pm\xi u_{\gamma_j} u_{\gamma_i}$ к $u_{\gamma_{ij}}$.

Знаки тоже выбираются совершенно аналогично случаю E_6. В положительном базисе Шевалле для системы E_8, который дает кристаллический базис $V = U_8/[U_8, U_8]$, см. [68], Теорема 1, эти знаки фиксируются следующим образом:

$$z=x_{\beta_1}(\xi u_{\gamma_1})x_{\beta_2}(\xi u_{\gamma_2})x_{\beta_3}(\xi u_{\gamma_3})x_{\beta_4}(\xi u_{\gamma_4})x_{\beta_5}(\xi u_{\gamma_5})x_{\beta_6}(\xi u_{\gamma_6})x_{\beta_7}(-\xi u_{\gamma_7}).$$

Теперь непосредственное вычисление, основанное на Теореме 2 работы [68], показывает, что для этого случая для всех
$1 \leqslant i \neq j \leqslant 7$ выполняется аналог (4). Таким образом, вклады $x_{\beta_i}(z_i)$ в $x_{\beta_j}(z_j)$ в $u_{\gamma_{ij}}$ сокращаются.

Остается проверить, что z не меняет $u_{\gamma_i^*}$. В действительности, умножение на z прибавляет к $u_{\gamma_i^*}$ следующую сумму:

$$\xi(N_{\beta_1,\gamma_{i1}^*}u_{\gamma_1}u_{\gamma_1^*}+\ldots+\widehat{N_{\beta_i,\gamma_{ii}^*}u_{\gamma_i}}u_{\gamma_{ii}^*}+\ldots+N_{\beta_6,\gamma_{i6}^*}u_{\gamma_6}u_{\gamma_{i6}^*}-N_{\beta_7,\gamma_{i7}^*}u_{\gamma_7}u_{\gamma_{i7}^*}),$$

где i-е слагаемое опущено. Снова, как проверено в [68], для сингулярного столбца эти суммы как раз и являются левыми частями уравнений на его компоненты, и, тем самым, действительно обращаются в 0.

§6. D_5-доказательство для E_6, D_6-доказательство для E_7 и D_8-доказательство для E_8

В настоящем параграфе мы приведем некоторые детали, относящиеся к разложению унипотентов для исключительных групп типов E_6, E_7 и E_8 в присоединенных представлениях. Это доказательство было анонсировано в [12] и, с несколько большим количеством деталей, в [66], [70]. Однако, как и в предыдущем параграфе, приведенное там доказательство зависело от явных компьютерных вычислений. Доказательства, которые могут быть в принципе проверены человеком, записаны гораздо позже [8], [9].

1. D_5-доказательство для E_6. Рассмотрим присоединенное представление группы $G(\mathrm{E}_6, R)$, весами которого являются 72 корня системы E_6 и шесть нулевых весов $\widehat{\alpha}_1, \ldots, \widehat{\alpha}_l$, отвечающих фиксированному выбору системы простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$.

Элементы корневого типа, стабилизирующие столбец, строятся в терминах подмножеств, сопряженных со следующим восьмиэлементным множеством:

$$\beta_1 = \begin{smallmatrix}12321\\2\end{smallmatrix}, \qquad \beta_2 = \begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix}, \qquad \beta_3 = \begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix}, \qquad \beta_4 = \begin{smallmatrix}11221\\1\end{smallmatrix},$$

$$\beta_{-4} = \begin{smallmatrix}12211\\1\end{smallmatrix}, \qquad \beta_{-3} = \begin{smallmatrix}11211\\1\end{smallmatrix}, \qquad \beta_{-2} = \begin{smallmatrix}11111\\1\end{smallmatrix}, \qquad \beta_{-1} = \begin{smallmatrix}11111\\0\end{smallmatrix}.$$

В дальнейшем это множество обозначается через B; заметим, что оно старше всех своих сопряженных. Это множество обладает следующим свойством: корень β_i ортогонален к β_{-i} и образует угол $\pi/3$ со всеми корнями β_j, $j \neq \pm i$.

Для того, чтобы произведение

$$z = x_{\beta_1}(z_1)x_{\beta_2}(z_2)\dots x_{\beta_{-2}}(z_{-2})x_{\beta_{-1}}(z_{-1})$$

являлось элементом корневого типа, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $z_1, \dots, z_{-1} \in R$ лежали на квадрике в восьмимерном аффинном пространстве, задаваемой уравнением

$$z_1 z_{-1} \pm z_2 z_{-2} \pm z_3 z_{-3} \pm z_4 z_{-4} = 0;$$

знаки левой части будут уточнены в дальнейшем. Опишем действие элемента z.

Множество B естественно интерпретировать как множество весов векторного представления группы Шевалле $G(\Delta, R)$ типа D_4, для вложения $\Delta = \langle \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle \subseteq \mathrm{E}_6$. Как известно, все внешние автоморфизмы системы D_4 реализуются уже в $W(\mathrm{F}_4)$ – и, разумеется, тем более в $W(\mathrm{E}_6)$ – этот феномен известен под именем **тройственности**. Тем самым, в E_6 можно найти также полуспинорные представления $G(\Delta, R)$.

Предъявим их. В качестве старшего веса $\overline{\omega}_3(\Delta)$ *нечетного* полуспинорного представления можно взять корень

$$\gamma_{+++-} = \gamma = e_0 + e_3 + e_4 + e_5.$$

Тогда старший вес $\overline{\omega}_5(\Delta)$ контрагредиентного к нему представления, т.е. *четного* полуспинорного представления, можно отождествить с $\gamma_{++++} = \gamma^* = e_0 + e_1 + e_5 + e_6$. Все остальные веса представления со старшим весом γ имеют вид:

$$\gamma_{+++-} = \substack{12210\\1}, \quad \gamma_{++-+} = \substack{11210\\1}, \quad \gamma_{+-++} = \substack{11110\\1}, \quad \gamma_{+---} = \substack{11100\\1},$$

$$\gamma_{-+++} = \substack{11110\\0}, \quad \gamma_{-+--} = \substack{11100\\0}, \quad \gamma_{--+-} = \substack{11000\\0}, \quad \gamma_{---+} = \substack{10000\\0}.$$

Это множество корней в дальнейшем будет обозначаться через Γ. Тогда Γ^* состоит из следующих корней:

$$\gamma_{++++} = \substack{01221\\1}, \quad \gamma_{++--} = \substack{01211\\1}, \quad \gamma_{+-+-} = \substack{01111\\1}, \quad \gamma_{+--+} = \substack{00111\\1},$$

$$\gamma_{-++-} = \substack{01111\\0}, \quad \gamma_{-+-+} = \substack{00111\\0}, \quad \gamma_{--++} = \substack{00011\\0}, \quad \gamma_{----} = \substack{00001\\0}.$$

При этом инволюция Вейля E_6 действует точно так же, как в D_4, т.е. меняет последний знак в индексе.

Таким образом, E_6 представляется в виде непересекающегося объединения

$$E_6 = B \sqcup \Gamma \sqcup \Gamma^* \sqcup \Delta \sqcup -\Gamma^* \sqcup -\Gamma \sqcup -B$$

системы корней $\Delta = D_4$ и шести *специальных* множеств $B, \dots, -B$.

Непосредственное вычисление показывает, что

• $\beta_i - \beta_j \in \Phi$ в том и только том случае, когда $i \neq \pm j$. В этом случае автоматически $\beta_i - \beta_j \in \Delta$. При этом $\beta_i - \beta_j = \beta_{-j} - \beta_{-i}$ и $\beta_i - \beta_j \neq \beta_h - \beta_k$, если $(i,j) \neq (-k,-h)$.

• Для каждого $\beta_i \in B$ существует ровно 4 корня $\gamma \in \Gamma$ таких, что разность $\beta_i - \gamma$ является корнем. Это в точности те корни $\gamma = \gamma_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}$, для которых $\varepsilon_{|i|} = \mathrm{sign}(i)$. В этом случае разность автоматически попадает в Γ^*. Аналогично для B и Γ^*.

• Первый пункт можно еще сформулировать следующим образом. Для каждого корня $\beta_i \in B$ найдется ровно 6 корней $\alpha \in \Delta$ таких, что $\beta_i + \alpha \in B$.

• Сумма двух корней из B или корня из B с корнем из $\Gamma \cup \Gamma^*$ никогда не является корнем. Для каждого $\beta_i \in B$ существует ровно 6 корней $\alpha \in \Delta$ таких, что $\alpha + \beta_i \in B$.

• Кроме того, конечно, умножение на $x_\beta(\xi)$ затрагивает нулевой вес, прибавляя $e_{-\beta}$ к h_β и h_α к e_α.

Это полностью описывает действие z на произвольном столбце $u = (u_\lambda) \in V$ с точностью до знаков. Знаки можно уточнить следующим образом. Положим

$$c(j)_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \pm j, \\ -N_{\beta_j,-\beta_i} N_{\beta_{-j},-\beta_{-i}}, & \text{если } i \neq \pm j. \end{cases}$$

Несложное, хотя и несколько занудливое вычисление, использующее соотношение 2-коцикла для структурных констант [69], [8], показывает, что с точностью до одновременной замены знака эти коэффициенты не зависят от выбора j. Определим теперь z формулой

$$z = x_{\beta_1}(c(j)_1 \xi u_{-\beta_{-1}}) x_{\beta_2}(c(j)_2 \xi u_{-\beta_{-2}}) \\ \dots x_{\beta_{-2}}(c(j)_{-2} \xi u_{-\beta_2}) x_{\beta_{-1}}(c(j)_{-1} \xi u_{-\beta_1}),$$

где множитель $\xi \in R$ произволен. Заметим, что для произвольного столбца $u = (u_\lambda)$ этот элемент, вообще говоря, не является корневым унипотентом. Ясно, что $(zu)_\alpha = u_\alpha$ для всех $\alpha \in -\mathrm{B} \cup -\Gamma \cup -\Gamma^*$, а в силу нашего выбора знаков слагаемые прибавления, осуществляемые x_{β_i} и $x_{\beta_{-j}}$, к компоненте столбца u в позиции $\alpha = \beta_i - \beta_j = \beta_{-j} - \beta_{-i}$ сокращаются. После этого у нас не остается никакой дальнейшей свободы в выборе коэффициентов z_i. Тем самым, для того, чтобы проверить, что и все остальные компоненты не меняются, необходимо пользоваться уравнениями на столбец. Например, сумма

$$h = h_{\beta_i} + h_{\beta_{-i}} = \begin{matrix} 23432 \\ 2 \end{matrix}$$

кокорней h_{β_i} и $h_{\beta_{-i}}$ не зависит от выбора i. Тем самым, элемент картановской подалгебры, добавляемый к u при умножении на z равен 0 в силу уравнения

$$u_{-\beta_1} u_{-\beta_{-1}} \pm u_{-\beta_2} u_{-\beta_{-2}} \pm u_{-\beta_3} u_{-\beta_{-3}} \pm u_{-\beta_4} u_{-\beta_{-4}} = 0.$$

Кстати, именно это уравнение гарантирует, что z – элемент корневого типа. Доказательство того, что не изменятся компоненты u_γ с координатами из $\Gamma \cup \Gamma^*$, совершенно аналогично, но вот проверка того, что не меняются и компоненты u_β, где $\beta \in \mathrm{B}$, гораздо серьезнее. Во-первых, к этим компонентам добавляются как линейные по ξ слагаемые, так и квадратичные. Квадратичные слагаемые сокращаются по обычной причине, в действительности, сокращение квадратичных слагаемых следует из того же уравнения, что и сокращение слагаемого в картановской подалгебре. Но вот сокращение линейных по ξ слагаемых в u_β требует использования другого типа уравнений, включающих компоненты вектора с нулевыми весами! Причем опять необходимо проследить, что совпадает не только форма, но и знаки этих уравнений! Это не совсем банальное вычисление проведено в [9].

2. D_6-доказательство для E_7 и D_8-доказательство для E_8. Доказательство для этих случаев аналогично случаю E_6, но несколько сложнее технически. В обоих случаях элемент корневого типа z, стабилизирующий столбец, строится по той же формуле, что для E_6, с тем же выбором знаков в терминах структурных констант, но множество B выглядит по-разному.

А именно, для E_7 используется следующее 10-элементное множество B:

$$\beta_1=\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_2=\begin{smallmatrix}1&3&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_3=\begin{smallmatrix}1&2&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_4=\begin{smallmatrix}1&2&3&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_5=\begin{smallmatrix}1&2&3&2&2&1\\&&2\end{smallmatrix},$$

$$\beta_{-5}=\begin{smallmatrix}1&2&3&3&2&1\\&&1\end{smallmatrix},\quad \beta_{-4}=\begin{smallmatrix}1&2&3&2&2&1\\&&1\end{smallmatrix},\quad \beta_{-3}=\begin{smallmatrix}1&2&2&2&2&1\\&&1\end{smallmatrix},\quad \beta_{-2}=\begin{smallmatrix}1&1&2&2&2&1\\&&1\end{smallmatrix},\quad \beta_{-1}=\begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&1\\&&1\end{smallmatrix}.$$

В случае же E_8 элементы корневого типа, стабилизирующие столбец, строятся в терминах следующего 14-элементного множества B:

$$\beta_1=\begin{smallmatrix}2&4&6&5&4&3&2\\&&3\end{smallmatrix},\quad \beta_2=\begin{smallmatrix}2&4&6&5&4&3&1\\&&3\end{smallmatrix},\quad \beta_3=\begin{smallmatrix}2&4&6&5&4&2&1\\&&3\end{smallmatrix},\quad \beta_4=\begin{smallmatrix}2&4&6&5&3&2&1\\&&3\end{smallmatrix},$$

$$\beta_5=\begin{smallmatrix}2&4&6&4&3&2&1\\&&3\end{smallmatrix},\quad \beta_6=\begin{smallmatrix}2&4&5&4&3&2&1\\&&3\end{smallmatrix},\quad \beta_7=\begin{smallmatrix}2&3&5&4&3&2&1\\&&3\end{smallmatrix},$$

$$\beta_{-7}=\begin{smallmatrix}2&4&5&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_{-6}=\begin{smallmatrix}2&3&5&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_{-5}=\begin{smallmatrix}2&3&4&4&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},$$

$$\beta_{-4}=\begin{smallmatrix}2&3&4&3&3&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_{-3}=\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&2&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_{-2}=\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&1\\&&2\end{smallmatrix},\quad \beta_{-1}=\begin{smallmatrix}2&3&4&3&2&1&0\\&&2\end{smallmatrix}.$$

§7. A_2-доказательства для E_6 и E_7

Здесь мы приведем конспект A_2-доказательства в микровесовых представлениях групп типов E_6 и E_7. Сформулируем, прежде всего, несколько вспомогательных утверждений. Их доказательства абсолютно стандартны, поэтому ограничимся несколькими замечаниями; все детали вычислений можно найти в [10].

Предложение 1. *Если $[g, x_\alpha(1)] = 1$, то g лежит в собственной параболической подгруппе типа P_2 для E_6 или P_1 для E_7.*

Предложение 2. *Если коммутатор $[g, x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)]$ централен, то он равен 1.*

Предложение 3. *Если H содержит нецентральный элемент, лежащий в собственной параболической подгруппе P, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Предложение 4. *Если $x = x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)$ стабилизирует какой-то столбец матрицы $g \in H$, но не коммутирует с g, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. Это значит, что $z = [g, x] \in H$ лежит в параболической подгруппе типа P_1 в E_6 или типа P_7 в E_7. Так как x

не коммутирует с g, то по Предложению 2 элемент z нецентрален. Теперь H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент по Предложению 3.

Следующее наблюдение воплощает самую суть настоящего доказательства, по сравнению с работами [66], [68].

Основная лемма. *Зафиксируем два веса $\lambda, \sigma \in \Lambda$. Если $g \in H$ – нецентральный элемент такой, что $g'_{\rho\sigma} = 0$ для всех $\rho \in \Lambda$, $d(\lambda, \rho) = 2$, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент.*

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

• Возьмем два различных веса $\mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $d(\lambda, \mu) = d(\lambda, \nu) = 1$, рассмотрим корневой элемент

$$x = x(\mu, \nu) = x_\alpha(g'_{\nu\sigma}) x_\beta(-g'_{\mu\sigma}),$$

где $\alpha = \lambda - \mu$, $\beta = \lambda - \nu$, и образуем коммутатор $z = z(\mu, \nu) = [g, x]$. Так как $\rho + \alpha \in \Lambda$, $\rho \neq \mu$, то $d(\lambda, \rho) = 2$, а так как $\rho + \beta \in \Lambda$, $\rho \neq \nu$, то $d(\lambda, \rho) = 2$. С другой стороны, по условию $g'_{\rho\sigma} = 0$ для всех $\rho \in \Lambda$, $d(\lambda, \rho) = 2$. Это значит, что $(xg^{-1})_{*\sigma} = g^{-1}_{*\sigma}$ и поэтому $(gx_\alpha(1)g^{-1})_{*\sigma} = v^\sigma$. Легко видеть, что условия $\sigma - \alpha, \sigma - \beta \in \Lambda$ и $d(\sigma, \lambda) = d(\sigma, \mu) = 1$ влекут $\sigma + \alpha, \sigma + b \notin \Lambda$, так что $z_{*\sigma} = v^\sigma$.

• Таким образом, достаточно ограничиться случаем, когда *все* элементы $z = z(\mu, \nu)$, получающиеся при варьировании весов μ, ν в предшествующем рассуждении, центральны. Если z централен, то по Предложению 2 он равен e, так что g, и вместе с ним g^{-1}, коммутирует со всеми $x = x(\mu, \nu)$. Возьмем произвольный вес ρ такой, что $d(\rho, \lambda) = 1$ и $d(\rho, \mu), \delta(\rho, \nu) \leqslant 1$. Сравнивая элементы матриц xg^{-1} и $g^{-1}x$ в позициях (ρ, μ) и (ρ, ν), мы видим, что $g'_{\rho\sigma} g'_{\mu\sigma}, g'_{\rho\sigma} g'_{\nu\sigma} = 0$. Варьируя здесь ν, получаем равенство $g'_{\rho\sigma} g'_{\mu\sigma} = 0$ для всех ρ таких, что $d(\rho, \lambda) = d(\rho, \mu) = 1$.

• Теперь возьмем произвольный вес τ на расстоянии 1 от λ. Для любого веса ρ, рассмотренного во втором шаге, имеем $x_\gamma(g'_{\mu\sigma}) g'_{*\sigma} = g'_{*\sigma}$, где $\gamma = \lambda - \rho$. Из Предложения 4 вытекает следующая альтернатива: либо H содержит нетривиальный корневой элемент, либо матрица g^{-1} коммутирует со всеми $x = x_\gamma(g'_{\mu\sigma})$. Сравнивая элементы матриц xg^{-1} и $g^{-1}x$ в позициях (τ, μ), мы видим, что, кроме того, $g'_{\tau\sigma} g'_{\mu\sigma} = 0$ для таких τ, что $d(\tau, \mu) = 2$.

Иными словами, если A – идеал кольца R, порожденный элементами $g'_{\mu\sigma}$, $\mu \neq \lambda$, то $A^2 = 0$. Редукция по модулю A показывает, что $g_{\mu\sigma} \in A$ для всех $\mu \neq \lambda$.

• Остается рассмотреть коммутатор $z = [g, x_\alpha(1)]$. Как и в первом шаге, столбец $v = x_\alpha(1)g^{-1}_{*\lambda}$ отличается от столбца $g^{-1}_{*\lambda}$ только координатой $v_\lambda = g'_{\lambda\lambda} + g'_{\mu\lambda}$ с номером λ, все остальные координаты у них одинаковые. В силу второго и третьего шагов это означает, что $gxg^{-1}_{*\lambda}$ пропорционально базисному вектору v^λ, так что z попадает в собственную параболическую подгруппу типа P_1 или, соответственно, P_7. Теперь по Предложению 3 мы приходим к следующей альтернативе: либо H содержит нетривиальный корневой элемент, либо z центральный. Но если z центральный, то по Предложению 2 он равен e, и тогда по Предложению 1 сам элемент g сидит в собственной параболической подгруппе типа P_2 или P_1, соответственно, так что мы можем снова сослаться на Предложение 3.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство стандартного описания в случаях $E(\Phi, R)$, $\Phi = E_6, E_7$.

Доказательство из Книги. Пусть H – нецентральная подгруппа в $G = G(\Phi, R)$, $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$, нормализуемая элементарной подгруппой. Выберем нецентральный элемент $g \in H$, возьмем *произвольный* корень $\alpha \in \Phi$ и рассмотрим коммутатор $z = [g, x_\alpha(1)] \in H$. Если z центральный, то по Предложениям 2–4 подгруппа H содержит нецентральный корневой элемент. Тогда, заменяя, если нужно, g на $[g, x_\alpha(1)] = (gx_\alpha(1)g^{-1})x_\alpha(-1)$, мы можем с самого начала предполагать, что $g \in H$ – нецентральный элемент следующего вида: произведение корневого унипотента на элементарный корневой унипотент.

Такой элемент g отличается от корневого унипотента не более чем в 6 или, соответственно, в 12 столбцах. Это показывает, что по крайней мере 21 или, соответственно, 44 столбца матрицы g удовлетворяют условиям основной леммы. Таким образом, H содержит нетривиальный корневой унипотент. В силу редукции уровня этого достаточно для доказательства стандартного описания.

§ 8. A_2-доказательство для ${}^2\mathrm{E}_6$ и F_4

Снова мы ограничимся канвой доказательства, все детали которого проверены в [11]. В этом случае формулировка основной леммы почти дословно совпадает с основной леммой работы [10], доказанной в предыдущем параграфе. Однако теперь ее доказательство *заметно* тоньше и труднее. Дело в том, что рассуждения предыдущего параграфа буквально переносятся только на случай *длинных* корней в F_4 и, значит, в нашем распоряжении оказывается ровно в три раза меньше прибавлений, чем раньше, а именно 24 вместо 72. В результате этого вместо достаточно общих рассуждений, апеллирующих только к вейлевским орбитам и расстояниям между весами, теперь мы должны снова, как в §§5, 6 абсолютно конкретно отслеживать возникающие прибавления на весовой диаграмме. То, что такое доказательство можно довести до конца в случае E_6, было лишь слегка удивительно, но то, что в этом доказательстве можно обойтись только длинными корневыми элементами из F_4, уже *абсолютно* сверхестественно. Мы рассматриваем F_4 и ${}^2\mathrm{E}_6$ действующими на ограничении 27-мерного представления E_6. Тот факт, что это представление приводимо, не играет для нас никакой особой роли. Чтобы не обсуждать тонкости, связанные с инволюцией на кольце R, и не усложнять формулы, ограничимся группой F_4; подробности, касающиеся случая ${}^2\mathrm{E}_6$, можно найти в [11]. Для единообразия мы продолжаем нумеровать веса не натуральными числами, а корнями системы E_7.

Ясно, что все вспомогательные результаты предыдущего параграфа зависят только от таких общих соображений, как совершенность рассматриваемых групп, наличие в них подгрупп типа A_2, состоящих из длинных корней, и т.д. Таким образом, все они моментально обобщаются на случаи F_4 и ${}^2\mathrm{E}_6$. Ограничимся поэтому только доказательством основной леммы, которая на этот раз совершенно не вытекает из общих соображений.

Основная лемма. *Зафиксируем два веса $\lambda,\sigma\in\Lambda$. Если $g\in H$ – нецентральный элемент такой, что $g'_{\rho\sigma}=0$ для всех $\rho\in\Lambda$, $d(\lambda,\rho)=2$, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент.*

Доказательство. Доказательство начинается так же, как в случае E_6. Разумеется, теперь многие вычисления проходят только для длинных корней, и нам будет удобно ввести для множества всех длинных корней системы Φ специальное обозначение Φ_l.

• Рассмотрим любые два различных веса $\mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $\lambda - \mu \in \Phi_l$, $\lambda - \nu \in \Phi_l$, и введем корневой элемент

$$x(\mu, \nu) = x_\alpha(g'_{\nu\lambda}) x_\beta(g'_{\mu\lambda}),$$

где $\alpha = \lambda - \mu$, $\beta = \lambda - \nu$. Тогда

$$(g^{-1}x)_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\nu\lambda} g'_{\rho,\sigma+\alpha} \pm g'_{\mu\lambda}(g'_{\rho,\sigma+\beta} \pm g'_{\nu\lambda} g'_{\rho,\sigma+\beta+\alpha}),$$

$$(xg^{-1})_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\alpha,\sigma} \pm g'_{\nu\lambda}(g'_{\rho-\beta,\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\beta-\alpha,\sigma}).$$

Отметим, что, если $\lambda - \rho \in \Phi$, $\alpha \in \Phi_l$, и $\rho - \alpha \in \Lambda$, то $d(\lambda, \rho - \alpha) = 2$. Таким образом, $(g^{-1}x)_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$ и, значит, $[g, x]_{*\lambda} = v^\lambda$. Если хотя бы один из этих элементов нецентрален, то мы попали в собственную параболическую подгруппу, и можно воспользоваться parabolic reduction. А именно, подходящие аналоги предложений 3 и 4 предыдущего параграфа дадут нам нетривиальный корневой унипотент.

• Таким образом, в дальнейшем мы можем ограничиться случаем, когда все такие z центральны. Подходящий аналог предложения 2 показывает, что тогда все они равны e. Иными словами, в этом случае g^{-1} коммутирует со всеми $x(\mu\nu)$. Заменяя в равенствах предыдущего пункта σ на μ, мы видим, что $g'_{\rho\lambda} g'_{\mu\lambda} = 0$ для всех пар весов $\rho, \mu \in \Lambda$, обладающих следующим свойством: существует вес $\nu \in \Lambda$ такой, что $\alpha = \lambda - \mu \in \Phi_l$, $\beta = \lambda - \nu \in \Phi_l$, причем $\mu + \beta, \rho - \alpha, \rho - \alpha \notin \Lambda$.

Теперь прямые вычисления показывают, что условия $[g^{-1}, x(\mu, \nu)] = e$ выражаются следующими равенствами:

$g'_{122\underset{2}{3}211,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 112\underset{1}{3}211,\ 112\underset{1}{3}221,\ 112\underset{1}{2}211,\ 111\underset{1}{2}221,\ 101\underset{0}{1}111,$

$g'_{112\underset{1}{3}211,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 122\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{3}221,\ 112\underset{1}{2}211,\ 111\underset{1}{2}221,\ 111\underset{1}{1}111,$

$g'_{112\underset{1}{2}211,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 123\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{3}221,\ 112\underset{1}{3}221,\ 111\underset{1}{2}221,\ 111\underset{1}{2}111,$

$g'_{111\underset{1}{2}111,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 123\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{3}321,\ 112\underset{1}{3}211,\ 112\underset{1}{2}211,\ 112\underset{1}{2}211,$

$g'_{111\underset{1}{1}111,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 123\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{4}321,\ 112\underset{1}{3}211,\ 112\underset{1}{3}221,\ 112\underset{1}{3}211,$

$g'_{101\underset{0}{1}111,\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0, \quad \rho \neq 123\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{4}321,\ 122\underset{2}{3}321,\ 122\underset{2}{3}221,\ 122\underset{2}{3}211,.$

• Чтобы получить остальные уравнения, мы будем действовать следующим образом. Пользуясь полученными в предыдущем пункте уравнениями на g^{-1}, мы подберем такие элементарные корневые унипотенты $x_\gamma(\xi)$, что $(x_\gamma(\xi) g^{-1})_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$. После этого мы сможем обычным образом заключить, что g коммутирует с $x_\gamma(\xi)$, и получить новые уравнения на g^{-1}. С помощью этих новых уравнений мы сможем построить новые корневые унипотенты, стабилизирующие первый столбец g^{-1}, и продолжать действовать таким образом до полного удовлетворения.

Положив $\xi = g'_{\mu\lambda}$ для такого μ, что $\lambda - \mu \in \Phi_l$, видим, что условие стабилизации первого столбца эквивалентно условию

$$g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\gamma,\lambda} = 0, \qquad \rho \in \Lambda.$$

Итак, мы ищем такое γ, что для каждого веса ρ выполняется $\rho-\gamma \notin \Lambda$, $d(\rho-\gamma, \lambda) = 2$, или же уже доказано, что $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\gamma,\lambda} = 0$. Если мы найденм такое γ, то либо H уже содержит нетривиальный корневой элемент, либо g коммутирует с $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$. В последнем случае

$$g'_{\tau\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\tau-\gamma,\sigma} = (x_\gamma(g'_{\mu\lambda})g^{-1})_{\tau\sigma} = (g^{-1}x_\gamma(g'_{\mu\lambda}))_{\tau\sigma} = g'_{\tau\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\tau,\sigma+\gamma}.$$

Следовательно, $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0$ для всех таких $\mu, \rho \in \Lambda$, что существует такое $\gamma \in \Phi$, что $\rho-\gamma \notin \Lambda$, $l-\gamma \in \Lambda$, и для каждого веса ρ корень γ удовлетворяет одному из сформулированных выше условий.

Сейчас мы перечислим те корни, которые нужно рассмотреть для получения тех уравнений, которые не получаются из вычислений предыдущего пункта. Обратите внимание, что порядок вычислений имеет значение: вообще говоря, мы используем уравнения, полученные на каждом шаге, для того, чтобы быть в состоянии произвести следующий. Именно поэтому некоторые корни появляются в доказательстве более одного раза.

$$\begin{array}{ll}
0001 & g'_{\substack{1223211\\2},\lambda} g'_{\substack{1123321\\1},\lambda} = 0, \quad g'_{\substack{1123211\\1},\lambda} g'_{\substack{1224321\\2},\lambda} = 0, \\
 & g'_{\substack{1112111\\1},\lambda} g'_{\substack{1123321\\1},\lambda} = 0; \\
0011 & g'_{\substack{1223211\\2},\lambda} g'_{\substack{1123221\\1},\lambda} = 0, \quad g'_{\substack{1123211\\1},\lambda} g'_{\substack{1223221\\2},\lambda} = 0, \\
 & g'_{\substack{1112111\\1},\lambda} g'_{\substack{1234321\\2},\lambda} = 0; \\
0111 & g'_{\substack{1122211\\1},\lambda} g'_{\substack{1234321\\2},\lambda} = 0, \quad g'_{\substack{1122211\\1},\lambda} g'_{\substack{1223221\\2},\lambda} = 0, \\
 & g'_{\substack{1111111\\1},\lambda} g'_{\substack{1234321\\2},\lambda} = 0; \quad g'_{\substack{1223211\\2},\lambda} g'_{\substack{1122211\\1},\lambda} = 0,
\end{array}$$

0001 $g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}g'_{\substack{1224321\\2},\lambda}=0;$

1111 $g'_{\substack{1123211\\1},\lambda}g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}g'_{\substack{1123221\\1},\lambda}=0,$

$g'_{\substack{1011111\\0},\lambda}g'_{\substack{1223321\\2},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1011111\\0},\lambda}g'_{\substack{1234321\\2},\lambda}=0;$

1120 $g'_{\substack{1223211\\2},\lambda}g'_{\substack{1112221\\1},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1111111\\1},\lambda}g'_{\substack{1224321\\2},\lambda}=0,$

$g'_{\substack{1112111\\1},\lambda}g'_{\substack{1223321\\2},\lambda}=0;$

1222 $g'_{\substack{1123211\\1},\lambda}g'_{\substack{1111111\\1},\lambda}=0;$

1121 $g'_{\substack{1123211\\1},\lambda}g'_{\substack{1112221\\1},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1011111\\0},\lambda}g'_{\substack{1224321\\2},\lambda}=0;$

1220 $g'_{\substack{1111111\\1},\lambda}g'_{\substack{1123211\\1},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1112111\\1},\lambda}g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}=0;$

0001 $g'_{\substack{1112111\\1},\lambda}g'_{\substack{1123321\\1},\lambda}=0;$

1111 $g'_{\substack{1112111\\1},\lambda}g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}=0;$

1221 $g'_{\substack{1223211\\2},\lambda}g'_{\substack{1011111\\0},\lambda}=0,\quad g'_{\substack{1111111\\1},\lambda}g'_{\substack{1123321\\1},\lambda}=0,$

$g'_{\substack{1111111\\1},\lambda}g'_{\substack{1123221\\1},\lambda}=0;$

0011 $g'_{\substack{1011111\\0},\lambda}g'_{\substack{1223221\\2},\lambda}=0;$

1120 $g'_{\substack{1122211\\1},\lambda}g'_{\substack{1112221\\1},\lambda}=0.$

• Таким образом, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho\lambda}=0$ для всякого $\rho,\mu\in\Lambda$, $\lambda-\mu\in\Phi_l$. Чтобы рассмотреть остальные случаи, достаточно заметить, что мы могли заменить ξ в выражении $(x_\gamma(\xi)g^{-1})_{*\lambda}=g^{-1}_{*\lambda}$ на $g'_{\mu\lambda}$ для любого μ. Если $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\lambda}=0$ для всех весов $\rho\in\Lambda$, то умножение на $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$ стабилизирует первый столбец матрицы g^{-1}. Заменяя σ на $\lambda-\gamma$, мы получим уравнение $g'_{\mu\lambda}g'_{\sigma\lambda}=0$ для всех пар весов μ, σ, для которых найдется такой корень γ, что $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$ стабилизирует первый столбец, причем $\tau-\gamma\notin\Lambda$, и $\lambda-\gamma\in\Lambda$. Такой корень γ легко найти для каждой пары весов. Мы можем взять почти любой $\gamma\in\Phi_l$ со свойством $\tau-\gamma\notin\Lambda$. Для такого γ первый столбец g^{-1} автоматически стабилизируется в силу доказанных в предыдущем пункте уравнений. Нужно лишь проследить за тем, чтобы вес $\rho-\gamma$ был отличен от $\begin{smallmatrix}122111\\1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}112211\\1\end{smallmatrix}$.

• Итак, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda}g'_{\nu\lambda}=0$ для всех $\mu,\nu\in\Lambda$. Иными словами, если A — идеал в R, порождённый элементами $g'_{\mu\lambda}$, $\mu\neq\lambda$, то $A^2=0$. Кроме того, редукция по модулю A показывает, что и $g_{\mu\lambda}\in A$ для всех $\mu\neq\lambda$.

Осталось рассмотреть коммутатор $z=[g,x_\alpha(1)]$, $\alpha\in\Phi_l$. Столбец $v=x_\alpha(1)g^{-1}_{*\lambda}$ отличается от $g^{-1}_{*\lambda}$ только тем, что $v_l=g'_{\lambda\lambda}+g'_{\mu\lambda}$, все остальные элементы совпадают. Это значит, что $gxg^{-1}_{*\lambda}$ пропорционален базисному столбцу v^λ, и z лежит в параболической подгруппе типа P_1. Теперь либо z нецентрален, и мы можем воспользоваться parabolic reduction, либо z централен, но тогда по подходящему аналогу предложения 1 предыдущего параграфа сам g лежит в собственной параболической подгруппе, и мы снова можем воспользоваться parabolic reduction. В каждом из этих случаев H содержит нетривиальный корневой унипотент.

С учетом этой новой основной леммы Доказательство из Книги для случая F_4 заканчивается точно так же, как для случая E_6.

§9. Сравнение Доказательства из Книги с разложением унипотентов

Отметим несколько принципиальных моментов.

• Оно опирается лишь на вложения $\mathrm{A}_2\subseteq\mathrm{F}_4,\mathrm{E}_6,\mathrm{E}_7$.

• Как и разложение унипотентов, оно не опирается на результаты в размерности 0, в том числе и относящиеся к случаю поля. В действительности, наши доказательства дают, *в частности*, новое доказательства теоремы простоты Шевалле [18], [35] для типов $\mathrm{F}_4,\mathrm{E}_6$ и E_7.

• Как и разложение унипотентов, оно не опирается на результаты Абе и Судзуки [22], [27] о факторизации по радикалу.

• В отличие от разложения унипотентов, в нем не используется *никакой* информации о структурных константах действия.

• В отличие от разложения унипотентов, в нем не используется ни информация о знаках, ни явная форма уравнений на орбиту вектора старшего веса. В действительности, *единственная* ссылка на уравнения происходит в следующей форме: в любом элементе x алгебры Ли $x_{\lambda\mu} = 0$ для тех весов $\lambda \neq \mu$, разность которых не является корнем.

• Это доказательство отвечает существу задачи и может служить образцом для множества дальнейших обобщений.

• Оно окончательно стирает различие между классическими и исключительными случаями и показывает эффективность работы с матрицами для исключительных групп.

Самым существенным из всего перечисленного является, конечно, то, что это – A_2-**доказательство**.

Однако все сказанное выше совершенно не означает, что разложение унипотентов *полностью* превзойдено описанным в настоящей работе Доказательством из Книги. И вот почему:

• Во многих важных случаях (например, для микровесовых представлений) разложение унипотентов дает *явные полиномиальные формулы*, выражающие произвольный элемент корневого типа как произведение $\dim(V(\overline{\omega}_i))$ элементов корневого типа, лежащих в максимальной параболической подгруппе типа P_i.

Как хорошо известно, a formula is a formula is a formula. Применимость подобных явных формул *гораздо* шире, чем описание различных классов подгрупп. Например, в работах [54], [58] эти формулы используются для получения явных полиномиальных оценок длины коммутатора в элементарных образующих.

§ 10. What next?

Мы считаем, что изложенные в настоящей работе новые доказательства структурных теорем отражают если не новый уровень понимания, то, *по крайней мере*, новый уровень нашего технического контроля над поведением исключительных групп. Мы уверены, что использование этих соображений в дополнение к уже имеющейся технике позволит полностью перенести на исключительные группы *все* результаты, относящиеся к классическим группам, притом с теми же оценками на ранги, длины и т.д. Отметим в заключение несколько задач, которые уже были решены нами с использованием аналогичных соображений, и нерешенных задач, к которым мы собираемся вернуться в ближайшее время.

1. A_3-доказательство для E_6 и E_7. С точки зрения алгебраической K-теории рассматриваемая в настоящей работе задача об описании нормальных делителей, – это задача на уровне K_1. Она показывает уровень нашего контроля над элементарными *образующими* $x_\alpha(\xi)$ группы Шевалле $G(\Phi, R)$. Аналогичной *конкретной* задачей на уровне K_2, решение которой отражало бы уровень нашего контроля над *соотношениями* между элементарными образующими, является вопрос о центральности расширения

$$\mathrm{St}(\Phi, R) \longrightarrow G(\Phi, R),$$

или, как принято говорить, вопрос о центральности $K_2(\Phi, R)$. После публикации [10] первый автор заметил, что для случаев E_6 и E_7 приведенное там доказательство можно модифицировать с тем, чтобы найти достаточно элементов корневого типа, лежащих в элементарных подгруппах типа A_3, *одновременно* стабилизирующих *два* столбца матриц групп этих типов в минимальных представлениях. Это позволяет попасть не в максимальные, а в субмаксимальные параболические подгруппы! Напомним, что это ровно то, что нам нужно, чтобы успешно имитировать для этих случаев замечательное доказательство ван дер Каллена, известное как *another presentation* [46]. В этом доказательстве вводится модифицированная группа Стейнберга $\widetilde{\mathrm{St}}(\Phi, R)$, построенная по *всем* – а не только элементарным! – унипотентам корневого типа, и изготавливается *модель* этой группы в обычной группе Стейнберга $\mathrm{St}(\Phi, R)$. Так вот, для построения образов отдельных образующих группы $\widetilde{\mathrm{St}}(\Phi, R)$ достаточно уметь попадать в *какие-то* параболические подгруппы, но вот проверка корректности и согласованности этих определений требует большей степени свободы. Именно поэтому над коммутативным кольцом R нормальность элементарной подгруппы $E(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n, R)$ доказана при любом $n \geqslant 3$, но вот центральность расширения $\mathrm{St}(n, R) \longrightarrow E(n, R)$ доказана только при $n \geqslant 4$. Хотя концептуально подход ван дер Каллена абсолютно прозрачен, его фактическая реализация для исключительных групп связана с проведением ужасающих вычислений. Однако для случаев E_6 и E_7 первый автор надеется завершить все основные проверки в ближайшее время. Отметим, что для классических групп в контексте работы [34] – и, тем самым, в частности, для групп Шевалле типов C_l и D_l – реализация аналогичной программы была объявлена Энтони Баком и Танг Гуопингом 8 лет назад. Однако, именно в силу чудовищного размера, детали доказательств все еще не опубликованы.

В то же время приведенное в § 8 доказательство проходит на пределе человеческих сил и не оставляет никакой свободы для стабилизации второго столбца. Авторы не видят, как доказать центральность $\mathrm{K}_2(\mathrm{F}_4, R)$ на этом пути.

2. Случай E_8. Следующая задача представляется нам наиболее актуальной, и мы собираемся вернуться к ней в самое ближайшее время.

Проблема 1. *Провести A_2-доказательство для групп Шевалле типов E_8.*

Отличие случая E_8 от случаев, рассмотренных в настоящей работе, состоит в том, что у самой группы $G(\mathrm{E}_8, R)$ нет микровесовых представлений, и она не является скручиванием какой-либо группы, имеющей такие представления. Самое естественное представление для E_8 – это 248-мерное присоединенное представление. В этом случае в корневом элементе кроме слагаемого из самой алгебры Ли появляется еще *квадратичное* слагаемое, которое не позволяет буквально повторить доказательство нашей основной леммы. Тем не менее, корневой элемент все еще имеет настолько специальный вид, что, как нам кажется, слегка извернувшись, удастся провести аналогичное рассуждение. С точки зрения большинства реальных приложений совершенно не обязательно даже, чтобы это было именно A_2-доказательство. Оно может использовать элементы корневого типа в A_3, A_4 и вообще в любой неприводимой подсистеме, кроме A_8, D_8 и E_7. Если не упираться в элементы из A_2, то можно использовать в таком доказательстве большие фрагменты вычислений из D_8-доказательства, описанного в § 6, но, разумеется, стабилизировать при этом не произвольные сингулярные столбцы, а только столбцы корневого унипотента, удовлетворяющие простым дополнительным уравнениям!

3. Подгруппы нерасщепимых групп. Отметим еще одну чрезвычайно интересную задачу в таком духе, решение которой представляется нам более чем реальным с использованием методов настоящей работы.

Проблема 2. *Доказать стандартное описание нормальных подгрупп в скрученных формах групп типов* E_6 *и* E_7 *над произвольным коммутативным кольцом* R*, в предположении, что они содержат расщепимую подгруппу типа* A_2*.*

Основной принцип ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ состоит том, что для того, чтобы увидеть различие двух вещей, совпадающих по случайной причине, нужно ввести дополнительное напряжение. Чтобы полностью осознать преимущества Доказательства из Книги перед разложением унипотентов, как раз и нужно ввести такое дополнительное техническое напряжение в форме перехода от расщепимых групп к изотропным. Как мы видели в §§ 5 и 6, для исключительных типов разложение унипотентов зависит от существования расщепимых подгрупп типа A_l или D_l максимального возможного ранга, и работает *только* для групп Шевалле. В то же время, Доказательство из Книги работает для всех групп ранга $\geqslant 2$, в § 8 мы уже видели это на примере группы ${}^2\mathrm{E}_6$. Ограничение рангом $\geqslant 2$ представляется вполне разумным. Хорошо известно, что:

• Описание нормального строения анизотропных групп является *безнадежно* трудной задачей даже в случае, когда $R = K$ поле.

• Описание нормального строения групп ранга 1 явдяется *безнадежно* трудной задачей даже в случае кольца $R = \mathbb{Z}$.

Поэтому предположение, что ранг $\geqslant 2$, отвечает существу задачи. Это как раз тот случай, когда наши возможности совпадают с природой вещей.

4. Подгруппы, содержащие исключительную группу. Для классических групп вопрос, аналогичный следующей задаче, решен в цикле недавних работ первого автора и Виктора Петрова.

Проблема 3. *Описать следующие классы подгрупп:*

- *подгруппы в* $\mathrm{GL}(27, R)$*, нормализуемые* $E(\mathrm{E}_6, R)$*;*
- *подгруппы в* $\mathrm{Sp}(56, R)$*, нормализуемые* $E(\mathrm{E}_7, R)$*;*
- *подгруппы в* $G(\mathrm{E}_6, R)$*, нормализуемые* $E(\mathrm{F}_4, R)$*.*

В качестве первого шага можно было бы описать подгруппы в большей группе, содержащие меньшую. Первые важные результаты в этом направлении получены в работе Александра Лузгарева [17]. Кстати, именно эта работа побудила нас ослабить постановку задачи во втором пункте, в [10] мы предлагали описать надгруппы в $\mathrm{GL}(56, R)$, содержащие $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$, но, как видно из [17], это совсем не простая задача. Скорее всего, как и в работах первого автора и Петрова, для полного решения этих задач придется использовать комбинацию методов настоящей работы и локализационных методов.

5. Субнормальные подгруппы. Хорошо известно, что решение следующей задачи является основным шагом в описании субнормальных подгрупп группы $G(\Phi, R)$.

Проблема 4. *Описать подгруппы в $G(\Phi, R)$, нормализуемые $E(\Phi, R, A)$ для некоторого идеала $A \trianglelefteq R$.*

Стандартный ответ на эту задачу формулируется следующим образом. Для любой такой подгруппы H существует идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$E(\Phi, R, A^m I) \leqslant H \leqslant C(\Phi, R, I)$$

для некоторого m. Такой идеал I единственен с точностью до некоторого естественного отношения эквивалентности $\lozenge_A$. Наиболее важный технический аспект этой задачи состоит в нахождении *наименьшего* возможного m такого, что эти включения выполнены для всех подгрупп H. Можно надеяться, что доказательства, описанные в настоящей работе, должны дать лучшие оценки для групп типов F_4, E_6 и E_7, чем все другие известные сегодня доказательства.

6. Подгруппы, содержащие subsystem subgroup. Пусть теперь $\Delta \subseteq \Phi$ — подсистема корней в Φ. Рассмотрим вложение $G(\Delta, R) \leqslant G(\Phi, R)$. Решение следующей задачи было бы обобщением на исключительные группы большого цикла работ Зенона Боревича и Николая Вавилова о надгруппах subsystem subgroups, см. [2], [6], [7] и дальнейшие ссылки в [10], [66], [67].

Проблема 5. *Описать подгруппы в $\mathrm{G}(\Phi, R)$, нормализуемые $E(\Delta, R)$, в предположении, что $\Delta^\perp = \emptyset$ и все неприводимые компоненты Δ, кроме, быть может, одной, имеют ранг 2.*

В [67] можно найти указания относительно того, как выглядит стандартный ответ на эту задачу.

7. Дальнейшие задачи. Имеется много дальнейших важных задач таких, как описание автоморфизмов групп Шевалле $G(\Phi, R)$, как уже решенных, так и открытых, которые можно трактовать методами настоящей работы.

Литература

1. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* Мир, М. (1973).
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Труды Мат. Ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
3. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — Семинар по алгебраическим группам, М. (1973), 9–59.
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV–VI. М. (1972).
5. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–334.
6. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **299**, No. 6 (1988), 1300–1303.
7. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Труды Мат. Ин-та. АН СССР **183** (1990), 29–42.
8. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант.* — Алгебра и Анализ, в печати.
9. Н. А. Вавилов, *Разложение унипотентов в присоединенном представлении группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и Анализ, в печати.
10. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
11. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* F_4 *и* ${}^2\mathrm{E}_6$. — Алгебра и Анализ, в печати.
12. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, No. 1 (1990), 145–147.
13. И. З. Голубчик, *О полной линейной группе над ассоциативным кольцом.* — Успехи Мат. Наук **28**, No. 3 (1973), 179–180.
14. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией.* — Успехи Мат. Наук **30**, No. 6 (1975), 165.
15. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях линейных и унитарных групп над ассоциативным кольцом.* — Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей, Уфа (1985), 122–142.
16. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Мат. Сборник **106**, No. 1 (1978), 94–107.
17. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
18. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М. (1975).
19. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. дисс., Ленингр. Гос. Ун-т (1987), 1–112.

20. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов.* — Изв. АН СССР, Сер. Мат. **141**, No. 2 (1977), 235–253.
21. А. А. Суслин, В. И. Копейко, *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
22. E. Abe, *Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **21**, No. 3 (1969), 474–494.
23. E. Abe, *Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings.* — Commun. Algebra **11**, No. 12 (1983), 1271–1307.
24. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Radical Theory, Sendai (1988), 1–23.
25. E. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
26. E. Abe, J. Hurley, *Centers of Chevalley groups over commutative rings.* — Comm. Algebra **16**, No. 1 (1988), 57–74.
27. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 185–198.
28. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. dedic. **25**, No. 1–3 (1988), 417–465.
29. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms.* — Finite Geometries, Buildings and Related topics Oxford Univ. Press (1990), 75–84.
30. H. Azad, M. Barry, G. M. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups.* — Comm. Algebra. **18** (1990), 551–562.
31. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* — Thesis, Columbia Univ. (1969).
32. A. Bak, *Nonabelian* K*-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
33. A. Bak, N. Vavilov, *Normality of the elementary subgroup functors.* — Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **118**, No. 1 (1995), 35–47.
34. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, No. 2 (2000), 159–196.
35. R. Carter, *Simple groups of Lie type.* Wiley, London et al. (1972).
36. A. M. Cohen, R. H. Cushman, *Gröbner bases and standard monomial theory.* — Computational algebraic geometry, Progress in Mathematics 109, Birkhäuser (1993), 41–60.
37. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for* E_7. I. *A four form for* E_7. — J. Algebra **173** (1995), 361–389.
38. D. L. Costa, G. E. Keller, *The* $E(2,A)$ *sections of* $\mathrm{SL}(2,A)$. — Ann. Math. **134**, No. 1 (1991), 159–188.
39. D. L. Costa, G. E. Keller, *Radix redux: normal subgroups of symplectic groups.* — J. reine angew. Math. **427**. No. 1 (1991), 51–105.
40. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* G_2 *groups.* — Trans Amer. Math. Soc. **351**, No. 12 (1999), 5051–5088.
41. P. Gilkey, G. M. Seitz, *Some representations of exceptional Lie algebras.* — Geom. dedic. **25**, No. 1–3 (1988), 407–416.
42. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).

43. R. Hazrat, *Dimension theory and non-stable* K_1 *of quadratic module.* — K-theory **27** (2002), 293–327.
44. R. Hazrat, *On* K*-theory of classical-like groups.* — Doktorarbeit Uni. Bielefeld (2002), 1–62.
45. R. Hazrat, N. A. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
46. W. van der Kallen, *Another presentation for the Steinberg group.* — Proc. Nederl. Akad. Wetensch., ser. A **80**, (1977), 304–312.
47. V. Lakshmibai, C. S. Seshadri, *Standard monomial theory.* — Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Manoj Prakashan, Madras (1991), 279–323.
48. Li Fuan, *The structure of symplectic group over arbitrary commutative rings.* — Acta Math. Sinica, New Series **3**, No. 3 (1987), 247–255.
49. Li Fuan, *The structure of orthogonal groups over arbitrary commutative rings.* — Chinese Ann. Math. **10B**, No. 3 (1989), 341–350.
50. W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector.* — Proc. Amer. Math. Soc. **84**, No. 4 (1982), 605–608.
51. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér. No. 2 (1969), 1–62.
52. E. B. Plotkin, *On the stability of* K_1*-functor for Chevalley groups of type* E_7. — J. Algebra **210** (1998), 67–85.
53. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra and Computations **8**, No. 1 (1998), 61–97.
54. A. S. Sivatski, A. V. Stepanov, *On the word length of commutators in* $\mathrm{GL}_n(R)$. — K-theory **17** (1999), 295–302.
55. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, No. 4 (1971), 965–1004.
56. M. R. Stein, *Stability theorems for* K_1, K_2 *and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan J. Math. **4**, No. 1 (1978), 77–108.
57. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: a Theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
58. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *On the length of commutators in Chevalley groups.* — K-theory, to appear.
59. K. Suzuki, *Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings.* — J. Algebra **175**, No. 3 (1995), 526–536.
60. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55**, Part II (1986), 693–710.
61. L. N. Vaserstein, *On the normal subgroups of the* GL_n *of a ring.* — Springer Lecture Notes Math. **854** (1981), 454–465.
62. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **36**, No. 5 (1986), 219–230.
63. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of orthogonal groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **110**, No. 5 (1988), 955–973.
64. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of symplectic groups over rings.* — K-theory **2**, No. 5 (1989), 647–673.
65. L. N. Vaserstein, You Hong, *Normal subgroups of classical groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra **105**, No. 1 (1995), 93–106.

66. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990), World Sci. Publ., London et al. (1991), 219–335.
67. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
68. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), 1–45.
69. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type* E_l. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
70. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.
71. J. S. Wilson, *The normal and subnormal structure of general linear groups.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **71** (1972), 163–177.

Vavilov N. A., Gavrilovich M. R., Nikolenko S. I. Structure of Chevalley groups: the proof from the Book.

We describe and compare different geometric proofs of the main structure theorems for Chevalley groups over commutative rings. To warm up we sketch the known geometric proofs, published by I.Z.Golubchik, N.A.Vavilov, A.V.Stepanov and E.B.Plotkin, such as the A_2 and A_3 proofs for classical groups, A_5 and D_5 proofs for E_6; A_7 and D_6 proofs for E_7, and D_8 proof for E_8. After that we expound in more details the A_2 proofs for exceptional groups of types F_4, E_6 and E_7, based on multiple commutation. This new proof, the Proof from the Book, gives better bounds than any previously known. Moreover, unlike all previously known proofs it does not use results for fields, factorisation modulo radical, or any specific information concerning structure constants and equations defining exceptional Chevalley groups.

С.-Петербургский
государственный университет

Oxford University

Санкт-Петербургское Отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 декабря 2005 г.