Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 307, 2004 г.

М. А. Крикун

РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННАЯ БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛОСКАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ И СВЯЗАННЫЙ С НЕЙ ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС

Введение

Бесконечная равномерно распределенная плоская триангуляция определяется как слабый предел равномерных распределений на корневых триангуляциях сферы с N треугольниками при $N \to \infty$. Существование этого предела было доказано в [1]. В [2] было показано, что площадь окрестности корня радиуса R растет как R^4, а длина ее границы как R^2 с точностью до полилогарифмического множителя. Это подтверждает предположение, известное из физики, о том, что внутренняя размерность случайной триангуляции равна четырем (см., напр., [7]).

В данной работе мы уточняем результат работы [2], касающийся длины границы R-окрестности, и получаем точное значение предела $\ell(R)/R^2$. Для представления бесконечной триангуляции мы используем конструкцию "скелета", которая позволяет сопоставить профилю триангуляции некоторый критический ветвящийся процесс с обращенным временем и с бесконечным вторым моментом. Используя это сопоставление, мы устанавливаем новый факт относительно бесконечных триангуляций: мы показываем, что вне R-окрестности существует контур, отделяющий ее от бесконечной части триангуляции, такой, что его длина растет линейно по R.

Статья состоит из пяти частей и приложения. В первом разделе даются необходимые определения и приводятся некоторые результаты работ [1, 2]. Основные результаты формулируются в конце первого раздела. Во втором разделе описывается конструкция "скелета". В третьем разделе с помощью прямых выкладок вычисляется предельное распределение $\ell(R)/R^2$. В четвертом разделе исследуется связь с ветвящимся процессом и

Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант 02-01-00415.

доказывается существование линейного контура. В пятом разделе обсуждается универсальность полученного результата и разработанной техники. Некоторые доказательства технического характера даны в приложении.

1. Основные результаты

Напомним вначале несколько классических определений (см. [3]). *Плоской картой* называется вложенный в сферу непустой связный граф, разделяющий плоскость на области, называемые *гранями*, каждая из которых гомеоморфна диску. *Корневой плоской картой* называется плоская карта, в которой выделена грань, ребро этой грани и направление вдоль ребра. Они называются соответственно *корневой гранью* и *корневым ребром*. Начало корневого ребра называется *корневой вершиной*. Плоские карты рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов сферы.[1] Для корневых карт требуется, чтобы гомеоморфизм сохранял корень (т.е. корневые грань, ребро и вершину), вследствие чего группа автоморфизмов корневой карты всегда тривиальна. Нигде далее в статье вложение в сферу не используется.[2]

Степенью грани в плоской карте называется число ребер, встречающихся при обходе этой грани (при этом одно ребро может быть подсчитано дважды). Триангуляцией называется плоская карта, в которой все некорневые грани имеют степень три; кроме этого обычно накладываются дополнительные условия, исключающие некоторые "нехорошие" графы. Ниже мы определим один тип триангуляций, с наименьшими ограничениями на структуру графа; другие типы будут рассмотрены в последнем разделе статьи.

Напомним сначала одно определение.

Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если граф G можно представить в виде объединения двух графов, каждый из которых содержит хотя бы одно ребро и пересечение которых состоит из единственной вершины v.

---

[1] Строго говоря, плоская карта это класс эквивалентности вложений графа в сферу по модулю гомеоморфизмов сферы.

[2] Можно вовсе исключить вложение в сферу из определения плоской карты. Для этого следует определить карту как граф, у которого в каждой вершине задан циклический порядок ребер. В таком графе можно определить понятие грани; тогда плоские карты получаются наложением соответствующего условия на эйлерову характеристику и ориентируемость.

Определение 1. *Корневой почти-триангуляцией* (КПТ) *называется корневая плоская карта, в которой все некорневые грани являются треугольниками и, кроме того, отсутствуют точки сочленения.*

Корневая почти-триангуляция характеризуется числом треугольников N и числом ребер на границе m. В качестве специального случая рассматривается карта, состоящая из единственного ребра, вложенного в сферу; в этом случае считается, что $N = 0$, $m = 2$.

В случае $m = 3$ корневая грань сама является треугольником. Такая триангуляция называется *полной триангуляцией* сферы с $N + 1$ треугольниками. Аналогично в случае $m = 2$, чтобы получить полную триангуляцию с N треугольниками, достаточно склеить ребра корневой грани в одно.

Перечислить все КПТ относительно N и m позволяет следующая формула:

$$C_0(N, m) = \frac{2^{j+2}(2m + 3j - 1)!(2m - 3)!}{(j + 1)!(2m + 2j)!((m - 2)!)^2}, \quad N = m + 2j; \tag{1}$$

переменную j здесь можно интерпретировать как количество внутренних вершин триангуляции минус одна вершина.

1.1. Пространство триангуляций.

Расстоянием между вершинами v_1 и v_2 плоской карты будем считать длину минимального пути из v_1 в v_2, полагая при этом длину каждого ребра равной единице.

Определим *шар радиуса* R (R-шар) B_R в КПТ как подтриангуляцию, состоящую из треугольников, имеющих хотя бы одну вершину на расстоянии менее R от корневой границы.

Пусть $\mathcal{T}^*_{<\infty}$ – пространство всех КПТ с метрикой

$$d_{\mathcal{T}}(T_1, T_2) = \inf\left\{\frac{1}{R+1}\,\middle|\, R : B_R(T_1) = B_R(T_2)\right\},$$

а $\mathcal{T}^*$ – пополнение этого пространства. Предельные точки пространства $\mathcal{T}^*$, не лежащие в $\mathcal{T}^*_{<\infty}$, называются *бесконечными плоскими триангуляциями*. Бесконечную триангуляцию можно представить *локально конечным* плоским графом (граф является локально конечным, если степень каждой его вершины конечна).

В силу того, что степени вершин не ограничены, пространство $\mathcal{T}^*$ не компактно. Например, в нем можно построить бесконечную последовательность различных триангуляций, склеивая две триангуляции n-угольника из n треугольников (см. рис. 1). Расстояние между любыми такими триангуляциями будет равно единице, а значит, последовательность не будет содержать сходящейся подпоследовательности.

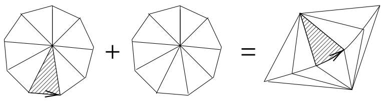

Рис. 1. Триангуляция, полученная склеиванием двух n-угольников; выделена корневая грань.

Пространство $\mathcal{T}^*$ можно представить в виде объединения

$$\mathcal{T}^* = \bigcup_{m_0=2}^{\infty} \mathcal{T}(m_0),$$

где $\mathcal{T}(m_0)$ – подпространство триангуляций с длиной корневой границы m_0. В дальнейшем нам понадобятся лишь эти подпространства в отдельности, и там, где это не вызовет недоразумений, мы будем предполагать, что m_0 является константой, и писать просто $\mathcal{T}$ вместо $\mathcal{T}(m_0)$.

Метрика $d_{\mathcal{T}}$ порождает слабую топологию в пространстве мер на $\mathcal{T} = \mathcal{T}(m_0)$. А именно, введем следующее опредеделение.

Определение 2. *Мера ρ на пространстве $\mathcal{T}$ является пределом последовательности мер ρ_n, если для всякой ограниченной непрерывной функции $f : \mathcal{T} \to R$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \int f d\rho_n = \int f d\rho.$$

Пусть τ_n – вероятностная мера на $\mathcal{T}$, задающая равномерное распределение на триангуляциях с n треугольниками. Angel и Schramm [1] доказали существование слабого предела последовательности τ_n для полных триангуляций сферы.

Теорема 1 (Angel, Schramm)**.** *Для $m_0 = 3$ в пространстве $\mathcal{T} = \mathcal{T}(3)$ существует вероятностная мера τ с носителем на бесконечных плоских триангуляциях, такая, что*

$$\lim \tau_n = \tau.$$

Случайная величина со значениями в $\mathcal{T}$, распределение которой определено предельной мерой τ, называется *бесконечной равномерно распределенной плоской триангуляцией*. Мы будем использовать обозначения $S(N, m_0)$ и $S_\infty(m_0)$ для случайных триангуляций с распределениями $\tau_n(m_0)$ и $\tau(m_0)$ соответственно.

1.2. Профиль.

Замкнутый конечный путь без самопересечений в триангуляции называется *контуром*. Контур разделяет триангуляцию на две части. Если одна из частей бесконечна, а другая конечна и содержит корень, такой контур называется *отделяющим бесконечность*.

Лемма 1. *В бесконечной равномерной случайной триангуляции с вероятностью единица существует отделяющий бесконечность контур, такой, что все его вершины имеют высоту в точности R. Такой контур является единственным, если дополнительно потребовать, чтобы все его ребра принадлежали границе шара B_R.*

Пусть $\ell(R)$ – длина этого контура. Последовательность $\ell(1)$, $\ell(2), \ldots$ длин контуров для некоторой триангуляции называется *профилем* этой триангуляции. Следующие три теоремы составляют основной результат данной статьи.

Теорема 2. *Пусть $\ell(R)$ – профиль равномерно распределенной случайной плоской триангуляции. Существует предел*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\ell(R)}{R^2} = \xi,$$

где ξ – случайная величина с плотностью

$$p_\xi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t} t^{1/2}.$$

Теорема 3. *Последовательность случайных величин $\ell(R)$ образует марковскую цепь, переходные вероятности которой определяются соотношением*

$$\mathrm{P}\{\ell(R) = k | \ell(0) = l\} = \frac{[t^k]F_0(t)}{[t^l]F_0(t)}\, \mathrm{P}\{\bar\zeta(R) = l | \bar\zeta(0) = k\},$$

где

$$F_0(t) = \frac{2}{\sqrt{1-t}} - 4 + 2\sqrt{1-t},$$

а $\bar{\zeta}$ – критический ветвящийся процесс с обращенным временем и с особым поведением вблизи нуля (см. точную формулировку в разделе 4.1*).*

Теорема 4. *В бесконечной равномерной случайной триангуляции для всякого R существует отделяющий бесконечность контур $lc(R)$, такой, что все его вершины имеют высоту не менее R, а математическое ожидание его длины линейно по R при $R \to \infty$.*

Кроме того, мы получим альтернативное доказательство теоремы 1, которое годится для произвольного подпространства $\mathcal{T}(m_0)$, а не только для $m_0 = 3$. Это обобщение, однако, не является существенным.

2. Представление бесконечной триангуляции

2.1. Строение окрестности.

Рассмотрим подробнее структуру шара $B_R(T)$. В общем случае его граница имеет две и более компоненты связности, так что $B_R(T)$ можно рассматривать как триангуляцию сферы с несколькими дырками. Обобщим определение КПТ на подобного рода триангуляции.

Определение 3. *Многокорневой триангуляцией* (МКТ) *типа* $(N,\ m_0, k; m_1, \ldots, m_k)$ *называется плоская корневая карта, в которой*

- *степень корневой грани равна m_0,*
- *выделено k граней, помеченных числами $1, \ldots, k$; эти грани считаются дырками в сфере,*
- *длины границ дырок равны $m_1, \ldots, m_k$,*
- *на границе каждой дырки выделено ребро (дополнительный корень) так, что его направление согласовано с направлением корневой грани,*
- *остальные N граней карты являются треугольниками,*
- *отсутствуют точки сочленения.*

Определение получилось довольно громоздким, поэтому лучше сразу дать некоторые пояснения. Дополнительные корни нужны, чтобы однозначно определить операцию заклеивания дырок дисками. Для сокращения записи мы будем использовать обозначения $N(T)$, $m_0(T)$, $m_j(T)$ для параметров триангуляции T типа

$(N, m_0, k; m_1, \dots, m_k)$. Многокорневую триангуляцию с $k = 1$ будем называть *цилиндрической* и считать, что ее корневая граница является *нижней*, а некорневая – *верхней*. Для вершин корневой границы МКТ введем *стандартную нумерацию*. Началу корневого ребра присвоим номер 0, его концу номер 1, далее в порядке обхода границы.

Определение 3 не налагает никаких ограничений на границы триангуляции. Так, например, две границы могут иметь общее ребро, а триангуляция может не иметь ни одного треугольника ($N(T) = 0$). Ниже будет выделен подкласс триангуляций с более регулярной структурой, но сначала мы определим операцию дополнения МКТ до КПТ.

Определение 4. *Подходящим набором дисков для триангуляции T типа $(N, m_0; m_1, \dots, m_k)$, $k \geqslant 1$, называется упорядоченный набор триангуляций диска $D_1, \dots, D_k$, такой, что $m_0(D_j) = m_j$, $j = 1, \dots, k$.*

Приклеим каждый из дисков D_j к соответствующей границе m_j триангуляции T так, чтобы корневое ребро D_j совпадало с дополнительным корневым ребром на границе m_j. Получим триангуляцию T' типа (N', m_0), $N' = N + \sum_j N(D_j)$. Эту операцию назовем дополнением до сферы и будем обозначать символическим равенством $T' = T + (D_1, \dots, D_k)$.

Будем также говорить, что T является окрестностью корня в S и обозначать это соотношение $T \overset{rn}{\subset} S$.

Определение 5. *Триангуляция T называется жесткой, если для различных подходящих наборов дисков $D_1, \dots, D_k \neq D'_1, \dots, D'_k$ результаты дополнения до сферы отличаются: $T + (D_1, \dots, D_k) \neq T + (D'_1, \dots, D'_k)$.*

Можно показать, что шар $B_R(S)$ является жесткой триангуляцией (см. [1]).

Вернемся к формуле (1) перечисления КПТ относительно N и m и рассмотрим соответствующую производящую функцию

$$
\begin{aligned}
U_0(x, y) &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} C_0(N, m) x^N y^{m-2} = \\
&= \frac{y - x + (h - y)\sqrt{\frac{x^2}{h^2} - 4xy}}{2xy^2}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Здесь $h = h(x)$ – решение уравнения

$$x = h - 2h^3, \tag{3}$$

такое, что $h(0) = 0$. Большинство вероятностей, появляющихся в данной работе, возникают из анализа особенностей функции $U_0(x,y)$ (детальный анализ функции $U_0(x,y)$ см. в [5]). Зафиксируем y, $|y| < y_0 = 1/\sqrt{6}$. Тогда главными особенностями функции $U_0(x,y)$ как функции от комплексной переменной x являются точки $x = \pm x_0$, $x_0 = \sqrt{2/27}$. Вблизи этих точек можно разложить функцию в ряд по полуцелым степеням $t = x_0 \mp x$:

$$U_0(x,y)\Big|_{x=x_0-t} = A(y) + A_1(y)t + \frac{6^{3/4}}{3}B(y)t^{3/2} + O(t^2),$$

$$U_0(x,y)\Big|_{x=-x_0+t} = A(-y) + A_1(-y)t + \frac{6^{3/4}}{3}B(-y)t^{3/2} + O(t^2),$$

где

$$A(y) = \frac{3}{2}\frac{2\sqrt{1-\sqrt{6}y}+1}{(\sqrt{1-\sqrt{6}y}+1)^2}, \quad B(y) = \frac{1}{(1-\sqrt{6}y)^{3/2}}, \tag{4}$$

а коэффициент $A_1(y)$ также выражается через $\sqrt{1-\sqrt{6}y}$, однако не играет роли в дальнейших выкладках. Обозначим коэффициенты разложения $A(y)$ и $B(y)$ в ряд по y как

$$a(m) = [y^{m-2}]A(y), \quad b(m) = [y^{m-2}]B(y).$$

Теперь мы можем сформулировать две теоремы о предельном распределении τ. Эти теоремы приведены в [1] в других обозначениях; однако в данной работе они были получены независимо. Доказательство помещено в приложении.

Теорема 5. *Пусть T – жесткая триангуляция типа $(n, m_0, k; m_1, \ldots, m_k)$. Существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{T \overset{rn}{\subset} S(N,m_0)\} = \frac{1}{b(m_0)}a(m_1)\cdots a(m_k)\sum_{j=1}^{k}\frac{b(m_j)}{a(m_j)}x_0^n. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем обозначать предел (5) как $\mathrm{P}\{T \overset{rn}{\subset} S_\infty(m_0)\}$. Отметим, что для цилиндрической триангуляции уравнение (5) превращается в

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{T \overset{rn}{\subset} S(N,m_0)\} = \frac{b(m_1)}{b(m_0)}x_0^n. \tag{6}$$

Теорема 6. *Рассмотрим случайную триангуляцию* $S(N, m_0)$ *при условии* $T \overset{rn}{\subset} S(N, m_0)$, *где* T *– триангуляция типа* $(n, m_0, k; m_1, \ldots, m_k)$. *Пусть* $S(N, m_0) = T + (D_1, \ldots, D_k)$ *и* $N_j = N(D_j)$. *Рассмотрим предел* $N \to \infty$. *Тогда с вероятностью единица максимальное из чисел* N_j *бесконечно, тогда как остальные конечны:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{N_j = \max_{i=1,\ldots,k}(N_i)\} = \frac{b(m_j)}{a(m_j)}\Big(\sum_{i=1}^{k}\frac{b(m_i)}{a(m_i)}\Big)^{-1},$$

и существует предел условного распределения

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{N_i = n_i, i = 1, \ldots, \widehat{j}, \ldots, k | N_j = \max(N_i)\}.$$

Теперь можно переопределить R-окрестность корня так, чтобы она имела единственную некорневую границу.

Определение 6. *Рассмотрим триангуляцию* T *и шар* $B_R = B_R(T)$. *Пусть* $D_1, \ldots, D_k$ *– набор дисков, такой, что* $B_R + (D_1, \ldots, D_k) = T$, *и пусть* D_j *– диск с максимальным количеством треугольников. Окрестностью* $\bar{B}_R$ *радиуса* R *назовем триангуляцию, состоящую из всех треугольников триангуляции* T, *не принадлежащих* D_j: $\bar{B}_R = T \setminus D_j$.

Это определение не вполне корректно, поскольку не предусматривает случая, когда два и более из дисков D_j обладают максимальным числом треугольников. Можно каким-либо образом доопределить его и в этом случае, однако для нас важно, что в силу теоремы 6 R-окрестность определена однозначно для почти всех бесконечных триангуляций.

Из теоремы 6 также следует утверждение леммы 1. Неединственность отделяющего бесконечность контура, лежащего на высоте R, в первой части леммы 1 происходит из существующего произвола в выборе пути при прохождении через ноль-треугольник (см. определение ниже). Дополнительное условие снимает этот произвол, поскольку с этим условием искомый контур должен совпадать с одной из компонент границы шара B_R, а лишь одна из них отделяет бесконечность.

2.2. Скелет.

Для отдельного треугольника в триангуляции T рассмотрим расстояние от его вершин до корневой границы. Поскольку для двух соседних вершин эта величина отличается не более чем на единицу, каждый треугольник можно отнести к одному из трех типов: $(R, R, R+1)$, $(R, R, R-1)$, (R, R, R), называемых соответственно *плюс-*, *минус-* и *ноль-треугольниками*. Будем считать плюс-треугольники направленными вверх, а минус-треугольники – направленными вниз. Соответственно, для плюс-треугольников (минус-треугольников) естественным образом можно определить нижнее (верхнее) и боковые ребра. Согласно определению шара B_R, его граница состоит из верхних ребер минус-треугольников; это верно также для R-окрестности $\bar{B}_R$.

Рассмотрим теперь бесконечную триангуляцию S и последовательность окрестностей $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_R$. Вследствие теоремы 6, $\bar{B}_1 \subset \ldots \subset \bar{B}_R$ (такое соотношение не выполняется в общем случае для конечной триангуляции S).

Определение 7. *Слоем $L_R = L_R(S)$ называется подтриангуляция в S, состоящая из треугольников, входящих в $\bar{B}_R$, но не входящих в $\bar{B}_{R-1}$.*[3] *Будем также говорить, что триангуляция T, рассматриваемая в отдельности, является допустимым слоем, если $T = L_R(S)$ для некоторых S и R.*

Перечислим некоторые свойства слоя, вытекающие непосредственно из определения.

- L – цилиндрическая триангуляция, в которой все вершины верхней границы удалены от нижней границы на расстояние 1;
- каждое ребро верхней границы является верхним ребром минус-треугольника с вершиной на нижней границе;
- между двумя такими последовательными минус-треугольниками содержится некоторая триангуляция диска, которая имеет ровно одну вершину на верхней и не менее одной вершины на нижней границе.

Эти свойства следуют непосредственно из определения слоя.

Определение 8. *Шаблоном слоя для слоя L называется многокорневая триангуляция, являющаяся подтриангуляцией слоя и*

[3] Чтобы так определенный слой можно было считать многокорневой триангуляцией согласно определению 3, нужно задать дополнительное корневое ребро на его верхней границе. Это будет сделано далее.

состоящая из верхней границы, нижней границы и всех минус-треугольников с ребром на верхней границе.

Границы между последовательными минус-треугольниками называются гнездами шаблона. В случае, если два последовательных треугольника имеют общее ребро, будем считать, что между ними содержится гнездо с границей длины два.

Гнездо и треугольник справа от него называются ассоциированными. В качестве дополнительного корня на границе гнезда выбирается ребро, общее для гнезда и ассоциированного треугольника. В качестве дополнительного корня на верхней границе выбирается верхнее ребро минус-треугольника, ассоциированного с гнездом, содержащим корневое ребро нижней границы.[4]

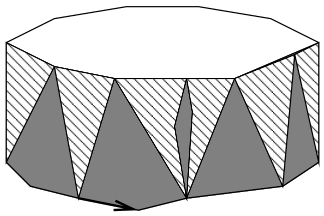

Рис. 2. Шаблон слоя. Показаны гнезда длины 4, 4, 2, 3 и 3.

Каждому слою соответствует ровно один шаблон слоя. Слой может быть получен из шаблона путем заполнения гнезд произвольным подходящим набором дисков (аналогично определению 4, за исключением того, что верхняя граница остается открытой), и, наоборот, за единственным исключением каждый подходящий набор дисков позволяет получить слой из шаблона слоя.

Лемма 2. *Пусть P – шаблон слоя с верхней границей длины k и k гнездами $l_1, \dots, l_k$, и пусть $D_1, \dots, D_k$ – подходящий набор дисков ($m_0(D_j) = l_j$).*

Приклеим каждый диск к соответствующему гнезду так, чтобы корень диска совпадал с дополнительным корнем на границе гнезда. Тогда полученная триангуляция является допустимым слоем

[4]Точно так же следует определить дополнительный корень на верхней границе в определении 7.

за исключением следующего случая:

1) *все $l_1, \dots, l_k$ кроме l_j равны двум;*
2) *диск D_j содержит ребро между точками 0 и 2 корневой границы.* (E)

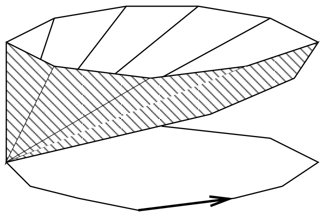

Рис. 3. Шаблон слоя, попадающий под исключение (E).

Доказательство. Проверим, что $L = P+(D_1, \dots, D_k)$ удовлетворяет определению МКТ. При этом существенно только последнее условие, требующее отсутствия точек сочленения.

В плоской триангуляции с несколькими границами точка сочленения может возникнуть двумя способами: либо одна из границ является *самокасающейся*, т.е. некоторая вершина при обходе границы встречается дважды, либо существует петля – ребро с началом и концом в одной вершине.

Верхняя и нижняя границы шаблона не являются самокасающимися. При вклеивании дисков $D_1, \dots, D_k$ никакие две вершины не склеиваются вместе, так что границы остаются несамокасающимися. Остается проверить отсутствие петель.

Петля появляется, только если граница некоторого гнезда самокасается в некоторой вершине $v = v'$ и в это гнездо вклеивается диск так, что концы некоторого внутреннего ребра диска склеиваются с v и v'. А это в точности случай, описанный исключением (E).

Лемма 3. *Рассмотрим произвольную последовательность допустимых слоев $L_1, \dots, L_R$, такую, что $m_1(L_i) = m_0(L_{i+1})$. Склеивая последовательно эти слои, мы получим триангуляцию без петель.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Нужно проверить, что при добавлении слоя

L_j к цилиндрической триангуляции $T_{j-1} = L_1 + \ldots + L_{j-1}$ не возникает точек сочленения. Это действительно так, поскольку и L_j, и T_{j-1} не содержат точек сочленения, а склеиваются они как минимум в двух точках, так что в триангуляции $T_j = T_{j-1} + L_j$ точки сочленения также отсутствуют.

Следствие. *Для всякого допустимого слоя L и для всякого R найдется триангуляция S, такая, что $L = L_R(S)$.*

Определение 9. *Пусть $\bar{B}_R$ – R-окрестность корня в триангуляции T. Скелетом этой окрестности называется подтриангуляция $\mathrm{skel}(B_R)$, состоящая из всех минус-треугольников с верхним ребром на границе одной из окрестностей $\bar{B}_1(T), \ldots, \bar{B}_R(T)$.*

Пусть $L_1, \ldots, L_R$ – последовательность слоев, соответствующая $\bar{B}_R$, и пусть $P_1, \ldots, P_R$ – шаблоны слоев (L_j соответствует P_j, $j = 1, \ldots, R$). Тогда

$$\mathrm{skel}(\bar{B}_R) = P_1 + \ldots + P_k.$$

Скелет является многокорневой триангуляцией; дополнительные корни определяются шаблонами слоев.

Установим соответствие между скелетами и траекториями ветвящегося процесса (см. рис. 4). Для скелета $\mathrm{skel}(\bar{B}_R)$ скажем, что

- контур между двумя последовательными слоями является поколением ветвящегося процесса;
- ребра, образующие этот контур, являются частицами;
- ребра, принадлежащие нижней части границы гнезда, являются потомками верхнего ребра минус-треугольника, ассоциированного с этим гнездом.

Мы рассмотрим это соответствие детально в разделе 4.

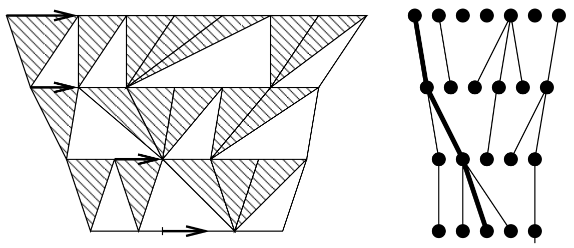

Рис. 4. Скелет и траектория ветвящегося процесса.

2.3. Перечисление триангуляций с заданным скелетом.

Конструкция скелета и теорема 5 позволяют вычислить вероятность того, что R-окрестность $\bar{B}_R$ в бесконечной триангуляции S имеет заданный скелет K. Для этого следует каждой триангуляции из множества $\mathrm{skel}^{-1}(K) = \{T \in \mathcal{T} : \mathrm{skel}(B_R(T)) = K\}$ присвоить ее вероятность в соответствии с формулой (6) и просуммировать по $\mathrm{skel}^{-1}(K)$:

$$Z(K) = \sum_{T \in \mathrm{skel}^{-1}(K)} \frac{b(m_1)}{b(m_0)} x_0^{n(T)}.$$

(Можно рассмотреть и более общий случай, заменив x_0 на x.)

Поскольку m_0 и m_1 определены скелетом K и, следовательно, одинаковы для всех триангуляций $T \in \mathrm{skel}^{-1}(K)$,

$$Z(K) = \frac{b(m_1)}{b(m_0)} \sum_{T \in \mathrm{skel}^{-1}(K)} x_0^{n(T)}.$$

Далее, каждая триангуляция $T \in \mathrm{skel}^{-1}(K)$ может быть получена из скелета K заклеиванием его гнезд подходящим набором дисков, причем диски в разных гнездах могут быть выбраны независимо.

Пусть гнезда скелета K каким-либо образом занумерованы и имеют длины $l_1, \dots, l_q$. Если временно не принимать во внимание исключение (E), можно считать, что каждое гнездо можно заполнить любой триангуляцией с соответствующей длиной границы. Тогда сумму $Z(K)$ можно представить в виде произведения по всем гнездам, в котором гнезду j приписан множитель

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_0(n, l_j) x_0^{n+1} = x_0 [y^{l_j - 2}] U_0(x_0, y)$$

(дополнительный множитель x_0 относится к ассоциированному треугольнику):

$$Z(K) = \frac{b(m_1)}{b(m_0)} \prod_{j=1}^{q} x_0 [y^{l_j - 2}] U_0(x_0, y). \tag{7}$$

В более общем случае, т.е. с учетом исключения (E), некоторые члены в этом произведении следует изменить, что является непростой задачей для произвольного скелета. В следующих двух частях мы подойдем к этому вопросу двумя способами.

В разделе 3 мы построим сумму, подобную $Z(K)$, позволяющую перечислить все слои относительно длин границ и числа треугольников. Затем мы расширим ее на случай произвольного радиуса R-окрестности и докажем теорему 2 об асимптотике длины верхней границы.

В разделе 4 мы подробнее рассмотрим связь между скелетом и ветвящимся процессом. Этот подход ведет к менее сложным выкладкам, но не позволяет получить точных результатов. Основным результатом этого раздела является теорема 4 о существовании линейного контура.

3. Прямой подход

3.1. Сумма по слоям как линейный оператор.

Сумма $Z(K)$ не учитывает исключения (E) и, следовательно, не может использоваться для получения точных результатов. Однако тот же подход позволяет точно вычислить сумму, перечисляющую все слои относительно длин границ и числа треугольников.

Лемма 4. *Пусть $l = l(L)$ и $k = k(L)$ обозначают длину нижней и верхней границ слоя L, а $n = n(L)$ – число треугольников в L.*

Возьмем функцию $F(t)$, допускающую разложение в ряд

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j .$$

Тогда можно вычислить сумму по всем слоям $L \in \Lambda$

$$\sum_L c_{k-2} x^n y^{l-2} = (\mathbf{A}(x)F)(y),$$

где $\mathbf{A}(x)$ это линейный оператор, определяемый соотношением

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}(x)F)(y) = {} & \frac{1}{y} u(x,y)u'(x,y)F(u(x,y)) - \\ & - \frac{1}{y}\Big(u(x,y) + yu'(x,y)\Big)u'(x,0)F(u(x,0)),\end{aligned} \qquad (8)$$

$u(x,y) = xU_0(x,y)$, $u'(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} xU_0(x,y)$.

Доказательство. Доказательство в целом похоже на приведенное в п. 2.3 рассуждение относительно $Z(K)$, однако есть два момента, на которые следует обратить внимание: это учет положения корня и исключения (E).

Пусть P – шаблон слоя с верхней границей k и нижней границей l. Занумеруем гнезда этого шаблона начиная с гнезда, содержащего корневое ребро (нижней границы). Пусть гнезда имеют границы длины $l_1, \ldots, l_k$. Тогда $(l_1 - 2) + \ldots + (l_k - 2) = l$ и, в соответствии с определением шаблона слоя, $l_1 \geqslant 3$, поскольку первое гнездо обязательно имеет хотя бы одно ребро на нижней границе. При заданных $l_1, \ldots, l_k$ корень может находиться в одной из $(l_1 - 2)$ позиций на нижней границе; следовательно, чтобы задать шаблон слоя, нужно вместе с $l_1, \ldots, l_k$ указать еще и эту позицию.

При переводе на язык производящих функций это дает первый член в правой части формулы (8):

$$\sum_L c_{k-2} x^n y^{l-2} = y^{-2} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\substack{l_1 \geqslant 3;\\ l_2, \ldots, l_k \geqslant 2}} c_{k-2} (l_1 - 2) y^{l_1 - 2} [t^{l_1 - 2}] u(x,t) \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{k} y^{l_j - 2} [t^{l_j - 2}] u(x,t) = y^{-1} u'(x,y) u(x,y) F(u(x,y)). \tag{9}$$

Правая часть формулы (9) включает некоторые слои, запрещенные исключением (E); следовательно, нужно вычесть из нее некий корректирующий член.

Чтобы шаблон слоя P попадал под исключение (E), он должен иметь гнезда $l_2 = \ldots = l_k = 2$, а чтобы соответствующий этому шаблону слой L попадал под исключение (E), триангуляция диска, вклеиваемая в первое гнездо (l_1), должна содержать ребро между вершинами 0 и 2 корневой границы ($0-2$-ребро). Для перечисления таких триангуляций нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $D(N, m, l)$ – число триангуляций диска типа $(N, m+l, 0)$, содержащих ребро между вершинами 0 и l корневой границы (это может быть и ребро границы, если $m = 1$ или $l = 1$). Тогда*

$$W(x,y,z) = \sum_{N \geqslant 0} \sum_{m,l \geqslant 1} D(N,m,l) x^N y^{m-1} z^{l-1} = \frac{U_0(x,y) U_0(x,z)}{U_0(x,0)}. \tag{10}$$

Доказательство приведено в приложении.

Число триангуляций диска с границей m, содержащих $0-2$-ребро, определяется коэффициентом $[y^{m-3}z]W(x,y,z)$. Чтобы исправить формулу (9), нужно вычесть из нее сумму по всем запрещенным слоям,

$$\sum_{L:(E)} c_{k-2}x^n y^{l-2} = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} \sum_{l_1 \geqslant 3} (l_1-2)xy^{l_1-4}[t^{l_1-3}z]W(x,t,z)\Big(xU_0(x,0)\Big)^{k-1}. \tag{11}$$

Здесь потребуются два промежуточных равенства:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}\Big(xU_0(x,0)\Big)^{k-1} = u(x,0)F(u(x,0)),$$

$$[t^{l_1-3}z]W(x,t,z) = \frac{U_0'(x,0)}{U_0(x,0)}[t^{l_1-3}]U_0(x,t) = \frac{u'(x,0)}{u(x,0)}[t^{l_1-3}]U_0(x,t),$$

после чего можно вернуться к (11):

$$\ldots = u'(x,0)F(u(x,0)) \sum_{l_1 \geqslant 3} (l_1-2)y^{l_1-4}[t^{l_1-3}]u(x,t) = \\ = u'(x,0)F(u(x,0))y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(yu(x,y)) = \\ = y^{-1}\Big(u(x,y)+yu'(x,y)\Big)u'(x,0)F(u(x,0)). \tag{12}$$

Вычитая (12) из (9), получим (8), что и требовалось.

Как следствие леммы 4 и леммы 5 получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть l и k – длины нижней и верхней границ R-окрестности $\bar{B}_R$, и пусть n – число треугольников в $\bar{B}_R$.*

Возьмем функцию $F(t)$, допускающую разложение в ряд

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j.$$

Тогда можно вычислить сумму по всем R-окрестностям

$$\sum_{\bar{B}_R} c_{k-2}x^n y^{l-2} = (\mathbf{A}^R(x)F)(y).$$

Чтобы продемонстрировать применение леммы 6, вычислим математическое ожидание длины верхней границы k при фиксированной нижней границе l и при заданном R. По теореме 5

$$\mathrm{E}(k|l) = \sum_{B_R(l)} k\,\mathrm{P}(B_R) = \sum_{B_R(l)} k\frac{b(k)}{b(l)}x_0^n,$$

где суммирование ведется по всем слоям с нижней границей l. Применяя лемму 6, получим

$$\mathrm{E}(k|l) = \frac{1}{b(l)}[y^{l-2}](\mathbf{A}_0^R f_1)(t),$$

где $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(x_0)$,

$$f_1(y) = \sum_{k=2}^{\infty} kb(k)y^k = \sum_{k=2}^{\infty} ky^k[t^{k-2}]B(t) = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}(y^2 B(y)).$$

Подобным образом можно построить функцию F для вычисления моментов $\mathrm{E}(k^2|l)$, $\mathrm{E}(k^3|l)$ и т.д.

Важный факт: сумма вероятностей по всем слоям с фиксированной длиной нижней границы l равна единице для всех l. С его помощью можно доказать, что мера τ на пространстве триангуляций $\mathcal{T}$ является вероятностной, и получить таким образом альтернативное доказательство теоремы 1.

Лемма 7.

$$\sum_{B_R} \mathrm{P}\{\overline{B}_R \overset{rn}{\subset} S(m_0)\} = 1. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $f_0(y) = B(y) = (1-\sqrt{6}\,y)^{-\frac{3}{2}}$. Мы хотим показать, что

$$\sum_{B_R} \mathrm{P}\{\overline{B}_R \overset{rn}{\subset} S(m_0)\} = \sum_{B_R} \frac{b(m_1(B_R))}{b(m_0)}x_0^{n(B_R)} = \frac{[t^{l-2}](\mathbf{A}_0^R f_0)(t)}{[t^{l-2}f_0(t)]} = 1.$$

Это следует из равенства

$$\mathbf{A}_0^R f_0 = f_0,$$

которое в свою очередь следует из равенства $\mathbf{A}_0 f_0 = f_0$. Проверка последнего равенства делается напрямую, но требует громоздких выкладок, которые мы опустим.

3.2. Итерации линейного оператора.

Чтобы получить асимптотику моментов случайной величины $\ell(R)$ при $R \to \infty$, нужно уметь вычислять $\mathbf{A}_0^R$. Для начала сделаем замену переменной

$$w = \sqrt{1 - \sqrt{6}y}. \tag{14}$$

При переходе в новую систему координат функция $f(y)$ превращается в функцию $g(w)$, определяемую уравнением

$$f(y) = g(w),$$

а оператор $\mathbf{A}_0$ превращается в оператор $\mathbf{B}$, такой, что для всех f и y

$$(\mathbf{A}_0 f)(y) = (\mathbf{B}g)(w).$$

Оператор $\mathbf{B}$ действует на g следующим образом:

$$(\mathbf{B}(g))(w) = \frac{(2w+1)g\left(\frac{w}{1+w}\right)}{(1+w)^5(1-w^2)} - \frac{\frac{1}{8}(w+2)g\left(\frac{1}{2}\right)}{(1+w)^2(1-w^2)}.$$

Разложим его на две части, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$, где

$$\mathbf{B}_1(g)(w) = \frac{(2w+1)g\left(\frac{w}{1+w}\right)}{(1+w)^5(1-w^2)} - \frac{3}{32}\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{w^3(1-w^2)},$$

$$\mathbf{B}_2(g)(w) = \frac{\frac{1}{8}(w+2)g\left(\frac{1}{2}\right)}{(1+w)^2(1-w^2)} - \frac{3}{32}\frac{g\left(\frac{1}{2}\right)}{w^3(1-w^2)}.$$

Смысл этого разложения в том, что полученные части $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ являются *итерируемыми*, т.е. можно записать простую формулу для k-й итерации каждого из этих операторов. Пусть

$$g(w) = \frac{G(w)}{w^3(1-w^2)};$$

тогда

$$\mathbf{B}_1^k(g)(w) = \frac{G\left(\frac{w}{kw+1}\right)}{w^3(1-w^2)} - \frac{G\left(\frac{1}{k+1}\right)}{w^3(1-w^2)},$$

$$\mathbf{B}_1^k(g)(1) = -\frac{G'\left(\frac{1}{k+1}\right)}{2(k+1)^2}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_2(g)(w) &= \phi(w)g\Big(\frac{1}{2}\Big),\\ \phi(w) &= \frac{1}{8}\frac{(w+2)}{(1+w)^2(1-w^2)} - \frac{3}{32}\frac{1}{w^3(1-w^2)}.\end{aligned} \tag{16}$$

Чтобы вычислить k-ю итерацию оператора $\mathbf{B}$, введем *производящие операторы*

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{B}^k, \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{B}_1^k,$$

и используем тождество

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + z\mathbf{M}_1\mathbf{B}_2\mathbf{M}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}(g)(w) = \mathbf{M}_1(g)(w) + z\mathbf{M}_1(\phi)(w)\cdot \mathbf{M}(g)\Big(\frac{1}{2}\Big), \tag{17}$$

что при $w = 1/2$ дает

$$\mathbf{M}(g)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\mathbf{M}_1(g)(\frac{1}{2})}{1 - z\mathbf{M}_1(\phi)(\frac{1}{2})}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(g)(w) &= \mathbf{M}_1(g)(w) + \mathbf{M}_1(g)\Big(\frac{1}{2}\Big)\theta(z,w),\\ \theta(z,w) &= \frac{z\mathbf{M}_1(\phi)(w)}{1 - z\mathbf{M}_1(\phi)(\frac{1}{2})}.\end{aligned} \tag{19}$$

Можно получить более простое выражение для $\theta(z,w)$. При замене переменной $y \to w$ функция $f_0(y) = (1-\sqrt{6}y)^{-3/2}$ переходит в $g_0(w) = 1/w^3$. Подставим g_0 в (19); тогда, поскольку $\mathbf{A}_0$ сохраняет f_0, а $\mathbf{B}$ сохраняет g_0, получим

$$\mathbf{M}(g_0)(w) = \frac{g(w)}{1-z};$$

следовательно,

$$\theta(z,w) = \frac{\mathbf{M}_1(g_0)(w) - \frac{g_0(w)}{1-z}}{\mathbf{M}_1(g_0)(\frac{1}{2})}.$$

Подытожим проведенные вычисления следующей леммой.

Лемма 8.

$$\mathbf{M}(g)(1) = \mathbf{M}_1(g)(1) - \mathbf{M}_1(g)\Big(\frac{1}{2}\Big)\frac{H_1(z) - \frac{1}{1-z}}{H_2(z)},$$

где

$$H_1(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)^3}, \quad H_2(z) = \frac{32}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2}\Big)z^k.$$

Перейдем теперь к вычислению предельного распределения случайной величины $\ell(R)$; для этого, используя лемму 8, вычислим асимптотику ее моментов. Вначале следует сконструировать функции $f_j(y)$.

Лемма 9.

$$f_j(y) = \sum_{k=0}^{\infty} k^j b(k) y^k = \frac{(2j+1)!!}{2^j}\frac{1}{w^{2j+3}}P_j(w^2),$$

где P_j – многочлен, такой, что $P_j(0) = 1$.

Доказательство. По индукции

$$f_0(y) = B(y) = g_0(w).$$

Поскольку $f_{j+1}(y) = y\frac{d}{dy}f_j(y)$ и, в соответствии с (14), $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\sqrt{6}}{2w}$, то

$$\begin{aligned} f_{j+1}(y) &= \frac{(2j+1)!!}{2^j}\Big(\frac{1-w^2}{\sqrt{6}}\Big)\frac{d}{dw}\Big(\frac{1}{w^{2j+3}}P_j(w^2)\Big)\Big(-\frac{\sqrt{6}}{2w}\Big) = \\ &= \frac{(2j+1)!!}{2^j}\Big(\frac{2j+3}{2}\frac{P(w^2)}{w^{2j+5}} - \frac{P'(w^2)}{w^{2j+3}}\Big)(1-w^2) = \\ &= \frac{(2j+3)!!}{2^{j+1}}\frac{1}{w^{2j+5}}P_{j+1}(w^2), \end{aligned}$$

где

$$P_{j+1}(w) = \Big(P_j(w) - \frac{2wP'(w)}{2j+3}\Big)(1-w), \quad P_{j+1}(0) = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть*

$$g_j(w) = \frac{1}{w^{2j+3}}.$$

Тогда

$$\mathbf{M}(g_j)(1) = \frac{(2j)!}{(1-z)^{2j+1}} + O\Big(\frac{1}{(1-z)^{2j+2}}\Big), \tag{20}$$

$$[z^R]\mathbf{M}(g_j)(1) = R^{2j} + O(R^{2j-1}). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть

$$G_j(w) = \frac{1-w^2}{w^{2j}}.$$

Тогда, в соответствии с (15),

$$\mathbf{B}_1^k(g_j)(1) = -\frac{G_j'\left(\frac{1}{k+1}\right)}{2(k+1)^2} = j(k+1)^{2j-1} - (j-1)(k+1)^{2j-3},$$

$$\mathbf{B}_1^k(g_j)\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{32}{3}G\left(\frac{1}{(k+2)}\right) - \frac{32}{3}G\left(\frac{1}{(k+1)}\right) =$$
$$= \frac{32}{3}\Big((k+2)^{2j} - (k+2)^{2j-2} - (k+1)^{2j} + (k+1)^{2j-2}\Big).$$

Пусть

$$s_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^j z^k.$$

Тогда

$$s_0(z) = \frac{1}{1-z}, \quad s_{j+1}(z) = \frac{d}{dz}zs_j(z) = zs_j'(z) + s_j(z);$$

следовательно, при $z \to 1$

$$s_j(z) = z^j\frac{d^j}{dz^j}s_0(z) + \ldots = \frac{j!}{(1-z)^{j+1}} + O\Big(\frac{1}{(1-z)^j}\Big),$$

$$\mathbf{M}_1(g_j)(1) = js_{2j-1}(z) - (j-1)s_{2j-3}(z) \approx \frac{(2j)!}{2(1-z)^{2j}},$$

$$\mathbf{M}_1(g_j)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{32}{3}\left(\frac{1}{z} - 1\right)\Big(s_{2j}(z) - s_{2j-2}(z)\Big) \approx \frac{32}{3}\frac{(2j)!}{(1-z)^{2j}}.$$

Используя лемму 8, получим (20):

$$\mathbf{M}(g_j)(1) \approx \frac{(2j)!}{2(1-z)^{2j}} - \frac{32}{3}\frac{(2j)!}{(1-z)^{2j}}\frac{\zeta(3) - \frac{1}{1-z}}{\frac{32}{3}} \approx \frac{(2j)!}{(1-z)^{2j+1}}.$$

Из последнего выражения непосредственно следует (21). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. По лемме 10

$$\mathrm{E}\,\ell(R)^j = (\mathbf{A}_0^R f_j)(0) = (\mathbf{B}^R g_j)(1) = \frac{(2j+1)!!}{2^j} R^{2j} + O(R^{2j-1}),$$

и существует предел

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{\ell(R)}{R^2}\right)^j = \mathrm{E}\,\xi^j = \frac{(2j+1)!!}{2^j}.$$

Производящая функция моментов случайной величины ξ равна

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}\,\xi^j \frac{(-s)^j}{j!} = \frac{1}{(1+s)^{3/2}}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, найдем плотность

$$p_\xi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x} x^{1/2}.$$

Теорема 2 доказана.

4. Ветвящийся процесс

4.1. Модифицированный ветвящийся процесс.

Теперь мы можем формально определить *ветвящийся процесс со специальным поведением вблизи нуля* $\bar\zeta$, фигурирующий в формулировке теоремы 3.

Пусть ζ – ветвящийся процесс с производящей функцией

$$\phi(t) = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)^2}. \tag{22}$$

Этот процесс является критическим, имеет бесконечный второй момент, и вероятность его невырождения в k-м поколении в точности равна

$$Q(k) = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Удивительный факт относительно функции $\phi(t)$ состоит в том, что удается в явном виде выписать ее итерации: r-я итерация функции $\phi(t)$ равна

$$\phi_r(t) = 1 - \frac{1}{\left(r + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)^2}. \qquad (23)$$

Через X_R обозначим множество траекторий этого ветвящегося процесса на временно́м интервале $[0, R]$ с произвольными начальным и конечным состояниями. Каждый элемент множества X_R представляет собой лес плоских корневых деревьев высоты не более R.

Для каждой траектории $x \in X$ вероятность $\omega(x)$ для x быть траекторией процесса ζ на $[0, R]$ можно представить как произведение по всем вершинам в x кроме R-го поколения:

$$\omega(x) = \prod_{v \in x, h(v) < R} [t^{\mathrm{desc}(v)}]\phi(t), \qquad (24)$$

где $\mathrm{desc}(v)$ обозначает количество потомков вершины v.

Введем измененную производящую функцию $\bar{\phi}$:

$$\bar{\phi}(t) = \phi(t) - \frac{1}{6}t\phi(t) + \frac{1}{6}. \qquad (25)$$

Модифицированный ветвящийся процесс $\bar{\zeta}$ определяется следующим образом. Каждой траектории $x \in X_R$ присвоим вес $\bar{\omega}(x)$. Для этого, если в траектории $x \in X_R$ некоторое поколение порождается единственной вершиной v, заменим в соответствующем множителе произведения (24) ϕ на $\bar{\phi}$. Чтобы полученная система весов $\bar{\omega}$ определяла вероятностное распределение на траекториях с фиксированным начальным состоянием, нужно вдобавок скорректировать вероятность вырождения, а именно, переход $k \to 0$ должен иметь вероятность $\bar{\phi}(0)\phi^{k-1}(0)$ вместо $\phi^k(0)$.

Введенные изменения в точности отражают исключение (E). Отметим, что процесс $\bar{\zeta}$ не является ветвящимся процессом. Более того, потомство двух частиц процесса $\bar{\zeta}$ не является независимым, так как условие на наследование поколения от единственного предка не является, в некотором смысле, “локальным”.

4.2. Доказательство теоремы 3.

Сравнивая (24) с (7), легко заметить, что оба выражения присваивают траекториям ветвящегося процесса некоторый вес, определяемый количеством потомков в каждой вершине дерева. Множители, приписываемые вершине с d потомками, в (24) и в (7) совпадают, за тем исключением, что функция ϕ *нормирована* так, чтобы удовлетворять основному условию для производящей функции вероятностного распределения. А именно,

$$[t^d]\phi(t) = y_0^{d-1}[y^d]x_0U_0(x_0, y),$$

что следует из тождества

$$\phi(t) = y_0^{-1}x_0U_0(x_0, y_0t)$$

(чтобы убедиться в истинности этого тождества, следует использовать выражение (2) для U_0 и заметить, что, согласно (3), $h(x_0) = \frac{1}{\sqrt{6}} = y_0$; дальнейшая проверка тривиальна).

Чтобы показать корректность такой перенормировки, возьмем траекторию x и посадим множитель y_0 вверху и y_0^{-1} внизу каждого ребра. Вершина v при этом получит множитель y_0^{d-1}, так что для траектории $x \in X_R$ с начальным (верхним) состоянием k и конечным (нижним) состоянием l получим

$$\prod_{v\in x, h(x)<R} x_0[y^d(v)]U_0(x_0, y) = y_0^{l-k} \prod_{v\in x, h(x)<R} [t^d(v)]\phi(t). \qquad (26)$$

Нетрудно проверить, что модификация $\bar{\phi}$ отражает применение исключения (E):

$$[t^d]\bar{\phi}(t) = y_0^{d-1}[y^d]\Big(x_0U_0(x_0, y) - [z]x_0W(x_0, y, z)\Big)$$

(см. доказательство леммы 3).

Другим важным отличием между прямым подходом в разделе 3 данной статьи и использованием ветвящихся процессов является *расположение начала координат*. В скелете (рассматриваемом как многокорневая триангуляция) корень нижней границы может быть расположен произвольно, тогда как дополнительный корень на верхней границе однозначно определяется правилами переноса корня (см. определение 8 шаблона слоя и рис. 4). В случае ветвящегося процесса, напротив, для траектории (рассматриваемой как лес плоских деревьев) предполагается некоторый порядок вершин в начальный момент времени, и этот порядок индуцирует порядок вершин во всех следующих поколениях включая последнее.

Пусть Y_1 – множество всех различных скелетов-траекторий с корнем, указанным только на нижней границе, Y_2 – с корнем только на верхней границе, и Y_{12} – с двумя независимо выбранными корнями на обеих границах. Для элемента $y_1 \in Y_1$ с верхней границей длины k найдется ровно k соответствующих элементов в Y_{12}. Для элемента $y_2 \in Y_2$ с нижней границей длины l найдется ровно l соответствующих элементов в Y_{12}. Значит, для всякой функции f, определенной на скелетах-траекториях и не зависящей от положения корня, выполняется равенство

$$\sum_{y\in Y_1} f(y) = \sum_{y\in Y_{12}} k(y)f(y) = \sum_{y\in Y_1} \frac{k(y)}{l(y)} f(y). \tag{27}$$

Следовательно, из (7), (26) и (27) получим

$$\mathrm{P}\{m_1(B_R)=k|m_0(B_R)=l\} = \frac{b(k)y_0^{-k}/k}{b(l)y_0^{-l}/l}\,\mathrm{P}\{\bar\zeta(0)=l|\bar\zeta(-R)=k\}.$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 3, остается заметить, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b(k)y_0^{-k}t^k/k = \int\limits_0^t B(y_0^{-1}\theta)\,\frac{d\theta}{\theta} = \frac{2}{\sqrt{1-t}} - 4 + 2\sqrt{1-t} = F_0(t).$$

4.3. Линейный контур.

Теорема 2 имеет следующий смысл: если взять контур в триангуляции, лежащий на расстоянии R от корневой границы, так, чтобы он отделял корень триангуляции от бесконечности, этот контур будет иметь длину порядка R^2. Закономерно возникает вопрос: что будет, если ослабить условия и рассматривать контуры, лежащие не ближе чем на расстоянии R от корневой границы? Оказывается, в этом случае можно найти контур существенно короче, с длиной порядка R.

Основная идея в доказательстве существования линейного контура состоит в подсчете числа общих предков. На рис. 5

показано, каким образом зигзагообразный путь, проходящий по нескольким уровням, может оказаться короче пути, целиком лежащего в одном уровне. Мы будем строить подобный зигзагообразный путь следующим образом. Выберем несколько последовательных ребер, имеющих общего предка в смысле рис. 4, и построим компоненту пути так, чтобы она поднималась от первого из выбранных ребер до этого общего предка, а затем спускалась к последнему ребру, огибая соответствующее поддерево.

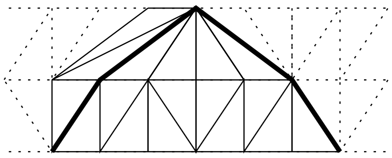

Рис. 5. Отрезок зигзагообразного пути (выделен жирным).

Возьмем r-й слой триангуляции с $n = xr^2$ ребрами и соответствующее ему $(-r)$-е поколение ветвящегося процесса. Подсчитаем количество предков для вершин $(-r)$-го поколения в $(-2r)$-м поколении. Если это число остается ограниченным с ростом r, то существует зигзагообразный путь между r-м и $(2r)$-м уровнями, состоящий из конечного числа компонент длины r каждая, который и будет искомым линейным контуром.

Для оценки мы будем использовать немодифицированный ветвящийся процесс ζ. Так как для всякой траектории x ее неизмененный вес превосходит измененный, $\omega(x) \geqslant \bar{\omega}(x)$, то среднее значение любой положительной функции относительно ω является оценкой сверху для соответствующего среднего относительно $\bar{\omega}$.

Для скелета-траектории x высоты r обозначим через $\mathrm{anc}(x)$ число частиц в момент $(-r)$ (верхняя граница), имеющих потомков в момент 0 (нижняя граница). Выполняется следующее равенство:

$$\sum_{x:k(x)=k} \omega(x) t^l z^{\mathrm{anc}(x)} = \Big(z(\phi_r(t) - \phi_r(0)) + \phi_r(0) \Big)^k .$$

Следовательно, среднее число предков $(-r)$-го поколения в $(-2r)$-м поколении при условии, что $(-r)$-е поколение содержит

n частиц, есть
$$\frac{[t^n]F_{\rm anc}^{(r)}(t)}{[t^n]F_0(t)},$$
где
$$F_{\rm anc}^{(r)}(t)=\frac{\partial}{\partial z}F_0\Big(z(\phi_r(t)-\phi_r(0))+\phi_r(0)\Big)\Big|_{z=1}=$$
$$=F_0'(\phi_r(t))(\phi_r(t)-\phi_r(0)).$$

Используя формулу (23) и учитывая, что $F_0'(t)=t(1-t)^{-3/2}$, получим
$$F_{\rm anc}^{(r)}=\frac{\phi_r(t)}{(1-\phi_r(t))^{3/2}}(\phi_r(t)-\phi_r(0))=$$
$$=\frac{1}{(r+1)^2}(1-t)^{-3/2}+\frac{3r}{(r+1)^2}(1-t)^{-1}+$$
$$+\frac{2(r^2-r-1)}{(r+1)^2}(1-t)^{-1/2}-\frac{2r}{r+1}+\frac{1}{r+(1-t)^{-1/2}}.$$

$$[t^n]F_{\rm anc}^{(r)}=\frac{1}{(r+1)^2}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi}n!}+\frac{3r}{(r+1)^2}+$$
$$+\frac{2(r^2-r-1)}{(r+1)^2}\frac{\Gamma(n+3/2)}{\sqrt{\pi}n!}+[t^n]\frac{1}{r+(1-t)^{-1/2}}.$$

Здесь потребуются промежуточные выкладки:
$$\frac{1}{r+(1-t)^{-1/2}}=\frac{r-(1-t)^{-1/2}}{r^2-(1-t)^{-1}}=$$
$$=\Big(r-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+\frac12)}{\sqrt{\pi}j!}t^j\Big)\Big(\frac{1}{r^2-1}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^{2j-2}}{(r^2-1)^{j+1}}t^j\Big),$$
$$[t^n]\frac{1}{r+(1-t)^{-1/2}}\leqslant\frac{r^{2n-1}}{(r^2-1)^{n+1}}\approx\frac{e^x}{r^3};$$
$$[t^n]F_0(t)=\frac{2(n-1)\Gamma(n-\frac12)}{\sqrt{\pi}n!}=\frac{2}{\pi}n^{-1/2}+O(n^{-3/2}).$$

И, наконец,
$$\frac{[t^n]F_{\rm anc}^{(r)}}{[t^n]F_0(t)}=\frac{1}{(r+1)^2}\frac{4n^2-1}{4(n-1)}+\frac{3r}{(r+1)^2}\Big(\frac{2(n-1)\Gamma(n-\frac12)}{\sqrt{\pi}n!}\Big)^{-1}+$$

$$+\frac{2(r^2-r-1)}{(r+1)^2}\frac{2n-1}{4(n-1)}+\frac{[t^n]\frac{1}{r+(1-t)^{-1/2}}}{[t^n]F_0(t)}\approx$$
$$\approx x+\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{x}+1+O\Big(\frac{1}{r}\Big).$$

Согласно теореме 2, число ребер на r-м уровне скелета равно приблизительно ξr^2; следовательно, математическое ожидание длины линейного контура не превосходит

$$r\,\mathrm{E}\left(\xi+\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\xi^{1/2}+1\right)<10r$$

при больших r. Теорема 4 доказана.

5. Универсальность

Здесь мы кратко обсудим универсальность конструкции скелета и подхода с использованием ветвящихся процессов.

В [1, 2] рассматривались два типа триангуляций: корневые почти-триангуляции и *строгие почти-триангуляции*, где дополнительно к условиям определения 1 требуется отсутствие двойных ребер. Для триангуляций обоих типов существует предел равномерных распределений в смысле теоремы 1 и существуют одинакового порядка оценки на площадь и длину границы R-окрестности: R^4 и R^2 соответственно.

Мы до сих пор рассматривали только корневые почти-триангуляции. Однако конструкция скелета применима и к строгим почти-триангуляциям; более того, в случае строгих почти-триангуляций возникает тот же базовый ветвящийся процесс ζ.

Гипотеза 1. *Существуют модификация $\bar{\zeta}_2$ процесса ζ и функция F_2, такие, что для строгих почти-триангуляций выполняется аналог теоремы* 3.

Аналог исключения (E) формулируется так. Слой, полученный из шаблона с гнездами $l_1,\dots,l_k$ и дисков $D_1,\dots,D_k$, является “запрещенным”, если все гнезда кроме одного имеют длину 2 или

1) все $l_1,\dots,l_k$ равны 2 кроме l_{j_1} и l_{j_2};
2) оба диска D_{j_1} и D_{j_2} содержат ребро между вершинами 0 и 2 корневой границы. (E2)

В качестве следующего шага в усилении требований на структуру триангуляции следует рассматривать триангуляции, в которых кроме петель и двойных ребер запрещены разделяющие треугольники. *Разделяющим треугольником* называется треугольник, содержащий хотя бы одну вершину как внутри, так и вовне. Однако для таких триангуляций исключение становится нелокальным относительно слоя, так как разделяющий треугольник может быть расположен в двух слоях, и разработанная в данной статье техника напрямую не применима.

Возможно, удастся применить конструкцию скелета в случае карт с нетреугольными гранями, например квадрангуляций или смешанных карт, однако это потребует более сложной модели ветвящегося процесса, например с несколькими типами частиц.

Приложение

Доказательство теоремы 5. Поскольку триангуляция T является жесткой,

$$\mathrm{P}\{B \overset{rn}{\subset} S_N\} = \frac{\sum_{N_1+\ldots+N_k=N-n} C(N_1,m_1)\cdots C(N_k,m_k)}{C(N,m_0)} = \\ = \frac{[x^{N-n}]\Big(u_{m_1}(x)\cdots u_{m_k}(x)\Big)}{[x^N]u_{m_0}(x)},$$

где

$$u_m(x) = [y^{m-2}]U_0(x,y).$$

Поведение произведения $u_{m_1}(x)\cdots u_{m_k}(x)$ вблизи особенностей определяется членом $t^{3/2}$ в разложении

$$u_{m_1}(x)\cdots u_{m_k}(x)\Big|_{x=\pm(x_0-t)} = \\ = (\pm 1)^{m_1+\cdots+m_k}\prod_{j=1}^{k} a(m_j)\Big[1+\sum_{j=1}^{k}\frac{a_1(m_j)}{a(m_j)}t + \frac{6^{3/4}}{3}\sum_{j=1}^{k}\frac{b(m_j)}{a(m_j)}t^{3/2}\Big] + O(t^2).$$

Поскольку необходимо учитывать обе особенности $x=\pm x_0$, получим

$$[x^{N-n}]u_{m_1}(x)\cdots u_{m_k}(x) = \\ = \frac{2}{3}6^{3/4}\prod_{j=1}^{k} a(m_j)\cdot\sum_{j=1}^{k}\frac{c(m_j)}{a(m_j)}[x^{N-n}](x_0-x)^{3/2}\Big(1+O(N^{-1/2})\Big), \quad (28)$$

если только $N-n = m_1+\cdots+m_k \mod 2$. Это условие выполняется, так как всегда $n = m_0 + m_1 + \cdots + m_k \mod 2$ и $N = m_0 \mod 2$. Аналогично

$$[x^N]u_{m_0}(x) = \frac{2}{3}6^{3/4}b(m_0)[x^N](x-x_0)^{3/2}\Big(1+O(N^{-1/2})\Big). \qquad (29)$$

Утверждение теоремы получается как отношение (28) к (29). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Без ограничения общности положим $j=1$. Имеем

$$\mathrm{P}\{N_1 = \max_{i=1,\dots,k}(N_i)\} = \frac{\sum_{\substack{N_1,\dots,N_k\\ N_1\geqslant N_2,\dots,N_k}} C(N_1,m_1)\cdots C(N_k,m_k)}{\sum_{N_1,\dots,N_k} C(N_1,m_1)\cdots C(N_k,m_k)}.$$

Для любого целого $M>0$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}\{N_1 = \max_{i=1,\dots,k}(N_i)\} \geqslant \lim_{N\to\infty}\mathrm{P}\{N_2+\ldots+N_k\leqslant M\} =$$

$$= \sum_{N_2+\ldots+N_k\leqslant M} C(N_2,m_2)\cdots C(N_k,m_k)\lim_{N\to\infty}\frac{[x^{N-n-(N_2+\ldots+N_k)}]u_{m_1}(x)}{[x^{N-n}]u_{m_1}(x)\cdots u_{m_k}(x)} =$$

$$= \sum_{N_2+\ldots+N_k\leqslant M} C(N_2,m_2)\cdots C(N_k,m_k)\frac{b(m_1)x_0^{N_2+\ldots+N_k}}{\prod_{i=1}^k a(m_i)\cdot\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}}. \qquad (30)$$

В пределе $M\to\infty$ получим

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}\{N_1 = \max_{i=1,\dots,k}(N_i)\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b(m_1)}{\prod_{i=1}^k a(m_i)\cdot\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}}\lim_{M\to\infty}\sum_{N_2+\ldots+N_k\leqslant M}\prod_{i=2}^k C(N_i,m_i)x_0^i \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b(m_1)}{\prod_{i=1}^k a(m_i)\cdot\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}}\lim_{M\to\infty}\prod_{i=2}^k u_{m_i}(x_0) =$$

$$= \frac{b(m_1)\prod_{i=2}^k a(m_i)}{\prod_{i=1}^k a(m_i)\cdot\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}} = \frac{b(m_1)}{a(m_1)}\Big(\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}\Big)^{-1}. \qquad (31)$$

Значит, для всякого $j=1,\dots,k$

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{P}\{N_j = \max_{i=1,\dots,k}(N_i)\} \geqslant \frac{b(m_j)}{a(m_j)}\Big(\sum_{i=1}^k\frac{b(m_i)}{a(m_i)}\Big)^{-1}. \qquad (32)$$

Поскольку сумма правых частей неравенства (32) для $j=1,\dots,k$ равняется 1, неравенство можно заменить на строгое равенство, что дает первое утверждение теоремы.

Из (30), (31) следует

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{N_1 = \max_{i=1,\dots,k}(N_i)\} = \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}\{N_2+\ldots+N_k \leqslant M\},$$

а предел условного распределения $(N_2,\dots,N_k|N_1=\max)$ имеет производящую функцию

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}(t_2^{N_2}\cdots t_k^{N_k}|N_1 = \max_{i=1,\cdots,k} N_i) = \prod_{i=2}^{k} \frac{u_{m_k}(x_0 t_i)}{u_{m_k}(x_0)}. \tag{33}$$

Следовательно, существует предел распределения $(N_2,\dots,N_k|N_1 = \max_{i=1,\dots,k} N_i)$, причем случайные величины $N_2,\dots,N_k$ асимптотически независимы. Теорема 6 доказана.

Доказательство леммы 5. Пусть T – одна из триангуляций, входящих в $D(N,m,l)$, т.е. триангуляция с ребром между вершинами 0 и l корневой границы ($0-l$-ребром). Разрежем T вдоль этого ребра на две части, T_1 и T_2; в случае, если $0-l$-ребер несколько, выберем крайнее (см. рис. 6). Тогда T_1 имеет тип $(N_1, l+1, 0)$ и не содержит ребра, параллельного корневому (т.е. ребра с теми же концами), а T_2 имеет тип $(N_2, m+1, 0)$ и является триангуляцией общего вида.

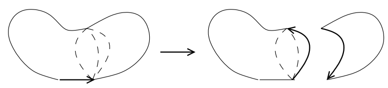

Рис. 6. Разрезание триангуляции по $0-l$-ребру.

Пусть $R(N,m)$ – число триангуляций типа $(N,m,0)$, не содержащих ребра, параллельного корневому, а $R(x,y)$ – соответствующая производящая функция

$$R(x,y) = \sum_{N\geqslant 0}\sum_{m\geqslant 2} R(N,m) x^N y^{m-2}.$$

Тогда

$$W(x,y,z) = U_0(x,y) R(x,z). \tag{34}$$

По определению, функция $W(x, y, z)$ симметрична по (y, z) и $W(x, y, 0) = U_0(x, y)$; следовательно,

$$U_0(x, y) = U_0(x, 0)R(x, y). \tag{35}$$

Из (34), (35) немедленно следует утверждение леммы:

$$W(x, y, z) = \frac{U_0(x, y)U_0(x, z)}{U_0(x, 0)}.$$

Литература

1. O. Angel, O. Schramm, *Uniform infinite planar triangulations,* arXiv:math. PR/0207153 (2002).
2. O. Angel, *Growth and percolation on the uniform random infinite planar triangulation,* arXiv:math.PR/0208123 (2002).
3. Я. Гульден, Д. Джексон, *Перечислительная комбинаторика.* Наука, М., 1990.
4. W. Tutte, *A census of planar triangulations.* — Canad. J. Math. **14** (1962), 21–38.
5. M. Krikun, V. A. Malyshev, *Random boundary of a planar map.* — In: *Trends in Mathematics. Mathematics and Computer Science* II (D. Gardy, A. Mokkadem, eds.), Birkhauser, 2002, pp. 83–93.
6. B. L. Richmond, N. C. Wormald, *Almost all maps are asymmetric.* — J. Combin. Theory B **63**, No. 1 (1995), 1–7.
7. J. Ambjorn, Y. Watabiki, *Scaling in quantum gravity.* — Nucl. Phys. B **445**, No. 1 (1995), 129–142.
8. У. Татт, *Теория графов.* Мир, М., 1988.

Krikun M. A. Uniform infinite planar triangulation and related branching process.

We consider the uniform infinite planar triangulation, which is the weak limit of the uniform distributions on finite rooted sphere triangulations with a given number of triangles N as $N \to \infty$. The main question we study is the asymptotic behaviour of the triangulation profile, which we define as follows. Take a ball of radius R in an infinite triangulation. One of its boundary components separates this ball from the infinite part of the triangulation. We denote the length of this component by $\ell(R)$ and call the sequence $\ell(R)$, $R = 1, 2, \dots$, the triangulation profile.

We prove that the ratio $\ell(R)/R^2$ converges to a nondegenerate random variable. We establish a connection between the triangulation profile and a certain time-reversed critical branching process. We also show that

there exists a contour of length linear in R that lies outside the R-ball and separates the R-ball from the infinite part of the triangulation.

Московский государственный университет

E-mail: krikun@lbss.math.msu.su

Поступило 9 января 2004 г.