Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 330, 2006 г.

Е. А. Безякина, А. И. Генералов

КОЦИКЛЫ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОГОМОЛОГИЯХ ХОХШИЛЬДА

1. Пусть A – (ассоциативная) алгебра над коммутативным кольцом k с единицей, $\Lambda = A^{\mathrm{op}} \otimes_k A$ – её обёртывающая алгебра. Всегда дополнительно предполагаем, что алгебра A проективна как k-модуль. Пусть B – (унитальная) k-подалгебра в A. Тогда $\Sigma = A^{\mathrm{op}} \otimes_k B$ можно рассматривать как k-подалгебру в Λ. Через ω_0 обозначим собственный класс коротких точных последовательностей в категории Mod-A правых A-модулей, которые расщепляются над B, и пусть ω обозначает собственный класс коротких точных последовательностей в категории Mod-Λ, расщепляющихся над Σ.

Относительные когомологии Хохшильда (с коэффициентами в A-бимодуле X) можно определить следующим образом (ср. [1]):

$$\mathrm{HH}^t(B, A, X) = \omega\,\mathrm{Ext}^t_\Lambda(A, X).$$

Для двух правых A-модулей M и N имеется изоморфизм (см. ниже предложение 5)

$$\eta\colon \omega_0\,\mathrm{Ext}^t_A(M, N) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{HH}^t(B, A, \mathrm{Hom}_k(M, N)), \qquad (1)$$

который в "абсолютном случае" (т.е. когда $B = k$) был исследован в [2]. В настоящей работе предлагается (см. теорему 6) относительная версия основного результата, полученного в [2], а именно явно описываются образы элементов группы $\omega_0\,\mathrm{Ext}^t_A(M, N)$ относительно изоморфизма η. Наше доказательство, будучи примененным к абсолютному случаю, оказывается значительно короче по сравнению с [2]. Кроме того, исправляется одна неточность в [2], связанная со знаком, имеющимся в описании указанных образов.

Второй из авторов выражает признательность за поддержку гранту РФФИ 06-01-00200.

2. Напомним (см. [1]), что категория Mod-A богата относительно проективными (а также относительно инъективными) объектами, т.е. для любого A-модуля M существует ω_0-собственная короткая точная последовательность

$$0 \to M' \to P \to M \to 0,$$

в которой P – ω_0-проективный модуль (справедливо также двойственное утверждение). Далее, элементы $\omega_0\mathrm{Ext}^t_A(M,N)$ могут быть рассмотрены как классы конгруэнтных длинных точных последовательностей, допускающих "стягивающую гомотопию" над B, т.е. являющихся произведением Йонеды ω_0-собственных коротких точных последовательностей (см. [3, гл. III, гл. IX]).

Аналогичные утверждения относятся и к категории Mod-Λ. В частности, для $n \geqslant 0$ рассмотрим правые Λ-модули

$$S_n = A^{\otimes_B (n+2)} = A \otimes_B \cdots \otimes_B A \ (n+2 \text{ множителя});$$

умножение элементов из S_n и Λ определяется следующим образом: $(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})(a' \otimes b) = aa_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}b$. Определим отображения $\nabla_n : S_{n+1} \to S_n$, так, что

$$\nabla_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+2}.$$

Пусть отображение $\nabla_{-1} : S_0 \to A$ таково, что $\nabla_{-1}(a_0 \otimes a_1) = a_0 a_1$. Тогда

$$A \xleftarrow{\nabla_{-1}} S_0 \xleftarrow{\nabla_0} S_1 \longleftarrow \cdots,$$

является ω-проективной резольвентой алгебры A (см. [1, п. 3]), которую называют относительной стандартной (бимодульной) резольвентой алгебры A. Таким образом, относительные когомологии Хохшильда можно вычислить с использованием относительной стандартной резольвенты:

$$\mathrm{HH}^t(B, A, X) = \mathrm{H}^t(\mathrm{Hom}_\Lambda(S_\bullet, X)).$$

3. Для того, чтобы построить изоморфизм η из (1), докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $E\colon 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ – *ω-собственная короткая точная последовательность в* Mod-Λ. *Тогда для любого правого A-модуля M*

$$M \otimes_A E : 0 \longrightarrow M \otimes_A X \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \alpha} M \otimes_A Y \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \beta} M \otimes_A Z \longrightarrow 0$$

– ω_0-собственная короткая точная последовательность.

Доказательство. Пусть $\rho : Z \longrightarrow Y$ – Σ-гомоморфизм такой, что $\beta \circ \rho = \mathrm{id}_Z$. Тогда $(\mathrm{id}_M \otimes \beta) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \rho) = \mathrm{id}_{M \otimes_A Z}$, и легко проверяется, что $\mathrm{id}_M \otimes \rho$ является B-гомоморфизмом. □

Лемма 2. *Пусть $E\colon 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ – короткая точная последовательность в категории* Mod-A. *Последовательность E является ω_0-собственной тогда и только тогда, когда для любого правого A-модуля M последовательность*

$$\mathrm{Hom}_k(M,E) : 0 \to \mathrm{Hom}_k(M,X) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_k(M,Y) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_k(M,Z) \to 0$$

ω-собственная.

Доказательство. Заметим, что стандартно последовательность $\mathrm{Hom}_k(M,E)$ можно рассматривать как последовательность в Mod-Λ. Если E – ω_0-собственная последовательность, то она расщепляется над k, и потому последовательность $\mathrm{Hom}_k(M,E)$ точна. Кроме того, если $\varphi\colon Z \to Y$ – B-гомоморфизм такой, что $\beta\varphi = \mathrm{id}_Z$, то непосредственно проверяется, что φ_* – Σ-гомоморфизм. Поскольку $\beta_*\varphi_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_k(M,Z)}$, то последовательность $\mathrm{Hom}_k(M,E)$ ω-собственная.

Теперь предположим, что $\mathrm{Hom}_k(M,E)$ – ω-собственная последовательность для любого модуля M. Положим $M = Z$. Пусть

$$\tau\colon \mathrm{Hom}_k(Z,Z) \to \mathrm{Hom}_k(Z,Y)$$

– Σ-гомоморфизм такой, что $\beta_*\tau = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_k(Z,Z)}$. Возьмём $\varphi := \tau(\mathrm{id}_Z) \in \mathrm{Hom}_k(Z,Y)$. Легко видеть, что на самом деле φ – B-гомоморфизм и что $\beta\varphi = \mathrm{id}_Z$. □

Лемма 3. *Если X – A-бимодуль, а Y, Z – правые A-модули, то существует естественный изоморфизм*

$$\mu\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \mathrm{Hom}_k(Y,Z)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_A(Y \otimes_A X, Z).$$

Доказательство см. в [3, гл. VI, §8].

Замечание 1. Отметим, что для $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \mathrm{Hom}_k(Y,Z))$, $x \in X$ и $y \in Y$ имеем $\mu(f)(y \otimes x) = f(x)(y)$.

Лемма 4. *Пусть $P_\bullet \to A$ – ω-проективная резольвента Λ-модуля A, M – правый A-модуль. Тогда $M \otimes_A P_\bullet$ – ω_0-проективная резольвента модуля M.*

Доказательство. Пусть E – ω_0-собственная короткая точная последовательность. Тогда по лемме 2 последовательность $\mathrm{Hom}_k(M,E)$ ω-собственная. Следовательно, для любого n $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_n, \mathrm{Hom}_k(M,E))$ – короткая точная последовательность, и так как ввиду леммы 3 последовательность $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_n, \mathrm{Hom}_k(M,E)) \simeq \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A P_n, E)$ является короткой точной, то $M \otimes_A P_n$ – ω_0-проективный модуль. Кроме того, ввиду леммы 1 последовательность

$$\cdots \to M \otimes_A P_1 \to M \otimes_A P_0 \to M \otimes_A A \to 0$$

"распадается" в произведение Йонеды ω_0-собственных коротких точных последовательностей, и потому комплекс $M \otimes_A P_\bullet$ является ω_0-проективной резольвентой модуля $M \otimes_A A \simeq M$. $\square$

Предложение 5. *Пусть M и N – правые A-модули. Тогда существует изоморфизм*

$$\eta\colon \omega_0 \operatorname{Ext}^t_A(M,N) \longrightarrow \mathrm{HH}^t(B, A, \mathrm{Hom}_k(M,N)).$$

Доказательство. Пусть $P_\bullet \to A$ – некоторая ω-проективная резольвента. Используя лемму 4, получаем, что

$$\omega_0 \operatorname{Ext}^t_A(M,N) \simeq \mathrm{H}^t(\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A P_\bullet, N)). \qquad (2)$$

С помощью леммы 3 получаем:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^t(\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A P_\bullet, N)) &\simeq \mathrm{H}^t(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, \mathrm{Hom}_k(M,N))) \\ &= \omega \operatorname{Ext}^t_\Lambda(A, \mathrm{Hom}_k(M,N)) = \mathrm{HH}^t(B, A, \mathrm{Hom}_k(M,N)), \end{aligned}$$

и мы можем определить η как композицию рассмотренных выше изоморфизмов. $\square$

4. Пусть $\{Z_i\}_{i=0}^{t+1}$ – семейство правых A-модулей, и пусть дана последовательность B-линейных отображений $\beta = \{\beta_i\colon Z_i \to Z_{i+1} \mid 0 \leqslant i \leqslant t\}$. Определим отображение

$$\Omega_\beta\colon A^{\otimes_B (t+2)} \to \mathrm{Hom}_k(Z_0, Z_{t+1})$$

так, что

$$\Omega_\beta(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{t+1}) = \overline{a}_{t+1}\beta_t\overline{a}_t \ldots \beta_1\overline{a}_1\beta_0\overline{a}_0,$$

где $a_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant t+1)$, а $\overline{a}_i$ – гомоморфизм умножения справа на a_i (в соответствующем модуле). Легко видеть, что Ω_β – Λ-гомоморфизм.

Теперь рассмотрим длинную точную последовательность

$$E\colon 0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_t} Y_t \longrightarrow \cdots \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0,$$

представляющую элемент $[E] \in \omega_0 \operatorname{Ext}^t_A(M,N)$. Так как для E имеется стягивающая гомотопия над B, то существует последовательность B-гомоморфизмов

$$\gamma = \left\{ M \xrightarrow{\gamma_0} Y_1 \xrightarrow{\gamma_1} Y_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_t \xrightarrow{\gamma_t} N \right\},$$

для которой выполняются соотношения:

$$\gamma_i\gamma_{i-1} = 0, \quad \gamma_{i-1}g_{i-1} + g_i\gamma_i = \mathrm{id}_{Y_i} \quad \text{для} \quad 1 \leq i \leq t$$

$$\text{и} \quad g_0\gamma_0 = \mathrm{id}_M, \quad \gamma_t g_t = \mathrm{id}_N.$$

Таким образом, можно рассмотреть коцепь Хохшильда

$$\Omega_\gamma\colon S_t \to \operatorname{Hom}_k(M,N).$$

Теорема 6. *Отображение $\Omega_\gamma\colon S_t \to \operatorname{Hom}_k(M,N)$ является коциклом, а для соответствующего класса когомологий $[\Omega_\gamma] \in \mathrm{HH}^t(B,A,\operatorname{Hom}_k(M,N))$ выполняется соотношение*

$$[\Omega_\gamma] = (-1)^{t(t+1)/2}\eta([E]).$$

Доказательство. Пусть $\Omega'_\gamma = \mu(\Omega_\gamma)$, где

$$\mu\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(S_t, \operatorname{Hom}_k(M,N)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A S_t, N)$$

– изоморфизм из леммы 3, и пусть $\delta_i = \mathrm{id}_M \otimes \nabla_i$ $(i \geqslant 0)$, $\delta_{-1}(m \otimes a_0 \otimes a_1) = ma_0a_1$. Рассмотрим также следующие вспомогательные отображения $\widetilde{\varphi}_r\colon M \otimes_A S_r \to Y_{r+1}$ $(0 \leqslant r \leqslant t)$,

$$\widetilde{\varphi}_r(m \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{r+1}) = \overline{a}_{r+1}\gamma_r\overline{a}_r\gamma_{r-1}\ldots\gamma_1\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m),$$

где $a_i \in A$, $m \in M$ (и дополнительно полагаем $Y_{t+1} = N$). Ясно, что $\widetilde{\varphi}_t = \Omega'_\gamma$, а также $g_0\widetilde{\varphi}_0 = \delta_{-1}$. Докажем, что для $0 \leqslant r \leqslant t-1$

$$\widetilde{\varphi}_r\delta_r = (-1)^{r+1}g_{r+1}\widetilde{\varphi}_{r+1}. \tag{3}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_r\delta_r(m\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{r+2}) &= \overline{a}_{r+2}\gamma_r\overline{a}_{r+1}\ldots\overline{a}_2\gamma_0\overline{a}_1\overline{a}_0(m)\\ &+\sum\nolimits_{i=1}^{r}(-1)^i\overline{a}_{r+2}\gamma_r\overline{a}_{r+1}\ldots\gamma_i\overline{a}_{i+1}(\gamma_{i-1}g_{i-1})\overline{a}_i\gamma_{i-1}\ldots\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m)\\ &+\sum\nolimits_{i=1}^{r}(-1)^i\overline{a}_{r+2}\gamma_r\overline{a}_{r+1}\ldots\gamma_i\overline{a}_{i+1}(g_i\gamma_i)\overline{a}_i\gamma_{i-1}\ldots\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m)\\ &+(-1)^{r+1}\overline{a}_{r+2}\overline{a}_{r+1}\gamma_r\overline{a}_r\ldots\gamma_1\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m).\end{aligned}$$

Для каждого из значений индекса $i=1,\ldots,r$ между операторами $\overline{a}_{i+1}$ и $\overline{a}_i$ была вставлена сумма $\gamma_{i-1}g_{i-1}+g_i\gamma_i\,(=\mathrm{id}_{Y_i})$, после чего были получены две вышеуказанные суммы. Сделав во второй из них замену индекса суммирования i на $j-1$ (и учитывая, что $\overline{a}_{i+1}g_i=g_i\overline{a}_{i+1}$), получим для слагаемых из обеих рассматриваемых сумм разбиение на попарно противоположные слагаемые, кроме двух. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\widetilde{\varphi}_r\delta_r(m\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{r+2})\\ &\quad=\overline{a}_{r+2}\gamma_r\overline{a}_{r+1}\ldots\overline{a}_2\gamma_0\overline{a}_1\overline{a}_0(m)-\overline{a}_{r+2}\gamma_r\overline{a}_{r+1}\ldots\overline{a}_2\gamma_0g_0\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m)\\ &\qquad+(-1)^r\overline{a}_{r+2}(\gamma_rg_r)\overline{a}_{r+1}\gamma_r\overline{a}_r\ldots\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m)\\ &\qquad+(-1)^{r+1}\overline{a}_{r+2}\overline{a}_{r+1}\gamma_r\overline{a}_r\ldots\gamma_1\overline{a}_1\gamma_0\overline{a}_0(m).\end{aligned}$$

Здесь первое и второе слагаемые уничтожаются, поскольку $g_0\overline{a}_1=\overline{a}_1g_0$ и $g_0\gamma_0=\mathrm{id}$. Наконец, заменяя в третьем слагаемом γ_rg_r на $\mathrm{id}_{Y_{r+1}}-g_{r+1}\gamma_{r+1}$, получаем соотношение (3). Отсюда, в частности, легко следует, что $\widetilde{\varphi}_t\delta_t=0$, т.е. Ω'_γ – коцикл.

Теперь определим $\varphi_r=(-1)^{r(r+1)/2}\widetilde{\varphi}_r$, $0\leqslant r\leqslant t$. Тогда получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & \longrightarrow & M\otimes_A S_1 & \xrightarrow{\delta_0} & M\otimes_A S_0 & \xrightarrow{\delta_{-1}} & M\\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \|\\ \cdots & \longrightarrow & Y_2 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_0} & M.\end{array}\tag{4}$$

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots & \xrightarrow{\delta_t} & M\otimes_A S_t & \xrightarrow{\delta_{t-1}} & M\otimes_A S_{t-1} & \longrightarrow & \cdots\\ & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_t} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{t-1}} & & \\ E:\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{g_t} & Y_t & \longrightarrow & \cdots\end{array}$$

Используя отождествление с помощью изоморфизма из (2) (где в качестве $P_\bullet$ берется $S_\bullet$), с учетом диаграммы (4) получаем, что

$$[E] = [\varphi_t] = (-1)^{t(t+1)/2}[\Omega'_\gamma] = (-1)^{t(t+1)/2} \cdot \eta^{-1}([\Omega_\gamma]).$$

□

Замечание 2. Отметим, что в [2, стр. 495] описание знака, на который отличаются классы $\eta([E])$ и $[\Omega_\gamma]$, содержит неточность.

Литература

1. G. Hochschild, *Relative homological algebra.* — Trans. Amer. Math. Soc. **82**, No. 1 (1956), 246–269.
2. V. Dlab, C. M. Ringel, *The Hochschild cocycle corresponding to a long exact sequence.* — Tsukuba J. Math. **14**, No. 2 (1990), 489–496.
3. С. Маклейн, *Гомология.* Мир, М. (1966).

Bezyakina E. A., Generalov A. I. Cocycles in the relative Hochschild cohomology.

Let E be a long exact sequence of modules over an algebra A admitting a contracting homotopy over a subalgebra $B \subset A$. In settings of the relative homological algebra, the Hochschild cocycle corresponding to the sequence E is described explicitly. The "absolute case" has been earlier investigated by V. Dlab and C. M. Ringel. Being applied to that case, the present investigation gives a shorter arguments than that of Dlab–Ringel's work.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 декабря 2005 г.