Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 307, 2004 г.

М. Эмери

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ФИЛЬТРАЦИЕЙ: ОТ ТЕОРИИ ВЕРШИКА К БРОУНОВСКОМУ ДВИЖЕНИЮ ЧЕРЕЗ ИДЕИ ЦИРЕЛЬСОНА

D'infinis tirages ne nécessitent pas, comme les ignorant le supposent, un temps infini; il suffit en réalité que le temps soit infiniment subdivisible.

J. L. Borges, *La loterie à Babylone*.*

Кинематика изучает геометрически все возможные движения в рамках данного пространства-времени. Так и теория мартингалов, подлинная кинематика теории вероятностей, интересуется всеми возможными эволюциями во времени вероятностей будущих событий. Со времени основания теории мартингалов Дж. Дубом более шестидесяти лет назад известно, что естественными рамками для нее является *вероятностное пространство с фильтрацией*. Речь идет о вероятностном пространстве, на котором задано возрастающее семейство $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathfrak{I}}$ σ-алгебр, называемое *фильтрацией*. Символ $\mathfrak{I}$ обозначает упорядоченное множество, играющее роль оси времени. Понятие фильтрации формализует процесс постепенного накапливания информации: события из σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ интерпретируются как события, про которые в момент времени n мы знаем наверняка, произошли они или нет.

Michel Émery. Espaces probabilisés filtrés: de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via les idées de Tsirelson. Séminaire BOURBAKI, 53 année, 2000–2001, no. 882, Novembre 2000. Перевод с французского Н. В. Цилевич. Публикация русского перевода осуществлена с любезного согласия автора.

*"Невежды предположат, что бесконечные жеребьевки требуют бесконечного времени; на самом же деле достаточно того, чтобы время поддавалось бы бесконечному делению". Х. Л. Борхес. *Лотерея в Вавилоне.* (Перевод В. Кулагиной-Ярцевой.)

В теории мартингалов с дискретным временем за ось времени $\mathfrak{I}$ обычно принимается множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Иная ситуация имеет место в случае так называемых обратных мартингалов, где $\mathfrak{I} = -\mathbb{N}$. Дуб показал, что обратные мартингалы ведут себя проще, чем обычные мартингалы, но около тридцати лет назад А. М. Вершик обнаружил, что в противоположность случаю $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$ описание фильтраций при $\mathfrak{I} = -\mathbb{N}$ приводит к совершенно неожиданным и противоречащим интуиции явлениям в окрестности $-\infty$.

Для определенности рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leqslant 0}$, для которой σ-алгебра $\cap_n \mathcal{F}_n$ является грубой (т.е. все принадлежащие ей события имеют вероятность ноль или единица) и при каждом n σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена σ-алгеброй $\mathcal{F}_{n-1}$ и независимым от $\mathcal{F}_{n-1}$ событием вероятности $\frac{1}{2}$ (иными словами, никакое нетривиальное событие не является изначально известным, и множество известных событий в каждый целый момент времени пополняется результатом подбрасывания монеты, осуществленного независимо от прошлого). При этих предположениях естественно ожидать, что существует такая последовательность подбрасываний монеты, осуществляемых в целые моменты времени начиная с $-\infty$, что σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ описывает результаты наблюдений, полученные до момента времени n. Однако Вершик, в частности,

- предъявил контрпримеры (вероятностные пространства с фильтрацией, которые он назвал нестандартными);
- привел необходимое и достаточное условие стандартности вероятностного пространства с фильтрацией;
- доказал *теорему о лакунарном изоморфизме*: всякое вероятностное пространство с фильтрацией описанного типа, не являющееся стандартным, можно превратить в стандартное с помощью замены времени, т.е. группируя последовательно поступающую информацию в пакеты: существует строго возрастающая подпоследовательность $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ и *независимые* случайные величины $(U_n)_{n \leqslant 0}$, такие, что при каждом n σ-алгебра $\mathcal{F}_{\nu(n)}$ порождена семейством $\{U_m,\ m \leqslant n\}$.

Эти идеи Вершика оставались неизвестными западным специалистам по теории вероятностей вплоть до 90-х годов, когда Б. Цирельсон и другие использовали их для того, чтобы построить, ко всеобщему изумлению, вероятностную меру, эквивалентную мере Винера, но такую, что новое вероятностное пространство с фильтрацией не изоморфно винеровскому пространству. Это вновь привлекло интерес к вопросам о броуновских фильтрациях, поставленных М. Йором более двадцати лет назад; а также побудило Вершика написать обзор [24] своих старых работ на эту тему, которым мы много пользовались при написании этого доклада.

Затем Цирельсон [20] ввел новый инвариант, *уютность*, который позволил доказать, что вероятностное пространство с фильтрацией, связанное с процессом Уолша (разновидностью броуновского движения со значениями в звезде, образованной по крайней мере тремя полупрямыми, исходящими из одной точки), также не изоморфно винеровскому. Эти идеи в настоящее время распространяются среди специалистов по теории вероятностей, результатом чего является появление большого количества работ, о которых мы немного поговорим в конце доклада.

1. Обозначения и определения

Вероятностное пространство с фильтрацией состоит из множества Ω, возрастающего семейства $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leqslant 0}$, называемого *фильтрацией*, σ-алгебр подмножеств множества Ω и вероятностной меры $\mathbb{P}$, заданной на σ-алгебре $\mathcal{F}_0$ (а следовательно, и на всех $\mathcal{F}_n$)[1]. Мы всегда предполагаем, что σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ (а следовательно, и все $\mathcal{F}_n$) существенно сепарабельна, т.е. порождена, с точностью до пренебрежимых событий, счетным семейством случайных величин или даже одной случайной величиной. (Вообще, когда мы говорим, что σ-алгебра или фильтрация чем-то порождена, подразумевается, что это верно с точностью до пренебрежимых событий.)

Множество $-\mathbb{N}$ играет роль оси времени. Дискретная, но не вполне упорядоченная структура этого множества является простейшей из структур, в которых могут наблюдаться явления, открытые Вершиком. В теории броуновского движения вместо $-\mathbb{N}$ роль оси времени будет играть множество $\mathbb{R}_+$.

[1] В теории вероятностей мера $\mathbb{P}$ традиционно задается на так называемой “объемлющей” σ-алгебре, которая может быть грубее $\mathcal{F}_0$; нам будет достаточно использовать упрощенное определение.

На интуитивном уровне вероятностное пространство с фильтрацией описывает эволюцию вероятностей во времени по мере поступления информации. Эта эволюция сама является случайной — в момент времени n вероятность события E есть случайная величина, равная условной вероятности[2] $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$; σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ содержит события, вероятность которых в момент времени n может принимать только экстремальные значения 0 и 1, исключая все промежуточные значения; а "черновая", не случайная вероятность $\mathbb{P}$ представляет собой состояние наших знаний — или нашего незнания — до начала эволюции.

Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией, то множество $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$, состоящее из классов эквивалентности событий из $\mathcal{F}_0$ относительно равенства почти наверное, есть (абстрактная) σ-алгебра с вероятностной мерой; *изоморфизм* между двумя вероятностными пространствами с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ есть биекция Ψ между $\mathcal{F}_0/\mathbb{P}$ и $\bar{\mathcal{F}}_0/\bar{\mathbb{P}}$, сохраняющая структуру σ-алгебр с вероятностной мерой, такая, что для любого $n \in -\mathbb{N}$ и любого $E \in \mathcal{F}_0$ условие $E \in \mathcal{F}_n \iff \Psi(E) \in \bar{\mathcal{F}}_n$ выполняется с точностью до пренебрежимых множеств. Таким образом, эти изоморфизмы продолжаются на пространства $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathrm{L}^0(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ классов эквивалентности случайных величин относительно равенства п.н.

Для простоты ограничимся рассмотрением наиболее элементарной из ситуаций, изученных Вершиком, а именно вероятностного пространства с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, удовлетворяющего следующим двум предположениям[3]:

Асимптотическая грубость: "исходная σ-алгебра" $\mathcal{F}_{-\infty} = \cap_n \mathcal{F}_n$ является грубой (содержит только события вероятности 0 и 1; другая формулировка: для всякого события E выполнено равенство $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{P}[E]$).

Диадичность: для всякого $n \leqslant 0$ существует такая случайная величина X_n, принимающая каждое из двух значений -1 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ и не зависящая от $\mathcal{F}_{n-1}$, что $\mathcal{F}_n$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathcal{F}_{n-1}$ и события $\{X_n = -1\}$ и $\{X_n = 1\}$.

[2] Технически условную вероятность $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ можно определить как плотность Радона–Никодима меры $F \mapsto \mathbb{P}(E \cap F)$ на σ-алгебре $\mathcal{F}_n$ относительно ограничения меры $\mathbb{P}$ на $\mathcal{F}_n$.

[3] В совокупности эти предположения означают, что $\mathcal{F}$ обладает свойством прогнозируемости относительно игры в орлянку.

Поставленный Вершиком вопрос формулируется следующим образом: достаточно ли этих двух условий для того, чтобы охарактеризовать вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с точностью до изоморфизма? Очевидным примером, удовлетворяющим этим условиям, является естественное пространство игры в орлянку; но существуют ли другие?

Заменяя ось времени $-\mathbb{N}$ на $\{0, 1, \ldots, N\}$ или $\mathbb{N}$, мы получим аналогичный и гораздо более простой вопрос, ответ на который будет положителен просто потому, что фильтрация $\mathcal{F}$ будет в этом случае порождена процессом X. Но в случае, когда ось времени есть $-\mathbb{N}$, такое рассуждение не проходит. Рассмотрим, например, процесс $Y = (Y_n)_{n \leqslant 0}$, порожденный игрой в орлянку (т.е. независимые случайные величины Y_n, принимающие значения ± 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$). Пусть $\mathcal{F}$ — фильтрация, порожденная Y, и $X_n = Y_{n-1}Y_n$. Процесс X также является игрой в орлянку, $\mathcal{F}$ и X удовлетворяют приведенным выше условиям, однако X не порождает $\mathcal{F}$, поскольку случайная величина Y_0, измеримая относительно $\mathcal{F}_0$, не зависит от процесса X и, следовательно, не может быть функционалом от случайных величин X_n.

В этом примере, хотя процесс X и не порождает σ-алгебру $\mathcal{F}$, вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, порожденное Y, тем не менее изоморфно пространству, порожденному X, поскольку процессы X и Y имеют одинаковые распределения (оба являются игрой в орлянку). Приведем теперь гораздо более удивительный пример, принадлежащий Вершику [24]. Это пример вероятностного пространства с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, удовлетворяющего двум приведенным выше условиям, но не порождающегося никакой игрой в орлянку.

Пример. Рассмотрим последовательность $(M_n)_{n \leqslant 0}$ случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, которые получаются друг из друга следующим образом. Пусть нам известны значения всех M_m при $m \leqslant n$. Чтобы получить M_{n+1}, подбросим монету и сохраним в десятичной записи числа M_n только четные или нечетные цифры в зависимости от выпадения орла или решки. В более научных терминах, M является стационарным марковским процессом с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$ и переходными вероятностями

$$0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots \to \begin{cases} 0, d_1 d_3 d_5 \ldots & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ 0, d_2 d_4 d_6 \ldots & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для данных $m \leqslant n \leqslant 0$ положим $r = 2^{n-m}$ и $M_m = 0, e_1 e_2 e_3 e_4 \ldots$; тогда условное распределение случайной величины M_n в момент времени m задается случайным выбором одного из r чисел $0, e_1 e_{r+1} e_{2r+1} \ldots$, $0, e_2 e_{r+2} e_{2r+2} \ldots$ и так далее до $0, e_r e_{2r} e_{3r} \ldots$ с вероятностью $1/r$. Поскольку эти r чисел являются независимыми случайными величинами с одинаковым равномерным распределением, из закона больших чисел следует, что это условное распределение при больших r, т.е. при m, стремящемся к $-\infty$, близко к равномерному, и асимптотическая грубость следует из марковского свойства. Диадический характер этого примера очевиден. Ясно также, что игра в орлянку, использованная при построении процесса M, не порождает всего пространства: например, первая цифра числа M_0 не зависит от этой игры в орлянку. Однако гораздо более тонкая задача состоит в том, чтобы показать, что *никакая* игра в орлянку не может породить это вероятностное пространство с фильтрацией. Вершик выводит доказательство этого утверждения из своего "критерия стандартности" (и оценок комбинаторного характера). Чтобы сформулировать этот критерий, нам понадобится несколько определений.

Определение 1. *Подфильтрацией* фильтрации $\mathcal{F}$ называется фильтрация $\mathcal{E}$, такая, что $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{F}_n$ при любом $n \in -\mathbb{N}$.

Говорят, что фильтрация $\mathcal{E}$ *погружена* в вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, если $\mathcal{E}$ является подфильтрацией $\mathcal{F}$ и для любого события $E \in \mathcal{E}_0$ и любого момента времени $n \in -\mathbb{N}$ условные вероятности $\mathbb{P}[E|\mathcal{E}_n]$ и $\mathbb{P}[E|\mathcal{F}_n]$ равны (п.н.).

Определение 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ и $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ — два вероятностных пространства с фильтрацией. Говорят, что пространство $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ *погружаемо* в $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$, если существует такая фильтрация $\bar{\mathcal{E}}$, погруженная в $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$, что вероятностные пространства с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ и $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathbb{P}})$ изоморфны.

Понятие погружаемости формализует очень простую идею, часто неформально выражаемую следующими словами: "Переходя при необходимости к более широкому пространству, можно предположить, что...".

Определение 3. Вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *стандартным непрерывным* пространством, если существует такая последовательность $(U_n)_{n \leqslant 0}$ независимых случайных величин с непрерывными[4] распределениями, что при каждом $n \in -\mathbb{N}$ σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена семейством $(U_m)_{m \leqslant n}$.

Вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется *стандартным*, если оно погружаемо в стандартное непрерывное пространство.

Нетрудно проверить, что любые два стандартных непрерывных пространства изоморфны (поскольку можно выбрать случайные величины U_n, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$); очевидно, что вероятностное пространство с фильтрацией, изоморфное стандартному, само является стандартным; легко проверить, что вероятностное пространство с фильтрацией, погружаемое в стандартное, само является стандартным (поскольку понятие погружаемости транзитивно).

Если $(U_n)_{n \leqslant 0}$ — последовательность независимых случайных величин (необязательно с непрерывными распределениями) и $\mathcal{F}_n$ — σ-алгебра, порожденная U_m при $m \leqslant n$, то пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ стандартно. Таким образом, чтобы установить, что пространство из вышеприведенного примера не порождается никакой игрой в орлянку, Вершику было достаточно доказать, что оно не является стандартным. Ниже мы увидим, как это было сделано.

Предложение 1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — стандартное вероятностное пространство с фильтрацией, $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$ — возрастающее неограниченное отображение и $\mathcal{E}$ — фильтрация, заданная формулой $\mathcal{E}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$. Тогда пространство $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ стандартно.*

Доказательство. Для числа n, такого, что $d = \nu(n) - \nu(n-1) \geqslant 2$, применим измеримую в обе стороны и сохраняющую меру Лебега биекцию между $[0, 1]$ и $[0, 1]^d$. □

Теорема о лакунарном изоморфизме (теорема 3 ниже) покажет, насколько далеко от истины утверждение, обратное предложению 1.

Следующее предложение показывает, что стандартность есть асимптотическое свойство в окрестности $n = -\infty$.

Предложение 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией и $m \in -\mathbb{N}$ — фиксированный момент времени.*

---

[4] Т.е. $\mathbb{P}[U_n = a] = 0$ для любого вещественного a.

Положим $\mathcal{F}_n^{m]} = \mathcal{F}_{m \wedge n}$. *Если пространство* $(\Omega, \mathcal{F}^{m]}, \mathbb{P})$ *стандартно, то пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *также стандартно.*

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что существует случайный вектор $(U_{m+1}, \ldots, U_0)$, не зависящий от $\mathcal{F}_m$ и равномерно распределенный на $[0,1]^{|m|}$. Тогда достаточно положить $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$ при $n \leqslant m$ и $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_m, U_{m+1}, \ldots, U_n)$ при $m < n \leqslant 0$ и заметить, что пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ погружаемо в пространство $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, которое является стандартным. $\square$

Замечание. Предложение 2 остается в силе, если заменить фиксированный момент времени m на произвольный момент остановки, т.е. такую случайную величину N со значениями в $-\mathbb{N}$ (значение $-\infty$ запрещено!), что при каждом $n \in -\mathbb{N}$ событие $\{N = n\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_n$.

2. Критерий Вершика

Прежде чем сформулировать необходимое и достаточное условие стандартности вероятностного пространства с фильтрацией, принадлежащее Вершику, необходимо ввести несколько понятий.

Если (K, ρ) — компактное метрическое пространство, то множество K' всех вероятностных мер на K метризуемо и компактно в слабой топологии (K' включается в двойственное пространство к $\mathrm{C}(K)$). Эту топологию можно определить при помощи метрики ρ', задаваемой формулой

$$\rho'(\mu, \nu) = \inf_{\lambda} \int\limits_{K \times K} \rho(k_1, k_2) \lambda(dk_1, dk_2) = \sup_{f} \left[\int f d\mu - \int f d\nu \right],$$

где инфимум берется по всем вероятностным мерам λ на произведении $K \times K$ с маргинальными распределениями μ и ν, а супремум — по всем функциям $f : K \to \mathbb{R}$, таким, что $|f(k_1) - f(k_2)| \leqslant \rho(k_1, k_2)$ для всех $k_1, k_2 \in K$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство и (K, ρ) — компактное метрическое пространство. Обозначим через $\mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ множество всех классов эквивалентности относительно меры $\mathbb{P}$ случайных величин на пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ со значениями в K. Если $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра в $\mathcal{A}$, то *условное распределение* случайной величины $R \in \mathrm{L}(\mathcal{A}, K)$ *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{B}$ определяется как случайная величина $R' \in \mathrm{L}(\mathcal{B}, K')$, такая, что для каждого борелевского множества $G \subset K$ равенство $[R'(\omega)](G) = \mathbb{P}[R \in$

$G|\mathcal{B}](\omega)$ выполняется для п.в. ω. Будем обозначать это условное распределение через $\mathcal{L}[R|\mathcal{B}]$.

Если теперь дано вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и компактное метрическое пространство (K, ρ), то для каждой случайной величины $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ можно последовательно определить случайные величины

$$\begin{aligned} \pi_0 R &= R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K), \\ \pi_{-1} R &= \mathcal{L}[\pi_0 R|\mathcal{F}_{-1}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-1}, K'), \\ \pi_{-2} R &= \mathcal{L}[\pi_{-1} R|\mathcal{F}_{-2}] \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{-2}, K'') \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Обозначим через (K_n, ρ_n) n-ю итерацию пространства (K, ρ) относительно преобразования, переводящего (K, ρ) в (K', ρ'). Таким образом, для каждого $n \leqslant 0$ определена случайная величина $\pi_n R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K_n)$, которую можно назвать *итерированным прогнозом* случайной величины R в момент времени n.

При $n < -1$ этот итерированный прогноз $\pi_n R$ содержит, вообще говоря, значительно больше информации, чем обычное условное распределение $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$: последнее указывает только состояние в момент времени n прогноза относительно значения, принимаемого случайной величиной R; в то время как $\pi_n R$ содержит также предсказание того, как сами эти прогнозы будут изменяться с течением времени, и так далее вплоть до n-го уровня. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим, например, три независимые (непостоянные) случайные величины N, X_{-1} и X_0, где N принимает значения -1 и 0, а X_{-1} и X_0 имеют одинаковые распределения. Предположим, что $\mathcal{F}_{-2} = \sigma(N)$, $\mathcal{F}_{-1} = \sigma(N, X_{-1})$ и $\mathcal{F}_0 = \sigma(N, X_{-1}, X_0)$, и рассмотрим случайную величину $R = X_N$. Случайная величина $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{-2}]$, являющаяся константой, говорит только о том, что R не зависит от $\mathcal{F}_{-2}$ и имеет то же распределение, что X_{-1} и X_0. В то время как более информативная величина $\pi_{-2} R$ говорит о том, что при $N = -1$ случайная величина R будет полностью известна в момент времени -1, а при $N = 0$ случайная величина R будет еще абсолютно неизвестна в момент времени -1.

Теорема 1 (Критерий Вершика). *Для того чтобы вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ было стандартным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующему критерию, в котором (K, ρ) есть компакт $[0, 1]$ с обычной метри-*

кой. Для любой случайной величины $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ *существует такая последовательность* $(\mu_n)_{n \leqslant 0}$*, что* $\mu_n \in K_n$ *при любом* n *и* $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \mu_n)]$ *стремится к нулю при* $n \to -\infty$.

Для того чтобы σ-алгебра $\mathcal{F}_{-\infty}$ была грубой, необходимо и достаточно, чтобы условные распределения $\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_n]$ становились детерминированными при $n \to -\infty$. Критерий Вершика, гораздо более сильное условие, требует, чтобы итерированные прогнозы $\pi_n R$ становились детерминированными при $n \to -\infty$.

Замечания. 1) Можно сформулировать критерий Вершика, не используя явным образом детерминированную последовательность μ_n. Действительно, пусть X — случайная величина со значениями в (K, ρ). Обозначим через ξ ее распределение, через ϕ функцию $k \mapsto \mathbb{E}[\rho(X, k)]$ на K и назовем разбросом случайной величины X число

$$\operatorname{disp} X = \mathbb{E}[\phi \circ X] = \int\int_{K \times K} \rho(k_1, k_2)\xi(dk_1)\xi(dk_2).$$

Тогда имеет место двусторонняя оценка

$$\inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)] \leqslant \operatorname{disp} X \leqslant 2 \inf_{k \in K} \mathbb{E}[\rho(X, k)].$$

Таким образом, мы получаем, что критерий Вершика эквивалентен следующему условию: $\operatorname{disp} \pi_n R \to 0$ *при* $n \to -\infty$ *для любой случайной величины* $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$.

2) Критерий остается в силе, если заменить отрезок $[0, 1]$ произвольным бесконечным компактным метрическим пространством, а также если заменить фразу "для любой случайной величины R со значениями в $[0, 1]$" на "для любого пространства (K, ρ), где K — конечное множество с метрикой $\rho(k_1, k_2) = \delta_{\{k_1 \neq k_2\}}$, и любой случайной величины R со значениями в K". Но я не знаю, получится ли эквивалентное условие, если ограничиться рассмотрением пространств K, состоящих только из двух точек, т.е. заменить случайные величины R событиями из σ-алгебры $\mathcal{F}_0$. (Это условие заведомо эквивалентно критерию Вершика, если существует момент остановки $N > -\infty$ и случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_0$, не зависящая от $\mathcal{F}_N$ и имеющая непрерывное распределение; но, например, в диадическом случае пространство не удовлетворяет этому условию.)

Необходимость критерия Вершика (которая используется для доказательства того, что пространство из вышеприведенного примера не является стандартным) нетрудно проверить при помощи следующих трех рассуждений:

a) *Устойчивость относительно погружений.* Если фильтрация $\mathcal{F}$ погружена в пространство $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ и это пространство удовлетворяет критерию Вершика, то пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ также ему удовлетворяет. Это немедленно следует из того, что при погружении итерированные прогнозы $\pi_n R$ случайной величины R, измеримой относительно $\mathcal{F}_0$, вычисленные в фильтрациях $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, совпадают. Поэтому для того чтобы показать, что любое стандартное пространство удовлетворяет критерию, достаточно доказать, что ему удовлетворяет любое пространство, порожденное процессом $(U_n)_{n\leqslant 0}$, состоящим из независимых случайных величин. Таким образом, мы приходим к случаю $\mathcal{F}_n = \sigma(U_m,\, m \leqslant n)$.

b) *Робастность прогноза.* Если R и S — $\mathcal{F}_0$-измеримые случайные величины со значениями в $K = [0,1]$, то, используя определение метрики ρ', нетрудно проверить, что выполняется неравенство $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \pi_n S)] \leqslant \mathbb{E}[\rho(R,S)]$ (точнее, процесс $(\rho_n(\pi_n R, \pi_n S))_{n\leqslant 0}$ является субмартингалом, но нам это не понадобится). При доказательстве того, что $\pi_n R$ близко к константе при достаточно малом n, это неравенство позволяет ограничиться случайными величинами R из плотного подмножества множества $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$.

c) *Прогноз функционала инноваций.* В качестве плотного подмножества множества $\mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ возьмем множество случайных величин вида $f(U_{n+1}, \ldots, U_0)$, где $n \leqslant 0$ и $f : \mathbb{R}^{|n|} \to K$ — борелевская функция; его плотность следует из классической теоремы Дуба о мартингалах ($\mathfrak{I} = \mathbb{N}$). Если R — случайная величина указанного вида, то по индукции немедленно получаем, что при каждом $m \in \{n, \ldots, 0\}$ итерированный прогноз $\pi_m R$ имеет вид $g_m(U_{n+1}, \ldots, U_m)$, где $g_m : \mathbb{R}^{m-n} \to K_m$ — борелевская функция (именно в этом месте используется независимость случайных величин U_l). В частности, при $m = n$ мы видим, что случайная величина $\pi_n R$ является константой. Следовательно, это же будет верно, если заменить n на произвольный предшествующий момент времени. Необходимость критерия установлена.

Сложнее доказать, что критерий Вершика является достаточным условием стандартности. Мы наметим только основные шаги этого доказательства. Подробности могут быть найдены в обзоре Вершика [24]; на более вероятностном языке они изложены в [11]. Несколько иной метод предложен в работе Фельдмана и Смородинского [13].

Пусть в вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ заданы две σ-подалгебры $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, причем $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Напомним, что для того чтобы существовала случайная величина X, измеримая относительно $\mathcal{B}$, имеющая непрерывное распределение, не зависящая от $\mathcal{C}$ и такая, что $\mathcal{C} \vee \sigma(X) = \mathcal{B}$ (такую случайную величину мы будем называть *дополнением к $\mathcal{C}$ в $\mathcal{B}$*), необходимо и достаточно, чтобы любая случайная величина V, удовлетворяющая условию $\mathcal{C} \vee \sigma(X) = \mathcal{B}$, имела непрерывное распределение. В этом случае будем говорить, что σ-алгебра $\mathcal{B}$ *условно непрерывна относительно* $\mathcal{C}$. Вероятностное пространство с фильтрацией, в котором каждая σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ условно непрерывна относительно $\mathcal{F}_{n-1}$, будем называть пространством *непрерывного типа*. Для этого типа пространств имеет место неравенство, в некотором роде обратное неравенству из п. b) выше.

Лемма 1. *Пусть имеется вероятностное пространство с фильтрацией непрерывного типа, и пусть $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$ и $L \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_{n-1}, K')$ — ступенчатые случайные величины, причем значения (в K'), принимаемые величиной L, являются вероятностными мерами (на K) с конечными носителями. Тогда существует случайная величина $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K)$, удовлетворяющая условиям $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$ и $\mathbb{E}[\rho(R, S)] = \mathbb{E}[\rho'(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L)]$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду слабой компактности множества вероятностных мер на $K \times K$ инфимум в определении $\rho'(\mu, \nu)$ достигается на некоторой мере λ. Если, кроме того, пространство K конечно, то эта оптимальная мера λ может быть выбрана измеримой функцией пары (μ, ν).

По предположению существует такое конечное множество $H \subset K$, что значения, принимаемые величиной R, принадлежат H, а значения (в конечном числе), принимаемые величиной L, являются вероятностными мерами с носителями в H. Полагая $\mu = \mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega)$ и $\nu = L(\omega)$, получаем, что для почти всех ω существует вероятностная мера $\lambda(\omega)$ на $H \times H$, измеримая относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ как функция от ω и удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k\in H}\lambda(\omega,\cdot,k)=\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega),\qquad \sum_{h\in H}\lambda(\omega,h,\cdot)=L(\omega)$$

и

$$\sum_{(h,k)\in H\times H}\rho(h,k)\lambda(\omega,h,k)=\rho'(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}](\omega),L(\omega)).$$

Положим $\Sigma(\omega)=\sum_{k\in h}\lambda(\omega,R(\omega),k)=\sum_{h\in H}\delta_{\{R=h\}}\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]$. Из равенства

$$\mathbb{P}[\Sigma=0 \text{ и } R=h\,|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\delta_{\{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]=0\}}=0$$

получаем, что $\mathbb{P}[\Sigma=0]=0$ и $\Sigma>0$ п.н. Обозначим точки множества H через $k_1,\ldots,k_p$ и положим

$$Q_j(\omega)=\frac{\lambda(\omega,R(\omega),k_1)+\ldots+\lambda(\omega,R(\omega),k_j)}{\Sigma(\omega)}$$

при $0\leqslant j\leqslant p$. Эти случайные величины измеримы относительно $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ и удовлетворяют неравенствам $0=Q_0\leqslant Q_1\leqslant\ldots\leqslant Q_p=1$. Но поскольку R — ступенчатая случайная величина, то σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ условно непрерывна относительно $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$. Следовательно, существует дополнение X к $\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)$ в $\mathcal{F}_n$, причем случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Это позволяет определить случайную величину S, измеримую относительно $\mathcal{F}_n$ и принимающую значения в множестве H, формулой

$$S(\omega)=k_j\iff Q_{j-1}(\omega)<X(\omega)\leqslant Q_j(\omega),$$

и мы получаем

$$\mathbb{P}[S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)]=\frac{\lambda(\omega,R(\omega),k)}{\Sigma(\omega)};$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ и } S=k|\mathcal{F}_{n-1}\vee\sigma(R)]=\delta_{\{R=h\}}\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]};$$

$$\mathbb{P}[R=h \text{ и } S=k|\mathcal{F}_{n-1}]=\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]\frac{\lambda(\omega,h,k)}{\mathbb{P}[R=h|\mathcal{F}_{n-1}]}=\lambda(\omega,h,k)$$

(где дробь полагается равной нулю, если ее знаменатель обращается в нуль). Следовательно, условное распределение пары

(R, S) относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$ совпадает с λ. Отсюда следует, с одной стороны, что $\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}] = L$, а с другой, что

$$\mathbb{E}[\rho(R, S)|\mathcal{F}_{n-1}] = \sum_{(h,k)\in H\times H} \rho(h, k)\lambda(h, k) = \rho'(\mathcal{L}[S|\mathcal{F}_{n-1}], L),$$

откуда $\mathbb{E}[\rho(R, S)] = \mathbb{E}[\rho'(\mathcal{L}[R|\mathcal{F}_{n-1}], L)]$. □

Положим $K_0^\circ = K$ и для произвольного $n < 0$ обозначим через K_n° множество, содержащееся в K_n и состоящее из всех вероятностных мер, сосредоточенных на конечных наборах точек из K_{n+1}°. Легко проверить, что для случайной величины $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ каждая из $|n|+1$ случайных величин $\pi_n R, \pi_{n+1} R, \ldots, \pi_0 R$ является ступенчатой тогда и только тогда, когда величина $\pi_n R$ ступенчатая и принимает значения из K_n°. Будем называть случайные величины R, обладающие этим свойством, *ступенчатыми до порядка* n. Используя эти обозначения и применяя лемму 1 $|n|$ раз, легко получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *В предположении, что рассматриваемое пространство является пространством непрерывного типа, пусть* $n \in -\mathbb{N}$, $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ *и* $L \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_n, K_n^\circ)$. *Предположим, кроме того, что случайная величина* L *ступенчатая. Тогда существует такая случайная величина* $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, *ступенчатая до порядка* n, *что* $\pi_n S = L$ *и* $\mathbb{E}[\rho(R, S)] = \mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, L)]$.

Это утверждение имеет место для любого вероятностного пространства с фильтрацией непрерывного типа. Чтобы доказать достаточность критерия Вершика, предположим, что условие критерия выполнено, и попробуем установить, что пространство является стандартным. Погружая $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, если необходимо, в более грубое пространство, мы должны построить процесс, порождающий фильтрацию и состоящий из независимых случайных величин. Переходя к произведению, т.е. независимому укрупнению при помощи стандартного непрерывного вероятностного пространства с фильтрацией, и проверяя, что критерий устойчив относительно таких произведений, мы сводим задачу к случаю, когда $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ является пространством непрерывного типа.

Пусть $R \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$ и $\varepsilon > 0$. По предположению существуют $n \leqslant 0$ и $\mu \in K_n$, такие, что $\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n R, \mu)] < \varepsilon$. Легко проверить, что K_n° плотно в K_n. Поэтому меру μ можно выбрать из K_n°. Беря в лемме 2 постоянную случайную величину $\mu = L$, получаем случайную величину $S \in \mathrm{L}(\mathcal{F}_0, K)$, такую, что $\pi_n S$ детерминирована, $\pi_{n+1}S, \dots, \pi_0 S$ — ступенчатые и $\mathbb{E}[|S-R|] < \varepsilon$. Поскольку каждая из величин $\pi_l S$ является ступенчатой, то для любого $l \in \{n+1, \dots, 0\}$ существует дополнение X_l к $\mathcal{F}_{l-1} \vee \sigma(\pi_l S)$ в $\mathcal{F}_l$. Определим фильтрацию $\mathcal{E}$, беря в качестве $\mathcal{E}_l$ грубую σ-алгебру при $l \leqslant n$ и

$$\mathcal{E}_l = \sigma(\pi_{n+1}S, X_{n+1}, \pi_{n+2}S, X_{n+2}, \dots, \pi_l S, X_l) \quad \text{при} \quad l > n.$$

Можно доказать, что $\mathcal{F}_n \vee \mathcal{E}_l = \mathcal{F}_l$ для всех $l \geqslant n$, что $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{F}_n$ независимы и, следовательно, что $\mathcal{E}$ погружена в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. При $l \in \{n+1, \dots, 0\}$ существует дополнение U_l к $\mathcal{E}_{l-1}$ в $\mathcal{E}_l$. С необходимостью U_l является также дополнением к $\mathcal{F}_{l-1}$ в $\mathcal{F}_l$. Поскольку случайная величина S измерима относительно $\mathcal{E}_0$, она является борелевской функцией от $U_{n+1}, \dots, U_0$. Таким образом, установлено, что *случайные величины вида $f(U_{n+1}, \dots, U_0)$, где f — борелевская функция, $n \in -\mathbb{N}$ и каждое U_l является дополнением к $\mathcal{F}_{l-1}$ в $\mathcal{F}_l$, плотны в* L^1.

Если, кроме того, R — ступенчатая случайная величина со значениями в конечном подмножестве F пространства K, то, заменяя f на $g \circ f$, где функция $g : K \to F$ тождественна на F и непрерывна во всех точках пространства K, мы получаем, что существует случайная величина S описанного выше вида, которая близка к R в сильном смысле, т.е. $\mathbb{P}[S \neq R] < \varepsilon$.

Предположим теперь, что $n \in -\mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, дополнения $U_{n+1}, \dots, U_0$ – как выше и $R \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$. В силу существенной сепарабельности существует такая возрастающая последовательность $(\mathcal{F}_n^k)_{k \geqslant 0}$ существенно конечных σ-подалгебр в $\mathcal{F}_n$, что $\vee_k \mathcal{F}_n^k = \mathcal{F}_n$. Тогда по теореме Дуба R аппроксимируется в L^1 случайными величинами вида $\phi(T, U_{n+1}, \dots, U_0)$, где T — ступенчатая функция, измеримая относительно $\mathcal{F}_n$. Применяя последнее замечание к T вместо R и сдвинутой фильтрации $(\mathcal{F}_m)_{m \leqslant n}$, получаем, что существует такая случайная величина T', измеримая относительно $\mathcal{F}_n$, что $\mathbb{P}[T' \neq T] < \varepsilon$ и T' имеет вид $T' = \psi(V_{m+1}, \dots, V_n)$, где $m < n$ и V_l есть дополнение к $\mathcal{F}_{l-1}$ в $\mathcal{F}_l$. Отсюда следует, что R аппроксимируется функциями вида $\phi(\psi(V_{m+1}, \dots, V_n), U_{n+1}, \dots, U_0)$. Итого: для данных $U_{n+1}, \dots, U_0$ мы получаем плотное подмножество в $\mathrm{L}^1(\mathcal{F}_0)$, рассматривая случайные величины из L^1 вида $h(V_{m+1}, \dots, V_n, U_{n+1}, \dots, U_0)$, где h — борелевская функция, $m < n$ и V_l является дополнением к $\mathcal{F}_{l-1}$ в $\mathcal{F}_l$

при $m < l \leqslant n$.

Для завершения доказательства рассмотрим интегрируемую случайную величину R, порождающую σ-алгебру $\mathcal{F}_0$. Начнем с $n_0 = -1$ и дополнения U_0 к $\mathcal{F}_{-1}$ в $\mathcal{F}_0$. Предыдущий этап доказательства позволяет шаг за шагом построить строго убывающую последовательность $(n_k)_{k\geqslant 0}$ и дополнения U_l к $\mathcal{F}_{l-1}$ в $\mathcal{F}_l$, такие, что для каждого k случайная величина R находится на расстоянии, не превосходящем $1/k$, от некоторого элемента пространства $\mathrm{L}^1(\sigma(U_l,\, n_k < l \leqslant 0))$. Отсюда следует, что случайная величина R измерима относительно предельной σ-алгебры $\sigma(U_l,\, l \in -\mathbb{N})$; и σ-алгебра $\mathcal{F}_0$, порожденная случайной величиной R, порождается также случайными величинами U_l. Наконец, фильтрация $\mathcal{F}'$, порожденная случайными величинами U_l, погружена в $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и удовлетворяет условию $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}_0$. Эти два свойства влекут $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, откуда следует стандартность пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\square$

Как было сказано выше, критерий Вершика применим на практике, поскольку он позволяет проверить, что пространство из примера, приведенного в §1, не является стандартным. Другая не выдуманная специально ситуация, в которой критерий демонстрирует свою эффективность, это проблема "T, T^{-1}", решенная Д. Хайклен и К. Хоффманом [15]: если T — автоморфизм вероятностного пространства $(E, \mathcal{E}, \mu)$ и T имеет ненулевую энтропию, то марковский процесс со значениями в E, имеющий стационарное распределение μ и переходные вероятности $p(x, \cdot) = \frac{1}{2}(\delta_{Tx} + \delta_{T^{-1}x})$, порождает вероятностное пространство с фильтрацией, не являющееся стандартным.

Приведем еще один результат в том же ключе, также заимствованный из работы Вершика [24].

Теорема 2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство с фильтрацией. Предположим, что при каждом $n \leqslant 0$ σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ порождена σ-алгеброй $\mathcal{F}_{n-1}$ и случайной величиной, не зависящей от $\mathcal{F}_{n-1}$ и имеющей либо непрерывное распределение, либо равномерное распределение на конечном множестве. Тогда пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ является стандартным, (если и) только если оно порождено процессом, состоящим из независимых случайных величин.*

За доказательством мы отсылаем читателя к работе Вершика

[24]. Вершик приводит полное доказательство только для случая, когда ни одна из случайных величин не имеет непрерывного распределения; однако в общем случае моменты времени n, для которых σ-алгебра $\mathcal{F}_n$ допускает непрерывную случайную величину, не зависящую от $\mathcal{F}_{n-1}$, легко обрабатываются при помощи тех же рассуждений, что мы использовали выше. Вариант этого метода предложен Дж. Фельдманом и М. Смородинским ([13, теорема 3.2]).

В теореме 2 нельзя опустить предположение о равномерности распределений. Очень простой контрпример доставляет стационарный марковский процесс $(X_n)_{n\leqslant 0}$, принимающий всего два значения, такой, что $\mathbb{P}[X_n = X_{n-1}] = p$, где $p \in]0,1[$ фиксировано и отлично от $\frac{1}{2}$. Используя метод спаривания из критерия Н-уютности, о котором мы поговорим в конце доклада, легко получить, что вероятностное пространство с фильтрацией, порожденное X, является стандартным. Однако это пространство не может быть порождено процессом, состоящим из независимых случайных величин, так как единственными невырожденными событиями из $\mathcal{F}_n$, не зависящими от $\mathcal{F}_{n-1}$, являются события $\{X_n = X_{n-1}\}$ и $\{X_n \neq X_{n-1}\}$ (именно здесь используется ограничение $p \neq \frac{1}{2}$) и σ-алгебра, порожденная всеми событиями такого вида, не зависит от случайной величины X_0 (можно поменять местами две точки пространства состояний) и, следовательно, строго содержится в $\mathcal{F}_0$.

На первый взгляд, теория Вершика кажется удивительной, а существование нестандартных пространств — неожиданным. Но привыкнув к этому факту и освоившись с несколькими примерами, сталкиваешься со вторым потрясением — теоремой о лакунарном изоморфизме, согласно которой нестандартное пространство всегда может быть превращено в стандартное при помощи подходящей замены времени.

Теорема 3 (о лакунарном изоморфизме). *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — *вероятностное пространство с фильтрацией, причем исходная* σ-*алгебра* $\mathcal{F}_{-\infty}$ *является грубой. Тогда существует строго возрастающее отображение* $\nu : -\mathbb{N} \to -\mathbb{N}$, *такое, что пространство* $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, *где* $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{\nu(n)}$, *стандартно.*

Доказательство этого удивительного результата похоже на вышеприведенное доказательство теоремы 1. В нашем распоряжении теперь нет мощного условия, предоставляемого критерием Вершика, но мы знаем, что все мартингалы сходятся к $-\infty$, и эту сходимость можно ускорить, группируя поступающую информацию в пакеты, соответствующие интервалам $]\nu(n-1), \nu(n)[$. Подробности могут быть найдены в [24] или [11].

3. Нестандартные замены мер

Начиная с этого места мы отказываемся от предположения, согласно которому ось времени $\mathfrak{I}$ всегда есть $-\mathbb{N}$: мы будем рассматривать также случай $\mathfrak{I} = \mathbb{R}_+$. В тех случаях, когда контекст допускает неоднозначное толкование, мы будем явно указывать, о какой оси времени идет речь, говоря о *непрерывном времени*, если $\mathfrak{I} = \mathbb{R}_+$, и о *дискретном времени*, если $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$. Моменты времени будут обозначаться через m или n в случае дискретного времени и через s или t в случае непрерывного времени.

Винеровским пространством мы будем называть вероятностное пространство с фильтрацией (с непрерывным временем), порожденное броуновским движением.

В 1995 году Дубинс, Фельдман, Смородинский и Цирельсон [8, 14] использовали критерий Вершика для построения на винеровском пространстве вероятностных мер со странными свойствами. Их конструкция начинается с бесконечной игры в орлянку $(X_n)_{n\leqslant 0}$ и порожденного ей вероятностного пространства с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. При помощи мартингала плотностей $(D_n)_{n\leqslant 0}$, являющегося блочно-марковским (со все более крупными блоками в окрестности $-\infty$), им удалось определить такую вероятностную меру $\mathbb{Q}$, эквивалентную $\mathbb{P}$ и даже удовлетворяющую условию $1-\varepsilon < d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = D_0 < 1+\varepsilon$, что пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ тем не менее не является стандартным! Примененная ими конструкция очень сложна и не является явной („поскольку такое-то множество имеет ненулевую меру, можно выбрать в нем точку...“); несмотря на две предпринятые попытки [18] и [4] ее упрощения, доказательство по-прежнему остается неудобоваримым. Напротив, перенос результата игры в орлянку на броуновское движение не представляет никакой трудности. Если имеется броуновское движение $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ с распределением $\bar{\mathbb{P}}$, то достаточно выбрать в $\mathbb{R}_+$ строго возрастающую последовательность $(t_n)_{n\leqslant 0}$ и определить плотность $d\bar{\mathbb{Q}}/d\bar{\mathbb{P}}$ как $\phi(\operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),\ n \leqslant 0)$, где ϕ — это функция, задающая $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$ исходя из процесса X_n игры в орлянку: $D_0 = \phi(X_n,\, n \leqslant 0)$.

Исторически, конструкция Дубинса–Фельдмана–Смородинского–Цирельсона явилась первым примером, дающим (отрицательный) ответ на следующий вопрос, поставленный М. Йором [27] в 1979 году. Назовем *слабо броуновским* вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, в котором фильтрация $\mathcal{F}$ обладает свойством прогнозируемости относительно броуновского движения. Это означает, что σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ грубая и все мартингалы являются стохастическими интегралами относительно этого броуновского движения. Понятие слабо броуновского пространства является аналогом в непрерывном времени диадического асимптотически грубого пространства с дискретным временем. Всякое ли слабо броуновское пространство порождено броуновским движением?

На самом деле, если иметь в своем распоряжении теорию Вершика и интересоваться только вопросом Йора, а не заменами мер, то рассуждение о переносе игры в орлянку на броуновское движение легко приводит к гораздо более простым примерам.

А именно, зададим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ два независимых объекта: броуновское движение $(B_t)_{t\geqslant 0}$ и фильтрацию с дискретным временем $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\leqslant 0}$, такую, что пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ не является стандартным, но при этом диадическое и асимптотически грубое (пример Вершика, приведенный выше перед определением стандартных пространств, прекрасно подходит под эти требования). Существуют случайные величины $(X_n)_{n\leqslant 0}$, такие, что X_n не зависит от $\mathcal{F}_{n-1}$, принимает значения 1 и -1 с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$ и $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(X_n)$. Кроме того, зададим в $\mathbb{R}_+$ строго возрастающую последовательность $(t_n)_{n\leqslant 0}$, стремящуюся к 0 при $n \to -\infty$. Заметив, что множество случайных величин $X'_n = X_n \operatorname{sgn}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ не зависит от B, определим новое броуновское движение $(B'_t)_{t\geqslant 0}$ формулой

$$B'_t = B'_{t_{n-1}} + X'_n (B_t - B_{t_{n-1}}),$$

если t лежит в интервале $I_n =]t_{n-1}, t_n[$ при $n \leqslant 0$, и формулой $B'_t = B'_{t_0} + (B_t - B_{t_0})$, если $t \in]t_0, +\infty[$. Заметим, что знак приращения $B'_{t_n} - B'_{t_{n-1}}$ совпадает с X_n. Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ — фильтрации (с непрерывным временем), порожденные процессами B и B'. Определим фильтрацию $\mathcal{G}$ с непрерывным временем формулой $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{n(t)} \vee \mathcal{B}'_t$, где $n(t)$ — наибольшее n, при котором $t_n \leqslant t$.

Заметим, что $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_n \vee \mathcal{B}'_t$ для любого n, при котором $t_n \leqslant t$. Поскольку приращения процесса B' в интервале I_n являются функцией от X_n и приращений процесса B в I_n, они не зависят от $\mathcal{F}_{n-1} \vee \mathcal{B}_{t_{n-1}}$, а следовательно, и от $\mathcal{G}_{t_{n-1}}$. Так как по определению фильтрации $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t_{n-1}} \vee \sigma(B'_s - B'_{t_{n-1}},\, s \in]t_{n-1}, t]) \qquad \text{при} \quad t \in]t_{n-1}, t_n],$$

то процесс B' является броуновским движением для фильтрации $\mathcal{G}$. Поскольку, кроме того, σ-алгебра $\mathcal{G}_{-\infty} \subset \mathcal{F}_{-\infty} \vee \mathcal{B}_0$ является грубой, то пространство $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ обладает свойством прогнозируемости относительно процесса B', а следовательно, является слабо броуновским. Однако $\mathcal{G}$ не может быть порождено никаким броуновским движением (и даже никаким процессом, приращения которого на интервалах I_n взаимно независимы), поскольку фильтрация $\mathcal{F}$ с дискретным временем, не являющаяся стандартной, погружена в пространство с дискретным временем $(\Omega, (\mathcal{G}_{t_n})_{n \leqslant 0}, \mathbb{P})$, которое, следовательно, тоже не является стандартным.

Прежде чем завершить этот параграф, укажем еще один контрпример, затрагивающий следующий близкий вопрос. Если начать с винеровского пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и производить достаточно регулярные замены времени, будут ли получаться пространства, изоморфные исходному? В работе [9] предложена конструкция, навеянная идеями Дубинса–Фельдмана–Смородинского–Цирельсона, но гораздо более простая, чем их замена времени. Эта конструкция позволяет построить семейство $(T_t)_{t \geqslant 0}$ времен остановки для $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, обладающее следующими свойствами: каждая функция $t \mapsto T_t(\omega)$ принадлежит классу C^∞, и ее производная dT_t/dt удовлетворяет неравенствам $1 - \varepsilon < dT_t/dt < 1 + \varepsilon$, но при этом фильтрация $(\mathcal{F}_{T_t})_{t \geqslant 0}$, получающаяся заменой времени, не порождается никаким броуновским движением. Эта конструкция также реализуется сначала в дискретном времени и только потом переносится на броуновское движение.

4. Уютность и тройные точки

Вернемся к вопросу Йора, упомянутому в предыдущем параграфе. С 1988 года М. Барлоу, Дж. Питман и М. Йор [3] подозревали, что контрпримером являются процессы Уолша. Это процессы со слабо броуновской фильтрацией, и упомянутые авторы предполагали, что она не порождается броуновским движением.

Простейшим процессом Уолша является подобие броуновского движения со значениями в звезде $T = \{z \in \mathbb{C} : z^3 \in \mathbb{R}_+\}$ с тремя лучами. Расстояние этого процесса от начала координат имеет то же распределение, что и обычное броуновское движение; но экскурсии от начала координат не снабжаются, как обычно, знаками ± 1 независимо друг от друга, а выбирают свое направление из трех лучей звезды, независимо друг от друга и равновероятно. Идея Барлоу–Питмана–Йора заключалась в том, что выбор из трех возможностей (трех лучей), осуществляемый процессом в случайные моменты выхода из начала координат, невозможен в броуновской фильтрации. Точнее, можно определить класс случайных моментов, *честных времен*[5], так, что все экскурсии начинаются только в такие моменты времени. Если L — честное время, то имеются две σ-алгебры $\mathcal{F}_L$ и $\mathcal{F}_{L+}$, представляющие соответственно события, известные к моменту времени L и известные сразу после момента времени L, причем $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_{L+}$. Пусть фильтрация $\mathcal{F}$ порождена процессом Уолша W. Обозначим через L честное время, равное последнему моменту времени до 2001, когда процесс W проходил через начало координат. Тогда σ-алгебра $\mathcal{F}_{L+}$ должна содержать случайную величину, принимающую *три* значения (луч, выбранный для выхода из начала координат, т.е. тот, на котором лежит точка W_{2001}) и не зависящую от $\mathcal{F}_L$. Стратегия, предложенная Барлоу, Питманом и Йором, состояла в том, чтобы доказать, что для произвольного честного момента времени L в фильтрации $\mathcal{F}$, порожденной броуновским движением, $\mathcal{F}_{L+}$ порождена σ-алгеброй $\mathcal{F}_L$ и случайной величиной, принимающей только *два* значения. Это свойство, названное Йором [28] “гипотезой Барлоу”, делало бы невозможным существование в $\mathcal{F}_{L+}$ трехзначной случайной величины, не зависящей от $\mathcal{F}_L$, а следовательно, и существование процесса Уолша в $\mathcal{F}$.

Значительная часть этой программы была успешно реализована Цирельсоном в 1996 году. Введя принципиально новое понятие *уютности*, он показал [20], что процессы Уолша не могут

[5] Это в точности концы опциональных множеств.

быть погружены в фильтрацию, порожденную броуновским движением, даже неодномерным или бесконечномерным. Одно из существенных нововведений его подхода состоит в том, что он работает не с *одним* процессом Уолша, который предположительно содержится в *одной* броуновской фильтрации, а рассматривает одновременно *две* копии этой ситуации, которые, с одной стороны, очень близки (условие (iv) определения 6 ниже), но в то же время и чуть-чуть независимы (условие (iii)).

Определение 4. Говорят, что две фильтрации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ (с дискретным или непрерывным временем), заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *совместно погружены*, если обе они погружены в одну и ту же третью фильтрацию.

Легко видеть, что в этом случае обе фильтрации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ погружены в наименьшую фильтрацию, содержащую их обеих.

Определение 5. Говорят, что две фильтрации $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ (с непрерывным временем), заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ и совместно погруженные, *разделены*, если существует такая константа $c < 1$, что для каждого мартингала M в фильтрации $\mathcal{F}$ и каждого мартингала N в фильтрации $\mathcal{G}$ выполнено неравенство

$$[M, N]^2 \leqslant c\,[M, M][N, N].$$

Без константы c последнее неравенство было бы обычным неравенством Кунита–Ватанабе. Константа усиливает это неравенство равномерно по всем мартингалам в фильтрациях $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Заметим, что условие совместной погруженности придает смысл указанной формуле: вычисление ковариации $[M, N]$ осуществляется в общей фильтрации, в которую погружены $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. Мы используем это определение только в случае, когда все мартингалы в фильтрациях $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ непрерывны, — это именно та ситуация, которую рассматривал Цирельсон, когда он изобрел понятие уютности. В этом случае его можно интерпретировать как некоторую частичную независимость, причем настоящая независимость получается при $c = 0$.

Определение 6. Говорят, что вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (с непрерывным временем) *уютно*, если для любой случайной величины $R \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ и любого $\varepsilon > 0$ существует вероятностное пространство $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ с двумя фильтрациями $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$, такими, что

(i) три вероятностные пространства с фильтрациями $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\bar{\Omega}, \mathcal{F}', \bar{\mathbb{P}})$ и $(\bar{\Omega}, \mathcal{F}'', \bar{\mathbb{P}})$ изоморфны;

(ii) фильтрации $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ совместно погружены;

(iii) фильтрации $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}''$ разделены (константа разделения c может, разумеется, зависеть от R и ε);

(iv) случайные величины $R' \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}'_\infty)$ и $R'' \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}''_\infty)$, полученные из случайной величины R при помощи изоморфизмов из п. (i), удовлетворяют условию $\bar{\mathbb{E}}[|R' - R''|] < \varepsilon$.

Это означает, что можно заставить сосуществовать (ii) две копии (i) пространства, одновременно близкие (iv) и немного независимые (iii). Прием Цирельсона заключался в том, чтобы установить, что вероятностные пространства с фильтрацией, порожденные броуновскими движениями (возможно, многомерными), всегда являются уютными, тогда как пространство, порожденное процессом Уолша, не всегда уютно. Из этого будет следовать, что процесс Уолша не может порождать то же пространство, что и броуновское движение. Точнее, поскольку всякое вероятностное пространство с фильтрацией, погруженное в уютное пространство, само является уютным (это легко вытекает из определения 6), то пространство, порожденное процессом Уолша, непогружаемо ни в какое пространство, порожденное броуновским движением.

Таким образом, первый этап рассуждений Цирельсона состоит в следующем.

Теорема 4. *Вероятностное пространство с фильтрацией, порожденное броуновским движением, является уютным.*

Доказательство. Возьмем две независимые копии B^0 и $B^{\pi/2}$ броуновской образующей и рассмотрим вероятностное пространство с фильтрацией $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$, порожденное парой $(B^0, B^{\pi/2})$. Для каждого вещественного α процесс $B^\alpha = B^0 \cos\alpha + B^{\pi/2} \sin\alpha$ является броуновским движением в $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$. Таким образом, порожденная им фильтрация $\mathcal{F}^\alpha$ погружена в это пространство. Если число $\alpha - \beta$ не кратно π, то фильтрации $\mathcal{F}^\alpha$ и $\mathcal{F}^\beta$ разделены с константой $c = \cos^2(\alpha - \beta) < 1$, поскольку усиленное неравенство Кунита–Ватанабе, выполненное для броуновских движений B^α и

B^β, распространяется на другие мартингалы с помощью метода прогноза.

Для завершения доказательства остается только установить, что для данного ограниченного функционала R^0 от процесса B^0 его копия R^α в фильтрации $\mathcal{F}^\alpha$ удовлетворяет условию $\bar{\mathbb{E}}[|R^\alpha - R^0|] < \varepsilon$ при α, достаточно близких к 0 (но не равных нулю, поскольку фильтрации $\mathcal{F}^\alpha$ и $\mathcal{F}^0$ разделены). Это легко вытекает из следующей красивой теоремы, хорошо известной среди российских специалистов по теории вероятностей как “лемма Слуцкого”.

Если последовательность $(Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ одинаково распределенных случайных величин сходится по вероятности к предельной величине Z_∞ и h — борелевская функция, то последовательность $(h\circ Z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ сходится по вероятности к $h\circ Z_\infty$. Действительно, если не требовать одинаковой распределенности случайных величин Z_p, то это утверждение верно для любой непрерывной функции h. Если же Z_p одинаково распределены, то множество тех функций h, для которых оно имеет место, замкнуто относительно простых пределов последовательностей. $\square$

Второй этап доказательства формулируется столь же просто, как и первый, однако его реализация требует значительно бо́льших усилий.

Теорема 5. *Если в вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ существует процесс Уолша (для фильтрации $\mathcal{F}$), то это пространство не является уютным.*

Элементы доказательства. Рассматривая две копии фильтрации $\mathcal{F}$, совместно погруженные и разделенные, мы получаем два процесса Уолша W' и W'' в одной и той же фильтрации. Прежде всего Цирельсон доказывает, что моменты времени, в которые оба процесса W' и W'' находятся в начале координат, редки: измеренное в терминах локального времени одного из этих процессов, время, проводимое вторым процессом в начале координат, равно нулю. Это устанавливается при помощи сравнения решений неравенств в частных производных. Другое доказательство (использующее стохастический анализ) изложено в работе [12]. Именно в этом месте используется условие разделенности.

Затем Цирельсон рассматривает расстояние $D_t = d(W'_t, W''_t)$, измеренное на звезде T. Процесс D является субмартингалом, компенсатор которого возрастает только в тех точках, в которых процессы W' и W'' принимают равные значения, либо же, когда хотя бы один из них находится в начале координат. Результат предыдущего абзаца позволяет оценить этот компенсатор снизу суммой членов локальных времен процессов W' и W'' в начале координат, вычисляемых по отдельности. Таким образом мы получаем оценку $\bar{E}[D_t] \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{2t/\pi}$ (если заменить T звездой с r лучами вместо трех, коэффициент $\frac{1}{3}$ заменится на $\frac{r-2}{2}$ и теорема останется в силе при $r > 2$).

Наконец, эта нижняя оценка, универсальная и не зависящая, в частности, от константы разделения c, показывает, что комплексные случайные величины W_t' и W_t'' не являются близкими, что противоречит условию (iv) из определения 6. Поэтому пространство не может быть уютным. □

Применяя аналогичные методы к процессам со значениями в несколько более общих множествах T ("полумартингалам-паукам", т.е. непрерывным полумартингалам, компенсаторы которых сосредоточены на множестве моментов времени, в которые процесс находится в начале координат), Цирельсон выводит, в предположении уютности, формулу $dL_1 \wedge dL_2 \wedge dL_3 = 0$, где L_i — локальное время в начале координат проекции процесса на i-й луч. Пусть теперь U_1, U_2 и U_3 — три ограниченные попарно непересекающиеся области в $\mathbb{R}^d$. Беря в качестве полумартингала-паука процесс $(G_1 \circ B, G_2 \circ B, G_3 \circ B)$, где G_i — функция Грина в области U_i, а B — броуновское движение в $\mathbb{R}^d$, он получает соотношение $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 = 0$, где μ_i — гармоническая мера на границе области U_i (во внутренних терминах определен только класс эквивалентности меры μ_i). Этот результат, согласно которому в произвольной размерности d гармонические границы имеют очень мало тройных точек, был высказан в качестве гипотезы К. Бишопом [5] в 1991 году (в размерности $d = 3$ было известно только, что кратность точек $\leqslant 4$, а в больших размерностях — что кратность $\leqslant 10$). Поиск невероятностного доказательства этого факта, по словам Цирельсона [21], является вызовом для классического анализа!

Гипотеза Барлоу была полностью доказана в работе [2] (см. также более простое доказательство в [6]) с использованием введенной Цирельсоном техники, но со слегка видоизмененным определением уютности. Идея этого доказательства состоит в том, чтобы, начав с честного момента времени L, такого, что $\mathcal{F}_{L+}$ не порождается σ-алгеброй $\mathcal{F}_L$ и двузначной случайной величиной, построить мартингал со значениями в T ("мартингал-паук"), покидающий начало координат в момент времени L, и затем применить к нему рассуждения, использованные Цирельсоном для процессов Уолша, чтобы доказать, что пространство не может быть уютным.

Уютность (или, скорее, ее отсутствие) была также использована С. Ватанабе [26] для доказательства того, что некоторая диффузия на плоскости, симметричная относительно меры Лебега и имеющая непрерывные переходные вероятности, которая была введена Икеда и Ватанабе в 1971 году, также не может быть погружена в винеровское пространство. Этот процесс разворачивается на плоскости броуновским образом; при попадании на лучи звезды T он, также броуновским образом, движется вдоль луча, но с гораздо большей скоростью (управляемой локальным временем составляющей, нормальной к лучу); когда процесс находится в начале координат, что происходит бесконечное число раз, его поведение управляется явным распределением экскурсий. Ватанабе доказывает, что в те моменты времени, когда процесс покидает начало координат, гипотеза Барлоу нарушается, откуда следует искомый результат.

В той же статье Ватанабе показывает, что "вязкое броуновское движение" (вещественное броуновское движение, замедляющееся при проходе через 0 таким образом, чтобы его локальное время совпало с обычным временем в 0) также не является уютным. Для доказательства достаточно заметить, что с точностью до замены времени два независимых вязких броуновских движения образуют диффузию рассмотренного выше типа, для которой звезда (с четырьмя лучами) образована координатными осями.

Последний результат был также независимо получен Уорреном [25], который изучал две совместно погруженные копии рассматриваемого процесса. (Хотя моя дочь и утверждает, что необязательно изучать математику, чтобы знать, что ничего вязкое не может быть уютным.)

Мы видели, что для доказательства гипотезы Барлоу следует видоизменить определение уютности. В завершение приведем еще одну версию этого понятия, которая проясняет связь между критерием Вершика и уютностью. Вернемся к дискретному времени, когда фильтрации индексируются множеством $-\mathbb{N}$, и подправим определение 6, заменив в нем, разумеется, $\mathcal{F}_\infty$ на $\mathcal{F}_0$, а также условие (iii) на

(iii′) *существует такое* $n \in -\mathbb{N}$, *что* σ*-алгебры* $\mathcal{F}'_n$ *и* $\mathcal{F}''_n$ *независимы относительно* $\bar{\mathbb{P}}$.

Полученное свойство называется *Н-уютностью* (буква Н означает независимость). Оно было неявно использовано Смородинским [19] как необходимое условие стандартности вероятностного пространства с фильтрацией. Это необходимое условие оказывается также и достаточным [11]. Таким образом, это свойство представляет собой альтернативу критерию Вершика (который, впрочем, используется для доказательства его достаточности).

Преимущество свойства Н-уютности заключается в том, что во многих случаях применить его проще, чем критерий Вершика, поскольку для этого не нужно проводить вычисления в метрическом пространстве, зависящем от n. Иллюстрацией является пример, приведенный сразу после теоремы 2. Но кроме того, свойство Н-уютности дает новое понимание стандартного пространства благодаря связи, которую оно устанавливает с понятием *спаривания*. Метод спаривания заключается в том, что рассматривают две одновременно эволюционирующие версии одного и того же процесса с различными начальными условиями и стараются максимизировать вероятность их встречи. Он хорошо знаком специалистам по теории вероятностей как метод получения оценок по распределению (см. монографию Линдвалла [16] или доклад Дьякониса [7]). Бросается в глаза аналогия с Н-уютностью: если фильтрация $\mathcal{F}$ порождена процессом X, то условие (iii′) означает, что до момента времени n в прошлом имелось две независимых копии X' и X'' процесса X, условие (ii) означает, что после момента времени n оба процесса протекают совместно, и, наконец, условие (iv) означает, что обе копии доставляют близкие значения некому функционалу от X. В качестве примера, поясняющего, что может дать применение метода спаривания для изучения фильтраций, см. принадлежащее Арнодону [1] доказательство того факта, что броуновское движение с бесконечным временем (осью времени $\mathbb{R}$) на d-мерном компактном многообразии имеет d-мерную броуновскую фильтрацию, или работу [10], в которой рассмотрен более простой случай, когда многообразие является сферой.

Мне кажется, что хорошим стимулом для будущих работ является поиск аналога теории Вершика в непрерывном времени. Нужно понять, что именно приводит к тому, что вероятностное пространство с фильтрацией изоморфно или не изоморфно винеровскому (которое должно быть аналогом стандартного диадического пространства в непрерывном времени).

Имеющийся прогресс в этом отношении — двоякий. С одной стороны, Цирельсон [22] и [23] вводит и изучает все большее количество непрерывных стохастических шумов, отличных от белого шума. С другой стороны, доказательства того, что данная фильтрация порождена броуновским движением, становятся все менее и менее конструктивными (см. работу М. Мальрика [17]).

Но сколь бы впечатляющими ни были продвижения последних лет, предстоит пройти еще значительный путь. Вопрос, поставленный Йором двадцать лет назад, остается актуальным, если его уточнить и переформулировать в свете сегодняшних знаний:

Если слабо броуновское пространство с фильтрацией погружаемо в винеровское пространство, обязательно ли оно изоморфно винеровскому (т.е. порождено броуновским движением)?

Литература

1. M. Arnaudon, *La filtration du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ dans une variété compacte.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 304–314.
2. M. Barlow, M. Émery, F. Knight, S. Song, M. Yor, *Autour d'un théorème de Tsirelson sur les filtrations browniennes et non browniennes.* — Séminaire de Probabilités XXXII, Lect. Notes Math. **1686** (1998), 264–305.
3. M. Barlow, J. Pitman, M. Yor, *On Walsh's Brownian motions.* — Séminaire de Probabilités XXIII, Lect. Notes Math. **1372** (1989), 275–293.
4. S.Beghdadi-Sakrani, M.Émery, *On certain probabilities equivalent to coin-tossing, d'après Schachermayer.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 240–256.
5. C. Bishop, *A characterization of Poissonian domains.* — Ark. Mat. **29** (1991), 1–24.
6. B. de Meyer, *Une simplification de l'argument de Tsirelson sur le caractère non-brownien des processus de Walsh.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 217–220.
7. P. Diaconis, *From shuffling cards to walking around the building: an introduction to modern Markov chain theory.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. I (1998), pp. 187–204.

8. L. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinsky, B. Tsirelson, *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion.* — Ann. Prob. **24** (1996), 882–904.
9. M. Émery, W. Schachermayer, *Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 267–276.
10. M. Émery, W. Schachermayer, *A remark on Tsirelson's stochastic differential equation.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 291–303.
11. M.Émery, W.Schachermayer, *On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness.* — Séminaire de Probabilités XXXV, Lect. Notes Math. **1755** (2001), 265–305.
12. M. Émery, M. Yor, *Sur un théorème de Tsirelson relatif à des mouvements browniens corrélés et à la nullité de certains temps locaux.* — Séminaire de Probabilités XXXII, Lect. Notes Math. **1686** (1998), 306–312.
13. J. Feldman, M. Smorodinsky, *Decreasing sequences of measurable partitions: product type, standard, and prestandard.* — Ergodic Theory and Dynamical Systems **20** (2000), 1079–1090.
14. J. Feldman, B. Tsirelson, *Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion. II.* — Ann. Prob. **24** (1996), 905–911.
15. D. Heicklen, C. Hoffman, *T, T^{-1} is not standard.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), 875–878.
16. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method.* John Wiley&Sons, New York, 1992.
17. M. Malric, *Filtrations quotients de la filtration brownienne.* — Séminaire de Probabilités XXXV, Lect. Notes Math. **1755** (2001), 260–264.
18. W. Schachermayer, *On certain probabilities equivalent to Wiener measures, d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 221–239.
19. M. Smorodinsky, *Processes with no standard extension.* — Israel J. Math. **107** (1998), 327–331.
20. B. Tsirelson, *Triple points: From non-Brownian filtrations to harmonic measures.* — Geom. Funct. Anal **7** (1997), 1096–1142.
21. B. Tsirelson, *Within and beyond the reach of Brownian innovation.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math., Extra Vol. III (1998), pp. 311–320.
22. B. Tsirelson, *Toward stochastic analysis beyond the white noise.* Preprint; http://math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent/toward.html.
23. B. Tsirelson, *Noise sensitivity on continuous products: an answer to an old question of J. Feldman.* Preprint; http://math.tau.ac.il/~tsirel/Research/Recent /products.html.
24. А. М. Вершик, *Аппроксимация в теории меры.* Докторская диссертация, Ленинград, 1973. Переработанная версия: *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений*, Алгебра и анализ **6**, вып. 4 (1994), 1–68.
25. J. Warren, *On the joining of sticky Brownian motion.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 257–266.

26. S. Watanabe, *The existence of a multiple spider martingale in the natural filtration of a certain diffusion in the plane.* — Séminaire de Probabilités XXXIII, Lect. Notes Math. **1709** (1999), 277–290.
27. M. Yor, *Sur l'étude des martingales continues extrémales.* — Stochastics **2** (1979), 191–196.
27. M. Yor, *Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recent Martingale Problems.* Birkhäuser, Basel, 1997.

Émery M. Espaces probabilisés filtrés: de la théorie de Vershik au mouvement brownien, via les idées de Tsirelson (Probability spaces with filtrations: from Vershik's theory to the Brownian motion via Tsirelson's ideas).

A Russian translation of the paper published in Séminaire Bourbaki, no. 882 (2000/2001). This paper is a survey of the recent literature on the probabilistic theory of filtrations related to the notion of standard filtration (due to Vershik) and cozy filtration (due to Tsirelson), as well as applications of these notions for construction of probability spaces with filtrations that can be thought to be Brownian, but are not.

C.N.R.S. et Université Louis Pasteur.
I.R.M.A. (URA 7501 du C.N.R.S.)
E-mail: emery@math.u-strasbg.fr

Поступило 17 февраля 2004 г.