Ю. В. Якубович

О СОВПАДЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФОРМ РАЗБИЕНИЙ И КОМПОЗИЦИЙ И РАССЛОЕНИИ ДИАГРАММ ЮНГА

Введение

В этой заметке мы рассмотрим расслоение предельной формы разбиений на слои, отвечающие вкладам слагаемых различных кратностей. Оказывается, что слагаемые любой кратности дают свой вклад в предельную форму (теорема 1). Это не является неожиданным, поскольку, как показано в [1], вероятность того, что случайный элемент множества различных слагаемых случайного разбиения числа n будет иметь кратность j в разбиении λ, стремится к $1/(j(j+1))$ при $n \to \infty$. Наш результат может рассматриваться как аналог этого утверждения, если вместо множества всех различных слагаемых брать множество различных слагаемых, не меньших $t\sqrt{n}$, $t > 0$.

Точная формулировка этого результата приводится в первом параграфе. Во втором параграфе мы обращаемся к аналогичному вопросу для случайных разбиений числа n, имеющих в точности m слагаемых, где и n, и m растут. Такие случайные разбиения имеют прямое отношение к некоторым моделям статистической физики, см. [6, 7]. Ситуация здесь зависит от относительной скорости роста n и m. Если m растет пропорционально $\sqrt{n}$, то, как и при отсутствии ограничений на число слагаемых, слагаемые произвольной кратности будут встречаться с положительной вероятностью (пункт 1 теоремы 2). Если же m растет пропорционально n^{α}, $\alpha < 1/2$ (пункт 2 теоремы 2), то ситуация меняется. А именно, основной вклад в предельную форму дают слагаемые кратности 1. С другой стороны, при $\alpha > 1/3$ слагаемые кратности 2 присутствуют в разбиении, и при росте m и n их число растет, но значительно медленнее m. При увеличении

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 02-01-00093 и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2251.2003.1.

α появляются слагаемые кратности 3, 4 и т. д. В то же время при $\alpha < 1/2$ слагаемые достаточно больших кратностей отсутствуют вообще.

Применяемый метод доказательства не проходит при некотором соотношении между кратностью рассматриваемых слагаемых j и показателем роста числа слагаемых α. Соответствующие результаты сформулированы как предположение.

В параграфе 3 решается аналогичная задача для случайных композиций (т. е. упорядоченных разбиений) числа n на m слагаемых при росте m, пропорциональном n^α, $\alpha < 1/2$ (теорема 3). Ответ аналогичен случаю разбиений, хотя и не совпадает с ним. Тем не менее, предельные формы слагаемых кратности 1 совпадают. Это дает ответ на вопрос о причине совпадения предельных форм для разбиений и композиций при таком росте m и n, поставленный в [9], поскольку именно слагаемые кратности 1 дают основной вклад в предельную форму в обоих случаях.

Несовпадение количества слагаемых кратностей, превосходящих 1, для разбиений и композиций — демонстрация того, что предельная форма не является полным инвариантом мер на разбиениях. Равномерная мера на разбиениях числа n на m слагаемых и мера, индуцированная равномерной мерой на композициях, асимптотически взаимно сингулярны при росте m и n, но, тем не менее, предельные формы типичных относительно обеих мер разбиений совпадают.

Параграф 4 содержит доказательства.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за многочисленные беседы, которые помогли в написании этой работы.

1. Разбиения целых чисел

Рассмотрим сперва случай равномерной меры μ^n на множестве $\mathcal{P}(n)$ разбиений числа n. Напомним, что количество разбиений $p(n) = \#\mathcal{P}(n)$ числа n имеет производящую функцию

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-x^k}. \tag{1}$$

(Это было известно еще Эйлеру, который первым изучал разбиения, см. [10].)

Разбиению λ соответствует диаграмма Юнга, определяемая как подмножество первого квадранта плоскости (t, u), у которого координаты точек удовлетворяют неравенствам

$$t \geqslant 0, \quad u \geqslant 0, \quad u \leqslant \varphi(t;\lambda) = \sum_{k>t} r_k(\lambda).$$

Здесь $r_k(\lambda)$ обозначает количество слагаемых k в разбиении λ. Хорошо известно, что диаграммы Юнга почти всех разбиений (относительно меры μ^n при достаточно больших n) после сжатия в $1/\sqrt{n}$ раз вдоль обеих осей лежат в окрестности кривой $u = \varphi^*(t) = -\frac{1}{c}\log(1-e^{-ct})$ (или, в симметричной форме, $e^{-ct}+e^{-cu} = 1$), где $c = \pi/\sqrt{6}$: при всех $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$\mu^n\Big\{\lambda \in \mathcal{P}(n) : \big|\varphi(t\sqrt{n};\lambda)/\sqrt{n} - \varphi^*(t)\big| < \varepsilon\Big\} > 1-\varepsilon.$$

Кривая $\varphi^*(t)$ называется *предельной формой разбиений*. Рассмотрим расслоение этой предельной формы на суммы слагаемых фиксированной кратности. Точнее, при фиксированном $j \geqslant 1$ сопоставим разбиению λ функцию

$$\varphi_j(t) = \varphi_j(t;\lambda) = \sum_{k>t: r_k(\lambda)=j} r_k(\lambda) = j\sum_{k>t} 1_{r_k(\lambda)=j}$$

(см. рис. 1). Из определения следует, что $\varphi(t;\lambda) = \sum_{j\geqslant 1}\varphi_j(t;\lambda)$ при всех λ.

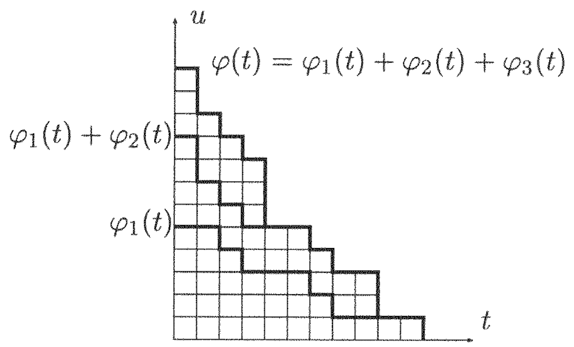

Рис. 1. Диаграмма Юнга разбиения $61 = 11+9+9+7+6+4+4+4+3+2+1+1$ и функции φ_1, $\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3$.

Геометрический смысл имеют также частичные суммы $\varphi_1 + \dots + \varphi_j$ (также изображенные на рис. 1). Это диаграмма Юнга, из которой удалены все строчки, встречающиеся более чем j раз (и оставшиеся клетки которой сдвинуты вниз до образования другой диаграммы Юнга).

Мы покажем, что функции φ_j также имеют предельные формы (см. рис. 2). А именно,

Теорема 1. *При всех* $j \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 0$ *и достаточно больших* n

$$\mu^n \Big\{ \lambda \in \mathcal{P}(n) : \big|\varphi_j(t\sqrt{n}; \lambda)/\sqrt{n} - \varphi_j^*(t)\big| < \varepsilon \Big\} > 1 - \varepsilon,$$

где $\varphi_j^*(t) = \dfrac{1}{c} e^{-cjt} - \dfrac{j}{c(j+1)} e^{-c(j+1)t}$, $c = \pi/\sqrt{6}$.

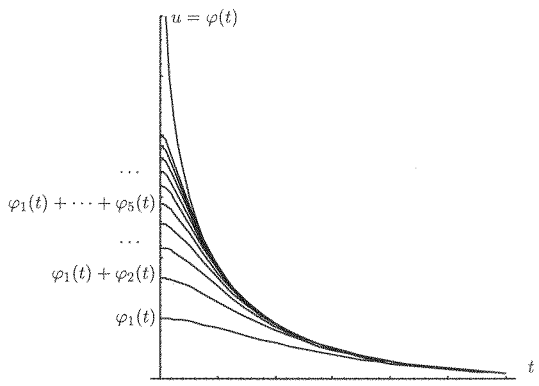

Рис. 2. Предельная форма φ диаграмм Юнга и функции φ_1, $\varphi_1 + \varphi_2$, ..., $\varphi_1 + \dots + \varphi_5$, ...

Замечание. При $t = 0$ из этого результата следует результат, доказанный в работе [1]: если взять случайное разбиение числа n и взять с равными вероятностями элемент из множества его слагаемых, то вероятность того, что кратность этого слагаемого равна j, стремится к $1/(j(j+1))$ при $n \to \infty$. Теорему 1 можно интерпретировать следующим образом: если рассмотреть случайное разбиение числа n и из множества его слагаемых бóльших

$t\sqrt{n}$ выбрать случайный элемент (это множество непусто с вероятностью, быстро стремящейся к 1), то вероятность того, что это слагаемое будет иметь кратность j в разбиении, стремится к $e^{-c(j-1)t}/j - e^{-cjt}/(j+1)$ при $x \to 1$. При $t = 0$ это есть цитированный выше результат.

2. Разбиения с фиксированным числом слагаемых

Перейдем к случаю ограниченного числа слагаемых. Множество разбиений числа n с m слагаемыми обозначим $\mathcal{P}(n,m)$, а равномерную меру на нем — $\mu^{n,m}$. Мы будем рассматривать разбиения, у которых число слагаемых m зависит от n и они оба растут. (Это более точно соответствует задачам, возникающим в статистической физике, см. [7].) При отсутствии ограничения, как показано в [2], количество слагаемых в случайном разбиении числа n асимптотически эквивалентно $(\sqrt{6n}\log n)/(2\pi)$. Мы будем рассматривать случай $m \sim An^\alpha$ при фиксированных $A > 0$ и $\alpha \leqslant 1/2$.

Рассмотрим уравнение

$$A^2 \operatorname{Li}_2 y = \log^2(1-y), \tag{2}$$

где $\operatorname{Li}_2 y = \int_y^0 \log(1-z)/z\,dz = \sum_{k=1}^\infty y^k/k^2$ — дилогарифм y. Это уравнение имеет при $A \geqslant 0$ единственное вещественное решение y_A, возрастающее от 0 до 1 при изменении A от 0 до ∞.

Теорема 2.
1. *Пусть $\alpha = 1/2$. При всех $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 0$, достаточно больших n и m, достаточно близких к $A\sqrt{n}$,*

$$\mu^{n,m}\Big\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \big|\varphi_j(t\sqrt{n};\lambda)/\sqrt{n} - \varphi_j^*(t)\big| < \varepsilon\Big\} > 1-\varepsilon,$$

где

$$\varphi_j^*(t) = \frac{1}{c_A} y_A^j e^{-c_A j t} - \frac{j y_A^{j+1}}{c_A(j+1)} e^{-c_A(j+1)t},$$

y_A — решение уравнения (2) и $c_A = -\log(1-y_A)/A$.

2. *Пусть $\alpha < 1/2$. При всех $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 0$, достаточно больших n и m, достаточно близких к An^α,*

(i) *если $j < \dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}$, то*

$$\mu^{n,m}\Big\{\lambda\in\mathcal{P}(n,m) : \big|n^{(1-2\alpha)j+\alpha-1}\varphi_j(tn^{1-\alpha};\lambda) - A^{2j-1}e^{-Ajt}\big| < \varepsilon\Big\} > 1-\varepsilon;$$

(ii) *если* $j > \dfrac{2-\alpha}{1-2\alpha}$, *то*

$$\mu^{n,m}\big\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \varphi_j(t;\lambda) = 0\big\} > 1-\varepsilon. \tag{3}$$

Отметим, что в случае $\alpha < 1/2$, описываемом вторым пунктом теоремы, если $j_1 < j_2 < \dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}$, то с вероятностью сколь угодно близкой к 1 выполнено $\varphi_{j_2}(tn^{1-\alpha}) = o\big(\varphi_{j_1}(tn^{1-\alpha})\big)$ при $n \to \infty$, но при этом $\varphi_{j_2}(tn^{1-\alpha})$ неограниченно возрастает. Поэтому почти все слагаемые случайного разбиения имеют кратность 1, хотя при достаточно больших n встречается произвольно большое число слагаемых любой кратности меньшей $\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$. В то же время слагаемых кратности, превосходящей $\frac{2-\alpha}{1-2\alpha}$, нет с вероятностью, стремящейся к 1. При $\alpha = 1/2$, также как в случае, когда ограничение на число слагаемых вообще отсутствует (теорема 1), слагаемые произвольной кратности встречаются с положительной вероятностью.

Теоремы 1 и 2 можно рассматривать как аналоги закона больших чисел для расслоенных диаграмм Юнга. Можно задавать вопрос о центральной предельной теореме, которая, по-видимому, имеет место. Флуктуации относительно среднего значения, видимо, имеют масштаб $\sqrt[4]{n}$ при отсутствии ограничения на число слагаемых и при фиксации числа слагаемых $m \sim A\sqrt{n}$. При $m \sim An^{\alpha}$, $\alpha < 1/2$ и $j < (1-\alpha)/(1-2\alpha)$ флуктуации слоя φ_j предположительно имеют масштаб $n^{(1-\alpha)/2-(1/2-\alpha)j}$. Однако доказательство этих утверждений, как и точная их формулировка, выходит за рамки этой заметки.

Теорема 2 не описывает случаев, когда $1-\alpha \leqslant j(1-2\alpha) \leqslant 2-\alpha$. По-видимому, в случаях $1-\alpha < j(1-2\alpha) \leqslant 2-\alpha$ все равно выполняется (3), как и при $j(1-2\alpha) > 2-\alpha$, однако доказательство требует применения другой техники. Однако если α и j связаны соотношением $(1-2\alpha)j = 1-\alpha$, то предположительно закон больших чисел, аналогичный законам больших чисел, сформулированным в теореме 2, не выполняется. Более того, позволим себе высказать следующую гипотезу: *при* $\alpha < 1/2$, $t \geqslant 0$, *целых* $l \geqslant 0$ *и* $j = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\ m\to\infty\\ m\sim An^{\alpha}}} \mu^{n,m}\Big\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \varphi_j(tn^{1-\alpha};\lambda) = jl\Big\} = \frac{s^l}{l!}e^{-s},$$

где
$$s = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha} A^{1/(1-2\alpha)} e^{-At(1-\alpha)/(1-2\alpha)} = A^{2j-1}\frac{e^{-Ajt}}{j}.$$
Другими словами, $\frac{1}{j}\varphi_j(tn^{1-\alpha})$ асимптотически имеет распределение Пуассона с параметром s.

Замечание. Наличие или отсутствие кратных слагаемых имеет прямое отношение к асимптотической формуле, доказанной Эрдёшем и Ленером [2]: при $n \to \infty$ и $m = o(n^{1/3})$ выполнено соотношение
$$p(n,m) \sim \frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1}. \tag{4}$$
(Более простое доказательство было вскоре дано Гуптой [4], см. также [10].) Это равносильно тому, что доля разбиений, в которых присутствуют кратные слагаемые, стремится к 0. Вопрос о точности показателя 1/3 был поставлен А. М. Вершиком и мной в работе [9], и там на него был дан следующий ответ: соотношение (4) остается в силе, если $m = o\big((n\log n)^{1/3}\big)$, и нарушается в противном случае. Однако приведенный там план доказательства содержит ошибку и работает только в одну сторону: при росте m и n, таком, что при некотором $c > 0$ имеет место неравенство $m \geqslant c(n\log n)^{1/3}$, кратные слагаемые в случайном разбиении присутствуют с ненулевой вероятностью. В обратную сторону приведенное в [9] рассуждение не работает. Таким образом, остается недоказанным следующее утверждение: из того, что доля разбиений, содержащих кратные слагаемые, стремится к нулю при росте m и n, следует, что $m = o\big((n\log n)^{1/3}\big)$. Видимо, это вообще не верно, и условие $m = o(n^{1/3})$, предложенное Эрдёшем и Ленером, не может быть ослаблено. Если высказанные выше предположения выполнены, то это именно так: цитированный результат работы [9] ошибочен, и условие $m = o(n^{1/3})$ эквивалентно отсутствию кратных слагаемых в случайном разбиении с вероятностью, стремящейся к 1.

3. Разбиения и композиции

На разбиениях числа n есть вторая естественная мера, а именно мера ν^n, являющаяся проекцией равномерной меры на композициях. Для наших целей естественно рассматривать меру $\nu^{n,m}$, определенную на $\mathcal{P}(n,m)$ и являющуюся образом равномерной меры на композициях числа n с m слагаемыми.

Теорема 3. *При всех $\varepsilon > 0$, $t \geqslant 0$, достаточно больших n и m, достаточно близких к An^α, $\alpha < 1/2$,*

(i) *если* $j < \dfrac{1-\alpha}{1-2\alpha}$, *то*

$$\nu^{n,m}\Big\{\lambda\in\mathcal{P}(n,m) : \big|n^{(1-2\alpha)j+\alpha-1}\varphi_j(tn^{1-\alpha};\lambda)-A^{2j-1}e^{-Ajt}/j!\big|<\varepsilon\Big\}> > 1-\varepsilon;$$

(ii) *если* $j > \dfrac{2-\alpha}{1-2\alpha}$, *то*

$$\nu^{n,m}\big\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \varphi_j(t;\lambda) = 0\big\} > 1-\varepsilon.$$

Отметим отличие от аналогичного утверждения для разбиений: предельная форма кратностей j в типичной композиции в $j!$ раз меньше, чем в типичном разбиении. Это показывает, что меры $\mu^{n,m}$ и $\nu^{n,m}$ асимптотически сосредоточены на различных подмножествах разбиений.

Теоремы 2 и 3 объясняют совпадение предельных форм композиций и разбиений числа n на m слагаемых в случае $m = o(\sqrt{n})$. (Вопрос о причинах этого совпадения был поставлен в [9].) Действительно, основной вклад в предельную форму дают слагаемые кратности 1, т. е. $\varphi(tn^{1-\alpha}) \sim \varphi_1(tn^{1-\alpha})$ с вероятностью, стремящейся к 1, как для разбиений, так и для композиций. В то же время предельные формы слагаемых кратности 1 для разбиений и композиций совпадают.

Отметим, что рассматриваемый случай $m \sim An^\alpha$, $\alpha < 1/2$, весьма далек от случайных композиций без фиксации числа слагаемых, поскольку в случайной композиции число слагаемых $m \sim n/2 \gg n^\alpha$. Результаты Сэведж и Хитченко [5] дают основание полагать, что при отсутствии фиксации числа слагаемых доли числа слагаемых фиксированной кратности не имеют предела.

4. Доказательства

Для проведения доказательств мы рассмотрим большой ансамбль разбиений, т. е. множество разбиений произвольного целого числа $\mathcal{P} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}(n)$, снабженное семейством вероятностных мер μ_x, $x \in (0,1)$, определенных равенством

$$\mu_x(\{\lambda\}) = \frac{1}{F(x)}\prod_{k\geqslant 1} x^{kr_k(\lambda)},$$

где $r_k(\lambda)$ — число слагаемых k в разбиении λ, а нормирующий множитель $F(x)$ определяется уравнением (1). Нетрудно проверить, что мера μ_x — вероятностная мера при всех $x \in (0,1)$ (см. [3, 6]). При таком определении условные меры на слоях $\mathcal{P}(n)$ совпадают с равномерными мерами, а случайные величины r_k независимы. Для того чтобы сделать разбиения числа n наиболее вероятными, нужно выбрать

$$x = x(n) = 1 - \frac{\pi}{\sqrt{6n}}. \tag{5}$$

При таком выборе x мера множества $\mathcal{P}(n)$ оказывается достаточно большой:

$$\mu_x \mathcal{P}(n) = x^n p(n) \geqslant C n^{-3/4} \tag{6}$$

при некотором $C > 0$, см. [3].

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\mathbf{E}_x \rho$ и $\operatorname{Var}_x \rho$ соответственно математическое ожидание случайной величины ρ и ее дисперсию, взятые по отношению к мере μ_x.

Пусть $P(x,t,\varepsilon)$ обозначает множество разбиений λ, у которых диаграмма Юнга в точке $t/(1-x)$ не сильно отличается от своего среднего относительно меры μ_x, а точнее

$$P(x,t,\varepsilon) = \bigl\{\lambda \in \mathcal{P} : \bigl|\varphi_j(t/(1-x);\lambda)/\mathbf{E}_x \varphi_j(t/(1-x)) - 1\bigr| < \varepsilon\bigr\}.$$

Прежде всего мы покажем, что при всех $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ и x, достаточно близких к 1,

$$\mu_x\bigl(P(x,t,\varepsilon)\bigr) > 1 - \varepsilon, \tag{7}$$

т. е. что в большом ансамбле разбиений выполняется аналог теоремы 1.

Напомним, что $\varphi_j(t;\lambda) = j\sum_{k>t} 1_{r_k(\lambda)=j}$. Поэтому

$$\mathbf{E}_x 1_{r_k=j} = (1-x^k)x^{kj} = x^{kj} - x^{k(j+1)},$$
$$\operatorname{Var}_x 1_{r_k=j} = x^{kj} - x^{k(j+1)} - x^{2kj} + 2x^{k(2j+1)} - x^{2k(j+1)}.$$

Поэтому при $x \to 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x \varphi_j(t/(1-x)) &= j \sum_{k>t/(1-x)} \bigl(x^{kj} - x^{k(j+1)}\bigr) = \\
&= j\frac{x^{([t/(1-x)]+1)j}}{1-x^j} - \frac{jx^{([t/(1-x)]+1)(j+1)}}{1-x^{j+1}} \sim \\
&\sim \frac{1}{1-x}e^{-jt} - \frac{j}{(j+1)(1-x)}e^{-(j+1)t}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\operatorname{Var}_x \varphi_j(t/(1-x)) = j^2 \sum_{k>t/(1-x)} \operatorname{Var}_x 1_{r_k=j} \sim \frac{1}{1-x} g(t),$$

где g — некоторая функция, не зависящая от x. Применяя неравенство Чебышева, убеждаемся, что (7) выполнено при x близких к 1.

Тем не менее, для доказательства теоремы в малом ансамбле нам нужно более сильное утверждение: при всех $\varepsilon > 0$ и x, достаточно близких к 1,

$$\mu_x\big(\mathcal{P} \setminus P(x,t,\varepsilon)\big) \leqslant e^{-c/(1-x)}, \tag{8}$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$, т. е. справедлив результат типа принципа больших уклонений. Стандартная техника получения таких оценок следующая. При любых $u > 0$

$$\begin{aligned} &\mu_x\{\lambda : \varphi_j(t/(1-x);\lambda) \geqslant (1+\varepsilon)\mathbf{E}_x\varphi_j(t/(1-x))\} = \\ &= \mu_x\{\lambda : \exp\big(\frac{u}{2}\varphi_j(t/(1-x);\lambda)\big) \geqslant \exp\big(\frac{u}{2}(1+\varepsilon)\mathbf{E}_x\varphi_j(t/(1-x))\}\big) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{\mathbf{E}_x \exp\big(u\varphi_j(t/(1-x))\big)}{\exp\big(u(1+\varepsilon)\mathbf{E}_x\varphi_j(t/(1-x))\big)} \end{aligned} \tag{9}$$

в силу неравенства Чебышева. Числитель последней дроби может быть легко оценен:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x \exp\big(u\varphi_j(t/(1-x))\big) &= \prod_{k>t/(1-x)} \mathbf{E}_x \exp ju1_{r_k=j} = \\ &= \prod_{k>t/(1-x)} \big(1 + (e^{ju}-1)(x^{kj} - x^{k(j+1)})\big) \leqslant \\ &\leqslant \exp\Big((e^{uj}-1)\sum_{k>t/(1-x)} (x^{kj} - x^{k(j+1)})\Big) \leqslant \\ &\leqslant 2\exp\Big((e^{uj}-1)\Big(\frac{e^{-jt}}{1-x^j} - \frac{e^{-(j+1)t}}{1-x^{j+1}}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (9), находим, что наилучшая оценка получается при $u = \frac{\log(1+\varepsilon)}{j}$ и что она имеет вид (8) при некотором $c > 0$, зависящем, разумеется, от ε, t и j.

Оценка для $\mu_x\{\lambda : \varphi_j(t/(1-x);\lambda) \leqslant (1-\varepsilon)\mathbf{E}_x\varphi_j(t/(1-x))\}$ получается аналогично.

Для завершения доказательства остается заметить, что μ^n совпадает с условной мерой $\mu_x\big|_{\mathcal{P}(n)}$ при всех x и, в частности, при $x = x_n$, который определен уравнением (5), и поэтому

$$\mu^n\big\{\lambda \in \mathcal{P}(n) : \big|\varphi_j(t/\sqrt{n};\lambda)/\sqrt{n} - \varphi_j^*(t)\big| > \varepsilon\big\} \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu_{x_n}\big(\mathcal{P}(n) \cap P(x_n, t, \varepsilon\frac{\pi}{\sqrt{6}})\big)}{\mu_{x_n}\mathcal{P}(n)} \leqslant \frac{\mu_{x_n} P(x_n, t, \varepsilon\frac{\pi}{\sqrt{6}})}{\mu_{x_n}\mathcal{P}(n)}.$$

Из этого неравенства и неравенства (6) следует утверждение теоремы. □

Для отражения зависимости m от n необходимо рассматривать двупараметрическое семейство мер на $\mathcal{P}$:

$$\mu_{x,y}(\{\lambda\}) = \frac{1}{F(x,y)} \prod_{k\geqslant 1} (yx^k)^{r_k(\lambda)},$$

где

$$F(x,y) = \sum_{n,m\geqslant 0} p(n,m)x^n y^m = \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1 - yx^k},$$

см. [6]. Здесь $p(n,m)$ — количество разбиений числа n на m слагаемых. Аналогично предыдущему случаю, мера $\mu_{x,y}$ есть выпуклая комбинация мер $\mu^{n,m}$:

$$\mu_{x,y} = \frac{1}{F(x,y)} \sum_{n,m\geqslant 0} p(n,m)x^n y^m \mu^{n,m}.$$

Для максимизации $\mu_{x,y}(\mathcal{P}(n,m))$ необходимо выбрать $x = x(n,m)$ и $y = y(n,m)$, являющиеся решением системы

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2 y &= n(1-x)^2, \\ -\log(1-y) &= m(1-x), \end{aligned} \tag{10}$$

см. [8]. При различных относительных скоростях роста n и m решение системы (10) имеет различную асимптотику. Если m и n растут и связаны соотношением $m \sim An^\alpha$, то при $\alpha < 1/2$ для получения соответствующих результатов в большом ансамбле надо брать $x \sim (1 - m/n) \to 1$ и $y \sim m^2/n \to 0$; при этом x и y связаны соотношением

$$y \sim A^{1/(1-\alpha)}(1-x)^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)}. \tag{11}$$

В случае $\alpha = 1/2$ получаем $y \to y_A$, где y_A — решение уравнения

$$A^2 \operatorname{Li}_2 y = \log^2(1-y),$$

а $x \sim 1 + \log(1-y_A)/m \to 1$. Используя оценки работы [8], можно показать, что при таком выборе x и y для достаточно больших n и $m \leqslant A\sqrt{n}$ при некоторой константе $c > 0$ выполнено неравенство

$$\mu_{x,y}\bigl(\mathcal{P}(n,m)\bigr) \geqslant \frac{c}{n}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 2. Доказательство практически аналогично предыдущему случаю, за исключением того, что необходимо учитывать связь x и y, поэтому мы лишь наметим основные шаги. Обозначим $\mathbf{E}_{x,y}\rho$ математическое ожидание случайной величины ρ, взятое по отношению к мере $\mu_{x,y}$.

Прежде всего отметим, что при $x \to 1$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{x,y}\varphi_j(t/(1-x)) &= j\sum_{k>t/(1-x)}\bigl(y^j x^{kj} - y^{j+1}x^{k(j+1)}\bigr) = \\ &= \frac{jy^j x^{([t/(1-x)]+1)j}}{1-x^j} - \frac{jy^{j+1}x^{([t/(1-x)]+1)(j+1)}}{1-x^{j+1}} \sim \\ &\sim \frac{y^j}{1-x}e^{-jt} - \frac{jy^{j+1}}{(j+1)(1-x)}e^{-(j+1)t}.\end{aligned}$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 1, при $x \to 1$ и $y \to y_A$ (т. е. в случае $\alpha = 1/2$) получаем оценку

$$\begin{aligned}\mu_{x,y}\Bigl\{\lambda \in \mathcal{P} : \Bigl|(1-x)\varphi_j(t/(1-x);\lambda) - \Bigl(y_A^j e^{-jt} - \frac{jy_A^{j+1}}{j+1}e^{-(j+1)t}\Bigr)\Bigr| > \varepsilon\Bigr\} \leqslant \\ \leqslant e^{-c(\varepsilon,t,A)/(1-x)},\end{aligned}$$

где $c(\varepsilon,t,A) > 0$ не зависит от x. При $x \to 1$ и $y \to 0$ таким образом, что выполнено (11) (случай $\alpha < 1/2$), получаем оценку

$$\begin{aligned}&\mu_{x,y}\Bigl\{\lambda \in \mathcal{P} : \Bigl|(1-x)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}j-1}\varphi_j(t/(1-x);\lambda) - A^{\frac{j}{1-\alpha}}e^{-jt}\Bigr| > \varepsilon\Bigr\} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \exp\bigl(-c(\varepsilon,t,A)y^j/(1-x)\bigr) = \exp\bigl(-c(\varepsilon,t,A)(1-x)^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}j-1}\bigr).\end{aligned}$$

Поэтому в большом ансамбле при $\alpha \leqslant 1/2$ и $j < \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$ мера разбиений, у которых нормированное значение $\varphi_j(t/(1-x))$ отличается от своего среднего значения больше чем на ε, также экспоненциально убывает. Рассматривая в качестве x и y решение системы (10) и рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, видим, что неравенство (12) влечет утверждение пунктов 1 и 2i теоремы.

Доказательство пункта 2ii требует небольшой модификации приведенных рассуждений, хотя общая идея остается такой же. Прежде всего отметим, что достаточно доказать утверждение теоремы только при $t=0$, поскольку функции $\varphi_j(t;\lambda)$ не возрастают при всех λ. Кроме того, мы можем считать, что $y \leqslant 1/2$, поскольку нас интересует случай $y \to 0$. Поэтому, используя неравенство $1-z \geqslant e^{-2z}$, справедливое при $z \in [0,1/2]$, получаем

$$\mu_{x,y}\{\lambda \in \mathcal{P} : \varphi_j(0,\lambda)=0\} = \mu_{x,y}\{\lambda \in \mathcal{P} : \forall k \geqslant 1\ r_k(\lambda) \neq j\} = \\ = \prod_{k\geqslant 1}\bigl(1-(1-yx^k)y^j x^{kj}\bigr) \geqslant \exp\Bigl(-2\sum_{k\geqslant 1}(1-yx^k)y^j x^{kj}\Bigr) = \\ = \exp\Bigl(-\frac{2x^j y^j}{1-x^j} + \frac{2x^{j+1}y^{j+1}}{1-x^{j+1}}\Bigr) \geqslant \exp\Bigl(-\frac{2x^j y^j}{1-x^j}\Bigr).$$

Поэтому

$$\mu_{x,y}\{\lambda \in \mathcal{P} : \varphi_j(0,\lambda) \geqslant 1\} = 1-\mu_{x,y}\{\lambda \in \mathcal{P} : \varphi_j(0,\lambda)=0\} \leqslant \\ \leqslant 1-\exp\Bigl(-\frac{2x^j y^j}{1-x^j}\Bigr). \tag{13}$$

При $j \geqslant \frac{2-\alpha}{1-2\alpha}$, x и y, являющихся решением системы (10), и $n,m \to \infty$ так, что $m \sim An^\alpha$, показатель экспоненты в неравенстве (13) стремится к нулю. Поскольку

$$\mu^{n,m}\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \varphi_j(0;\lambda) \geqslant 1\} = \\ = \frac{\mu_{x,y}\bigl(\{\lambda \in \mathcal{P} : \varphi_j(0;\lambda) \geqslant 1\} \cap \mathcal{P}(n,m)\bigr)}{\mu_{x,y}\mathcal{P}(n,m)} \leqslant \\ \leqslant \frac{\mu_{x,y}\{\lambda \in \mathcal{P} : \varphi_j(0;\lambda) \geqslant 1\}}{\mu_{x,y}\mathcal{P}(n,m)}$$

при любых допустимых x и y, в частности при x и y, являющихся решением системы (10), то, используя неравенства (12) и (13), получаем

$$\mu^{n,m}\{\lambda \in \mathcal{P}(n,m) : \varphi_j(0;\lambda) \geqslant 1\} \leqslant cn^{(2\alpha-1)j+2-\alpha},$$

где константа c положительна. Это неравенство доказывает утверждение теоремы. $\square$

Перейдем к композициям. Заметим, что каждому разбиению $\lambda \in \mathcal{P}(n,m)$ соответствует $m!/\prod_k r_k(\lambda)!$ композиций. Это дает возможность определить соответствующую меру на большом ансамбле разбиений $\mathcal{P}$:

$$\nu_{x,y}(\{\lambda\}) = e^{-\frac{xy}{1-x}} \prod \frac{(x^k y)^{r_k(\lambda)}}{r_k(\lambda)!}.$$

Эта мера является выпуклой комбинацией мер $\nu^{n,m}$:

$$\nu_{x,y} = e^{-\frac{xy}{1-x}} \sum_{n,m\geqslant 0} \frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} x^n y^m \nu^{n,m}.$$

Отметим, что смешать меры ν^n таким образом, чтобы кратности слагаемых r_k были бы взаимно независимы, нельзя. Фиксация числа слагаемых дает такую возможность, однако условная мера на множестве $\mathcal{P}(n)$ разбиений числа n не будет совпадать с ν^n. Другими словами, условные меры $\nu_{x,y}\big|_{\mathcal{P}(n,m)}$ входят в меру $\nu_{x,y}\big|_{\mathcal{P}(n)}$ с весами, отличными от тех, с которыми $\nu^{n,m}$ входят в ν^n, и это отличие нельзя сделать несущественным подбором параметров x и y.

Мы не приводим доказательства теоремы 3, поскольку оно аналогично доказательству предыдущих теорем. Отметим лишь, что для получения максимального вклада мер $\nu^{n,m}$ в выпуклую комбинацию при росте n и $m \sim An^\alpha$ необходимо выбирать $x = 1 - m/n = 1 - An^{\alpha-1}$ и $y = m^2/n = A^2 n^{2\alpha-1}$. Применение формулы Стирлинга показывает, что при $\alpha < 1/2$

$$\nu_{x,y}\big(\mathcal{P}(n,m)\big) > \frac{c}{n}$$

для фиксированного $c > 0$. Аналогичная оценка, видимо, верна и при $\alpha = 1/2$. Если же $\alpha > 1/2$, то $\nu_{x,y}\big(\mathcal{P}(n,m)\big)$ начинает экспоненциально убывать, что делает невозможным применение нашего метода доказательства. Кроме того, тот факт, что $y \to \infty$, делает затруднительным нахождение предельной формы φ_j даже в большом ансамбле. Вопрос о расслоении предельной формы для композиций при таком соотношении скоростей роста n и m остается открытым. Результаты, полученные в работе [5], дают основание думать, что ответ не будет таким простым, как для роста $m < A\sqrt{n}$.

Литература

1. S. Corteel, B. Pittel, C. D. Savage, H. S. Wilf, *On the multiplicity of parts in a random partition.* — Random Structures Algorithms **14**, No. 2 (1999), 185–197.
2. P. Erdős, J. Lehner, *The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer.* — Duke Math. J. **8** (1941), 335–345.
3. B. Fristedt, *The structure of random partitions of large integers.* — Trans. Amer. Math. Soc. **337**, No. 2 (1993), 703–735.
4. H. Gupta, *On an asympltotic formula in partitions.* — Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. **16** (1942), 101–102.
5. P. Hitczenko, C. D. Savage, *On the multiplicity of parts in a random composition of a large integer.* — SIAM J. Discrete Math., to appear.
6. А. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функц. анал. и его прил. **30**, № 2 (1996), 19–30.
7. А. Вершик, *Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел.* — УМН **52**, № 2 (1997), 139–146.
8. A. Vershik, Yu. Yakubovich, *Limit shape and fluctuations of random partitions of naturals with fixed number of summands.* — Moscow Math. J. **1**, No. 3 (2001), 457–468.
9. А. Вершик, Ю. Якубович, *Асимптотика равномерной меры на симплексах, случайные композиции и разбиения.* — Функц. анал. и его прил. **37**, № 4 (2003), 39–48.
10. Г. Эндрюс, *Теория разбиений.* Наука, М., 1982.

Yakubovich Yu. V. On the coincidence of limit shapes for integer partitions and compositions, and a slicing of Young diagrams.

We consider a slicing of Young diagrams into slices associated with summands that have equal multiplicities. It is shown that for the uniform measure on all partitions of an integer n, as well as for the uniform measure on partitions of an integer n into m summands, $m \sim An^{\alpha}$, $\alpha \leqslant 1/2$, all slices after rescaling concentrate around their limit shapes. The similar problem is solved for compositions of an integer n into m summands. These results are applied to explain why limit shapes of partitions and compositions coincide in the case $\alpha < 1/2$.

С-.Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: yuyakub@mail.ru

Поступило 14 марта 2004 г.