Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 307, 2004 г.

К. П. Кохась

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП СТУПЕНИ 2 И ТЕОРИЯ ОРБИТ

В этой заметке мы описываем факторпредставления дискретных нильпотентных групп ступени 2 с 2-делимым центром в духе теории орбит. Основы метода орбит для случая конечных групп описаны в [6]. Мы доказываем, что многие стандартные утверждения теории орбит остаются в силе для случая конечных и счетных дискретных нильпотентных групп. В случае счетных групп мы предъявляем конструкцию факторпредставления по орбите, доказываем, что каждое факторпредставление группы (точнее, каждый след) получается при помощи этой конструкции из подходящей орбиты, и доказываем теорему о разложении представления, соответствующего орбите, в прямой интеграл при сужении его на подгруппу.

Автор благодарен А. М. Вершику за внимание к работе и проявленное терпение.

1. Метод орбит для конечных нильпотентных групп ступени 2.

Определение 1.1. *Будем говорить, что G — нильпотентная группа ступени 2, если она представляет собой центральное расширение абелевой группы, т. е. если существует короткая точная последовательность*

$$0 \to C \to G \to A \to 0, \qquad (1)$$

где A и C — абелевы группы и C есть центр группы G.

Определение 1.2. *Кольцо Ли — это абелева группа $\mathfrak{a}$, на которой задана биаддитивная кососимметрическая операция $[\cdot,\cdot]$, удовлетворяющая тождеству Якоби. Кольцо Ли называется коммутативным, если коммутатор $[\cdot,\cdot]$ тождественно равен нулю.*

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-00093 и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-2251.2003.1.

Определение 1.3. *Будем говорить, что $\mathfrak{g}$ — нильпотентное кольцо Ли ступени 2, если оно представляет собой центральное расширение коммутативного кольца Ли, т. е. если существует короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathfrak{c} \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \to 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{c}$ — коммутативные кольца Ли и $\mathfrak{c}$ есть центр кольца $\mathfrak{g}$.

В работе [6] определены взаимно обратные функторы из категории нильпотентных групп ступени 2 в категорию нильпотентных колец Ли ступени 2 и обратно. Нильпотентной группе G ставится в соответствие кольцо Ли $\mathfrak{g}$, для которого абелевы группы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ из (2) совпадают соответственно с абелевыми группами A, C из (1) (тем самым B и $\mathfrak{b}$ совпадают как множества). Все конструкции работают в случае, когда центр группы G 2-делимый. Мы приводим необходимые утверждения из [6].

Пусть $\mathfrak{g}^*$ обозначает группу комплексных аддитивных характеров аддитивной группы кольца Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 1.1 ([6]). *Пусть G — конечная или счетная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром.*

1) *Для любых $g_1, g_2 \in G$*

$$g_1^{-1} = -g_1, \tag{3}$$

$$g_1 \cdot g_2 = g_1 + g_2 + \frac{[g_1, g_2]}{2}, \tag{4}$$

$$g_1 \cdot g_2 \cdot g_1^{-1} = g_2 + [g_1, g_2]. \tag{5}$$

2) *Коприсоединенное представление группы G задается формулой*

$$\big(\mathrm{Ad}^*(b)\chi\big)(l) = \chi(l - [b, l]). \tag{6}$$

3) *Пусть Ω — произвольная орбита коприсоединенного представления, χ_1, $\chi_2 \in \Omega$. Тогда стабилизаторы точек χ_1 и χ_2 совпадают и $\forall b \in \mathrm{Stab}(\chi_1) = \mathrm{Stab}(\chi_2)$ $\chi_1(b) = \chi_2(b)$. При этом*

$$\mathrm{Stab}(\chi) = \{b \in \mathfrak{g} \mid \chi([b, \mathfrak{g}]) = 1\}. \tag{7}$$

4) *В случае, если группа G конечна, каждой орбите Ω коприсоединенного представления соответствует (комплексное) представление $\tau(\Omega)$ размерности $n = \dim \tau(\Omega) = \sqrt{\#\Omega}$ с характером*

$$\mathrm{char}\,\tau(\Omega) = \begin{cases} n\chi(b), & b \in \mathrm{Stab}(\chi), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\chi \in \Omega$ — произвольная точка на орбите.

Для каждого характера $\chi \in \mathfrak{g}^*$ обозначим через $\Omega(\chi)$ орбиту коприсоединенного представления характера χ. Нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 1.2. *Пусть G — конечная или счетная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром; G_0 — ее подгруппа; $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ — соответствующие кольца Ли; P — естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{g}_0^*$; Ω — орбита коприсоединенного представления группы G, $S = \mathrm{Stab}(\chi)$, $\chi \in \Omega$, — стабилизатор точек орбиты Ω в группе G. Тогда*

1) *стабилизаторы в G_0 всех точек вида $P(\chi)$, $\chi \in \Omega$, одинаковы для всех точек χ;*

2) *характеры $\chi \in \Omega$ совпадают на множестве $S \cap G_0$;*

3) *если G_0 — конечная группа, то орбиты группы G_0, составляющие множество $P(\Omega)$, содержат одинаковое число точек, а соответствующие им представления имеют одинаковые размерности.*

Доказательство. Пусть $S_0(\chi) = \mathrm{Stab}(P(\chi))$ — стабилизатор характера $P(\chi)$ в группе G_0. По лемме 1.1.3 стабилизатор $S_0(\chi)$ состоит из тех и только тех элементов G_0, для которых $\chi([b, \mathfrak{g}_0]) = 1$. Поскольку мы имеем дело с кольцом Ли ступени 2, то в силу (6) значения характеров, лежащих на одной орбите группы G, совпадают на центре и, в частности, на пространстве $[b, \mathfrak{g}_0]$, откуда сразу следует, что множество $S_0(\chi)$ не зависит от выбора χ, что и утверждается в первом пункте леммы.

Более того, значения характеров, лежащих на одной орбите группы G, совпадают даже на стабилизаторе S (в силу (7)). Отсюда мы сразу получаем второе утверждение леммы.

Для доказательства третьего утверждения заметим, что одинаковый размер орбит — это следствие п. 1, а совпадение размерностей следует из равенства $\dim \tau(\Omega) = \sqrt{\#\Omega}$ леммы 1.1.4. $\square$

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема, восходящяя к [1].

Теорема 1.1. *Пусть G — конечная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром, G_0 — ее конечная подгруппа, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ — соответствующие кольца Ли, P — естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{g}_0^*$.*

1) *Если* $T = \tau(\Omega)$ *— неприводимое представление группы* G, *соответствующее орбите* $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, *то представление* $T_0 = T|_{G_0}$ *подгруппы* G_0 *разлагается в прямую сумму представлений, соответствующих тем орбитам в* $\mathfrak{g}_0^*$, *которые содержатся в* $P(\Omega)$:

$$\tau(\Omega) = \frac{n}{kn_0} \sum_{\Omega_0 \subset P(\Omega)} \oplus\, \tau(\Omega_0)\,; \tag{9}$$

здесь k *— это число орбит коприсоединенного представления группы* G_0 *во множестве* $P(\Omega)$[1].

2) *Если* T_0 *— неприводимое представление подгруппы* G_0, *соответствующее орбите* Ω_0 *коприсоединенного представления группы* G_0, *то представление* $\mathrm{ind}_{G_0}^{G} T_0$ *разлагается в прямую сумму представлений группы* G, *соответствующих тем орбитам в* $\mathfrak{g}^*$, *которые пересекаются с* $P^{-1}(\Omega_0)$.

Доказательство. 1) Пусть $\chi \in \Omega$ — произвольная точка орбиты. Проекция $P(\chi)$ — это просто сужение характера χ на $\mathfrak{g}_0$. Пусть $S = \mathrm{Stab}\,\chi$ — стабилизатор характера χ в группе G, $S_0(\chi) = \mathrm{Stab}(P(\chi))$ — стабилизатор характера $P(\chi)$ в группе G_0. Пусть $n = \dim T$, n_0 — размерность представления подгруппы G_0, соответствующего характеру $P(\chi)$ (в силу леммы 1.2.3 эта величина одинакова для всех χ).

Утверждение теоремы проверим подсчетом характеров, а именно, установим, что

$$\mathrm{char}\, T(g) = \frac{1}{nn_0} \sum_{\nu \in \Omega} \mathrm{char}\, P(\nu)(g) \tag{10}$$

для всех $g \in \mathfrak{g}_0$ (напомним, что G_0 и $\mathfrak{g}_0$ совпадают как множества).

По лемме 1.1.4 мы знаем, что

$$\mathrm{char}\, T_0(g) = \begin{cases} n\chi(g), & g \in S \cap G_0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11}$$

Из описания стабилизатора (7) ясно, что

$$S(\chi) \cap G_0 \subseteq S_0(\chi)\,.$$

Это вложение, вообще говоря, собственное (см. пример 3.1).

[1] Кажется, $k = \#S_0/(S \cap G_0)$.

В случае, если $S\cap G_0 = S_0$, равенство (10) очевидно: его левая часть задается равенством (11), а правая по леммам 1.2.2 и 1.1.4 равна

$$\begin{cases} \frac{1}{nn_0}n^2 n_0\chi(g), & g\in S_0,\\ 0, & g\notin S_0;\end{cases}$$

здесь n^2 — это число точек орбиты Ω.

В случае $S\cap G_0 \subsetneqq S_0$ для $g\in S\cap G_0$ равенство (10) устанавливается аналогично. Если же $g\in S_0\setminus(S\cap G_0)$, то

$$\sum_{\nu\in\Omega}\operatorname{char} P(\nu)(g) = \frac{1}{|S|}\sum_{b\in G}\chi(g-[b,g]) = \frac{1}{|S|}\chi(g)\sum_{b\in G}\chi([b,-g]) = 0\,;$$

здесь последнее равенство выполнено в силу того, что при $g\in S_0\setminus(S\cap G_0)$ сужение характера χ на пространство $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ не равно единичному характеру. Наконец, при $g\notin S_0$ обе части рассматриваемой суммы равны нулю.

Проверим, что разложение (10) можно записать в виде "теоремы ветвления" (9). Действительно, для $\chi_0\in P(\Omega)$ имеем $\#P^{-1}(\chi_0) = \frac{n^2}{kn_0^2}$; следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{char}\tau(\Omega) &= \frac{1}{nn_0}\sum_{\nu\in\Omega}\operatorname{char} P(\nu) = \frac{1}{nn_0}\sum_{\nu_0\in P(\Omega)}\frac{n^2}{kn_0^2}\operatorname{char}\nu_0 = \\ &= \frac{n}{kn_0}\cdot\frac{n^2}{kn_0^2}\sum_{\Omega_0\subset P(\Omega)} n_0^2\operatorname{char}\tau(\Omega_0) = \frac{n}{kn_0}\sum_{\Omega_0\subset P(\Omega)}\operatorname{char}\tau(\Omega_0)\,.\end{aligned}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

2) Пусть R — неприводимое представление группы G, соответствующее характеру $\chi\in\Omega$. Пусть $n_\chi = \dim R$, $n_0 = \dim T_0$.

По теореме двойственности Фробениуса кратность вхождения R в $\operatorname{ind}_{G_0}^G T_0$ равна кратности, с которой T_0 входит в $R|_{G_0}$; в силу (9) эта кратность равна $\frac{n_\chi}{k_\chi n_0}$, где k_χ — это число орбит, на которые распадается орбита Ω при сужении на G_0. В частности, эта кратность не равна нулю лишь для тех орбит Ω, для которых $\Omega\cap P^{-1}(\Omega_0)\neq\varnothing$. Следовательно,

$$\operatorname{char}\operatorname{ind}_{G_0}^G T_0 = \sum_{\Omega:\Omega\cap P^{-1}(\Omega_0)\neq\varnothing}\frac{n_\chi}{k_\chi n_0}\operatorname{char}\tau(\Omega) = \sum_{\chi\in P^{-1}(\Omega_0)}\frac{1}{n_\chi n_0}\operatorname{char}\tau(\chi)\,.$$

Второе утверждение теоремы доказано. □

2. Орбиты и факторпредставления.

В [6, теорема 5.8] показано, что для конечной нильпотентной группы G ступени 2 индуцирование со стабилизатора орбиты дает изотипическое представление группы G, соответствующее двустороннему идеалу групповой алгебры $\mathbb{C}(G)$. Иными словами, результат индуцирования есть в этом случае фактор типа I_n. В этом разделе мы доказываем теорему, обобщающую это наблюдение. Поскольку стабилизатор точки орбиты содержит центр группы G, то факторпространство G/S_Ω (или, если угодно, саму орбиту) можно рассматривать и как левое, и как правое однородное пространство группы G. Мы проверим, что "индуцирование слева" и "индуцирование справа" позволяют определить в пространстве индуцированного представления пару коммутирующих действий группы G, что можно интерпретировать как представление дубля $G \times G$. Это представление оказывается неприводимым и является конечным факторпредставлением группы G.

Рассмотрим произвольный характер χ кольца Ли $\mathfrak{g}$, его орбиту Ω в коприсоединенном представлении и стабилизатор S_Ω. По определению стабилизатора для любого $s \in S_\Omega$ имеем при всех $g \in G$ равенство

$$\chi(g) = \chi(g - [s, g]) \,. \tag{12}$$

Так как χ рассматривается как аддитивный характер кольца Ли, написанное равенство просто означает, что

$$[s, g] \in \ker \chi. \tag{13}$$

Поэтому характер χ является одномерным представлением кольца Ли $\mathfrak{s}_\Omega$. Как множества $\mathfrak{s}_\Omega$ и S_Ω совпадают. В силу этих наблюдений и равенства (4), мы заключаем, что представлением группы S_Ω, определяемым характером χ, является в точности этот характер χ, рассматриваемый как отображение $S_\Omega \to \mathbb{C}$.

Пусть $X = G/S_\Omega$. Любой элемент $g \in G$ можно записать как пару

$$g = (g_1, g_2), \qquad \text{где } g_1 \in X, g_2 \in S_\Omega \,. \tag{14}$$

Посмотрим, как выглядит представление $\operatorname{ind}_{S_\Omega}^G \chi$ в этих координатах. По определению, это представление задано в пространстве $\ell^2(X)$. Заметим однако, что в силу соотношений (4), (13), действия S_Ω на X левыми и правыми сдвигами не различаются представлением χ. Поэтому мы имеем возможность индуцировать двумя способами.

Первый способ — индуцирование справа. Пространство, в котором действует представление, — это множество функций $f \in \ell^2(G)$, удовлетворяющих условию симметрии

$$f(hg) = \chi(h)f(g) \quad \text{для всех } h \in S_\Omega,\ g \in G\,, \tag{15}$$

а сами операторы представления действуют по формуле

$$(T^R(g_0)f)(g) = f(gg_0)\,.$$

Второй способ — индуцирование слева. Пространство, в котором действует представление, — это множество функций $f \in \ell^2(G)$, удовлетворяющих условию симметрии

$$f(gh) = \chi(h)f(g) \quad \text{для всех } h \in S_\Omega,\ g \in G\,, \tag{16}$$

а операторы представления действуют по формуле

$$(T^L(g_0)f)(g) = f(g_0^{-1}g)\,.$$

Условия (15), (16) позволяют реализовать оба представления в пространстве $\ell^2(X)$:

$$(T_L(g)f)(x) = \chi(s_L)f(x - g_1)\,, \tag{17}$$

$$(T_R(g)f)(x) = \chi(s_R)f(x + g_1)\,, \tag{18}$$

где $f \in \ell^2(X)$, плюс обозначает групповую операцию в X, а элементы $s_R = s_R(g,x) \in S_\Omega$ и $s_L = s_L(g,x) \in S_\Omega$ определяются из соотношений

$$x \cdot g = s_R \cdot (x + g_1)\,, \tag{19}$$

$$g^{-1} \cdot x = (x - g_1) \cdot s_L\,. \tag{20}$$

Лемма 2.1. *Определенные выше представления T_R и T_L группы G взаимно коммутируют.*

Доказательство. Проверим, что эти представления коммутируют друг с другом:

$$\begin{aligned}
(T_R(h)T_L(g)f)(x) &= T_R(h)\chi(s_L(g,x))f(x-g_1) = \\
&= \chi(s_R(h,x))\chi(s_L(g,x+h_1))f(x-g_1+h_1)\,, \\
(T_L(g)T_R(h)f)(x) &= T_L(g)\chi(s_R(h,x))f(x+h_1) = \\
&= \chi(s_L(g,x))\chi(s_R(h,x-g_1))f(x-g_1+h_1)\,.
\end{aligned}$$

Покажем, что $\chi(s_L(h,x)+s_R(g,x+h_1))=\chi(s_R(g,x)+s_L(h,x-g_1))$. Действительно, по формулам (19), (3), (4)

$$\begin{aligned} s_R(h,x)+s_L(g,x+h_1) &= xh(x+h_1)^{-1}+(x+h_1-g_1)^{-1}g^{-1}(x+h_1)= \\ &= h-h_1+\tfrac{1}{2}[x,h]-\tfrac{1}{2}[x+h,x+h_1]+ \\ &\quad +g_1-g-\tfrac{1}{2}[g,x+h_1]-\tfrac{1}{2}[x-g_1+h_1,x-g+h_1]\,, \\ s_L(g,x)+s_R(h,x-g_1) &= (x-g_1)^{-1}g^{-1}x+(x-g_1)h(x-g_1+h_1)^{-1}= \\ &= g_1-g-\tfrac{1}{2}[g,x]-\tfrac{1}{2}[x-g_1,x-g]+ \\ &\quad +h-h_1+\tfrac{1}{2}[x-g_1,h]-\tfrac{1}{2}[x-g_1+h,x-g_1+h_1]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что в кольце Ли

$$s_R(h,x)+s_L(g,x+h_1)-s_L(g,x)-s_R(h,x-g_1)=[g_1-g,h]+[g,h-h_1]\,,$$

а поскольку $h-h_1$, $g-g_1\in S_\Omega$, эта разность лежит в ядре характера χ . $\square$

Определение 2.1. *Пусть G — произвольная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром, Ω — орбита коприсоединенного представления группы G, $\chi\in\Omega$ — произвольная точка орбиты, S_Ω — стабилизатор точки χ, $X=G/S_\Omega$. Тогда представление группы $G\times G$ в пространстве $\ell^2(X)$, действующее по формуле*

$$(\pi(g,h)f)(x)=(T_L(g)T_R(h)f)(x)\,,$$

будем называть представлением группы $G\times G$, индуцированным с представления χ, и обозначать $\pi_\Omega=\mathrm{ind}_{S_\Omega}^{G\times G}\chi$.

Замечание 2.1 Как показывает пример из раздела 3.3, уже для нильпотентных групп ступени 3 представления T^L и T^R, построенные аналогично, не являются коммутирующими.

Теорема 2.1. *Пусть G — произвольная счетная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром, Ω — орбита коприсоединенного представления группы G, $\chi\in\Omega$ — произвольная точка орбиты, S_Ω — стабилизатор точки χ. Тогда представление $\pi_\Omega=\mathrm{ind}_{S_\Omega}^{G\times G}\chi$ группы $G\times G$ неприводимо и тем самым определяет некоторое факторпредставление группы G. Это представление — типа II_1 или I_n со следом*

$$\mathrm{Tr}_{\pi_\Omega}(g)=\begin{cases}\chi(g), & g\in S_\Omega,\\ 0, & g\notin S_\Omega.\end{cases} \tag{21}$$

Замечание 2.2 Соответствие "орбита $\longleftrightarrow$ представление" не является взаимно однозначным, как показывает пример счетной группы Гейзенберга из следующего параграфа.

Доказательство. Классическим примером фактора II_1 является регулярное представление счетной группы с бесконечными классами сопряженных элементов (см. [3]). Мы проводим рассуждение, аналогичное построению этого примера.

Рассмотрим базис e_x, $x \in X$, пространства $\ell^2(X)$, порожденный δ-функциями в элементах группы X. Опишем коммутанты представлений T_L, T_R в терминах матричных элементов.

Пусть $A = (A_{x,y})_{x,y \in X} \in (T_L(G))'$, $B = (B_{x,y})_{x,y \in X} \in (T_R(G))'$, где штрих обозначает взятие коммутанта. Выписывая уравнения $AT_L(g) = T_L(g)A$, $BT_R(g) = T_R(g)B$ через матричные элементы, получаем следующие соотношения на матричные элементы $A_{x,y}$, $B_{x,y}$:

$$\begin{aligned} \chi(s_L(g,x))A_{x,y} &= \chi(s_R(g,y))A_{x-g_1,y-g_1} \,, \\ \chi(s_R(g,x))B_{x,y} &= \chi(s_R(g,y))B_{x+g_1,y+g_1} \,. \end{aligned}$$

Заметим, что для для элементов g вида $g = (z,0)$

$$s_R(g,x) = x \cdot z \cdot (x+z)^{-1} = (x+z+\tfrac{1}{2}[x,z]) \cdot (-z-x) = \tfrac{1}{2}[x,z] \,.$$

Аналогично $s_L(g,x) = \frac{1}{2}[x,z]$. Полагая в первом соотношении $g = (-z,0)$, $x = 0$, а во втором — $g = (z,0)$, $x = 0$, получаем равенства

$$A_{z,y+z} = \chi(\tfrac{1}{2}[z,y])A_{0,y} \,, \tag{22}$$

$$B_{z,y+z} = \chi(-\tfrac{1}{2}[z,y])B_{0,y}, \qquad y,\ z \in X \,. \tag{23}$$

Проверим, что всякие матрицы A и B, подчиняющиеся этим соотношениям, коммутируют:

$$(AB)_{x,y} = \sum_u A_{x,u}B_{u,y} = \sum_u A_{0,u-x}B_{0,y-u}\chi(\tfrac{1}{2}[x,u-x])\chi(-\tfrac{1}{2}[u,y-u]),$$

$$(BA)_{x,y} = \sum_v B_{x,v}A_{v,y} = \sum_v B_{0,v-x}A_{0,y-v}\chi(-\tfrac{1}{2}[x,v-x])\chi(\tfrac{1}{2}[v,y-v]).$$

Если $u - x = y - v$, то $y - u = v - x$ и произведения $A_{0,u-x}B_{0,y-u}$ и $B_{0,v-x}A_{0,y-v}$, присутствующие в этих суммах, совпадают. Совпадение коэффициентов при этих произведениях следует из равенства

$$[x,u-x] - [u,y-u] + [x,v-x] - [v,y-v] = [x+y,u+v] \,,$$

в котором правая часть равна нулю, если $u - x = y - v$.

Мы проверили соотношения $(T_R)'' \supset (T_L)'$, $(T_L)'' \supset (T_R)'$. Вместе с соотношениями $(T_R)' \supset T_L$, $(T_L)' \supset T_R$, установленными в лемме 2.1, они дают нам равенства $(T_R)'' = (T_L)'$, $(T_R)' = (T_L)''$.

Найдем пересечение $(T_R)' \cap (T_R)''$. Пусть $A \in (T_R)' \cap (T_R)''$. Пусть $A_{0,y} \neq 0$ при некотором $y \in X$. Если $y \neq 0$, то в силу соотношений (22), (23) $\chi(\frac{1}{2}[z,y]) = \chi(-\frac{1}{2}[z,y])$ при всех $z \in X$, иными словами, $[z,y] \in \ker\chi$ при всех $z \in X$. Но тогда y должен лежать в стабилизаторе S_Ω, что невозможно. Если же $y = 0$, то в силу соотношения (22) матрица A кратна единичной. Таким образом, пересечение $(T_R)' \cap (T_R)''$ состоит только из матриц кратных единичной. Итак, T_L, T_R — пара взаимно коммутирующих факторпредставлений группы G.

Проверим теперь, что формула (21) действительно задает след в факторе T_L. То, что формула (21) задает линейную центральную функцию, очевидно. По формуле (18) мы видим, что диагональные элементы матрицы оператора $T_L(g)$ равны в точности $\mathrm{Tr}_{\pi_\Omega}(g)$. $\square$

3. Приложения к группам Гейзенберга и другим группам.

Пусть F — счетное поле характеристики $p \neq 2$. Пусть H — трехмерная группа Гейзенберга над полем F, т. е. группа матриц вида

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k, \ell, m \in F \right\}.$$

Пусть H_q — аналогичная (конечная) группа над конечным полем F_q, $q = p^n$. Мы будем использовать следующие обозначения для ее образующих: $x_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $z_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1. “Классическая” теория орбит группы Гейзенберга.

Для случая группы Гейзенберга над конечным полем описание орбит коприсоединенного представления, определенного в §1, практически не отличается от описания орбит классической группы Гейзенберга.

Кольцо Ли $\mathfrak{h}_q$ конечной группы Гейзенберга H_q представляет собой множество верхнетреугольных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & m \\ 0 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k, \ell, m \in F_q, \tag{24}$$

с аддитивной операцией покоординатного сложения и обычной матричной скобкой Ли. Двойственное пространство $\mathfrak{h}_q^*$ — пространство характеров аддитивной группы — представляет собой множество нижнетреугольных матриц вида

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \rho & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \rho \in \widehat{F}_q\,,$$

с естественной операцией спаривания $\langle \mathcal{B}, A\rangle = \operatorname{Tr} \mathcal{B}A$, где под произведением характера и элемента поля понимается комплексное число, равное значению характера на данном элементе поля.

Коприсоединенное представление задается формулой (6). В нашем случае оно имеет вид

$$\operatorname{Ad}^*(g) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ \rho & \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha - \rho(y\cdot) & 0 & 0 \\ \rho & \beta + \rho(x\cdot) & 0 \end{pmatrix},$$
$$\text{где} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

(для умножения характеров мы используем аддитивную запись). Орбиты этого представления имеют вид

$$\Omega_\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ \rho & * & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \widehat{F}_q,\ \rho \neq \mathbf{1},$$

и

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \widehat{F}_q\,.$$

Общий рецепт получения представления по орбите для нильпотентной группы G ступени 2 состоит в следующем. Зафиксируем произвольную точку χ на данной орбите. Найдем максимальную подалгебру $\mathfrak{h}$ в кольце Ли $\mathfrak{g}$, которая удовлетворяет свойству

$$\langle \chi, [x, y]\rangle = 0 \quad \text{при всех } x, y \in \mathfrak{h}\,.$$

Очевидно, что каждая такая подалгебра содержит центр кольца Ли $\mathfrak{g}$ (и даже стабилизатор S_Ω). Так как мы имеем дело с нильпотентной группой ступени 2, то в естественном смысле определена группа $H = \exp \mathfrak{h}$ — как множество она совпадает с $\mathfrak{h}$ (см. формулу Кемпбелла–Хаусдорфа (4)). Функционал χ задает одномерное представление кольца Ли $\mathfrak{h}$ и группы H. Индуцирование с этого представления дает нам представление группы G, соответствующее орбите.

В случае группы Гейзенберга H_{q^n} получаем, что орбите Ω_ρ соответствует q-мерное представление T_ρ (индуцируем с подгруппы, заданной условием $k = 0$, см. (24)), а одноточечной орбите $\Omega_{\alpha,\beta}$ — одномерное представление $T_{\alpha,\beta}$ (индуцируем с центра). Представления T_ρ, $T_{\alpha,\beta}$ образуют полный список неприводимых унитарных представлений группы ([2, 6]).

В качестве примера применим теорию орбит для доказательства следующей леммы ([2]).

Лемма 3.1. *Матрица кратностей ограничений представлений H_{q^n} на H_q имеет вид*

	$T_{\alpha,\beta}$	T_γ
T_{α_n,β_n}	$\begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_n,\beta_n)\Big\|_{(F_q\oplus F_q)} = (\alpha,\beta), \\ 0, & \text{если } (\alpha_n,\beta_n)\Big\|_{(F_q\oplus F_q)} \neq (\alpha,\beta) \end{cases}$	0
T_{γ_n}	$\begin{cases} q^{n-2}, & \text{если } \gamma_n\Big\|_{F_q} = \mathbf{1}, \\ 0, & \text{если } \gamma_n\Big\|_{F_q} \neq \mathbf{1} \end{cases}$	$\begin{cases} q^{n-1}, & \text{если } \gamma_n\Big\|_{F_q} = \gamma, \\ 0, & \text{если } \gamma_n\Big\|_{F_q} \neq \gamma \end{cases}$

Доказательство. Из формулы (25) ясно, что при проекции $\mathfrak{h}^*_{q^n}$ на $\mathfrak{h}^*_q$ орбита Ω_{ρ_n} при $\rho_n|_{\mathfrak{h}_q} \not\equiv \mathbf{1}$ целиком проектируется на орбиту Ω_ρ, где $\rho = \rho_n|_{\mathfrak{h}_q}$. По формуле (9) кратность, с которой представление T_ρ входит в $T_{\rho_n}|_{H_q}$, равна $q^n/q = q^{n-1}$.

При $\rho_n|_{\mathfrak{h}_q} \equiv \mathbf{1}$ проекция орбиты Ω_{ρ_n} распадается в объединение одноточечных орбит $\Omega_{\alpha,\beta}$. По формуле (9) кратность, с которой представление $T_{\alpha,\beta}$ входит в $T_{\rho_n}|_{H_q}$, равна $q^n/q^2 = q^{n-2}$.

Наконец, проекцией одноточечной орбиты $\Omega_{\alpha_n,\beta_n}$ является орбита $\Omega_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = \alpha_n|_{\mathfrak{h}_q}$, $\beta = \beta_n|_{\mathfrak{h}_q}$. □

Пример 3.1. Нетрудно видеть, что для группы H_q стабилизатором орбиты вида Ω_γ служит центр группы, а стабилизатором орбиты вида $\Omega_{\alpha,\beta}$ — вся группа H_q. Пусть γ_n — аддитивный характер поля F_{q^n}, для которого $\gamma_n|_{F_q} \equiv 1$. Тогда в обозначениях теоремы 1.1

$$S(\gamma_n) \cap H_q \subsetneqq S(\mathbf{1}) ,$$

поскольку в левой части стоит центр группы H_q, а в правой — группа H_q целиком.

3.2. Теория орбит группы Гейзенберга над счетным полем.

Определение 3.1 ([2]). *Зафиксируем произвольный нетривиальный аддитивный характер $\rho \in \widehat{F}$ поля F. Зададим при помощи характера ρ аддитивное действие F на $\widehat{F}$ (строго говоря, его следовало бы обозначить "$+_\rho$"), а именно, для $\beta \in \widehat{F}$, $x \in F$ характер $\beta + x$ зададим по формуле*

$$(\beta + x)(t) = \beta(t) + \rho(xt) \qquad \text{при всех } t \in F . \tag{26}$$

Для любого $x \in F$ характеры β и $\beta + x$ будем называть ρ-эквивалентными.

Для группы Гейзенберга над счетным полем F (если характеристика поля не равна 2) коприсоединенное представление и сопутствующие объекты определяются так же, как и в §1. Коприсоединенное представление задается формулой (25). Пространство характеров счетного поля F несчетно и не может быть отождествлено с полем. Поэтому множество орбит параметризуется тремя параметрами (ρ, α, β), $\rho \in \widehat{F}$, $\alpha, \beta \in \widehat{F}/F$ (факторизация по аддитивному действию (26)).

Применим конструкцию факторпредставления по орбите, описанную в §2. Стабилизатор орбиты Ω_γ — это центр группы. Индуцируя, получаем два коммутирующих представления (17), (18) в $L^2(F \times F)$:

$$T_L(x_a)f(x,y) = \gamma(-ay)f(x-a,y), \quad T_R(x_a)f(x,y) = f(x+a,y), \tag{27}$$
$$T_L(y_a)f(x,y) = f(x,y-a), \qquad T_R(y_a)f(x,y) = \gamma(bx)f(x,y+b). \tag{28}$$

В заметке [2] мы описали факторпредставления групп Гейзенберга над счетным полем характеристики p. Это описание имеет следующий вид.

Пусть $\rho \in \widehat{F}$ — нетривиальный аддитивный характер поля F. Обозначим через B_ρ множество пар ρ-эквивалентных характеров поля F. Как множество $B_\rho = \widehat{F} \times F$. Введем на B_ρ меру, являющуюся произведением мер Хаара на $\widehat{F}$ и F^+.

Теорема 3.1 ([2]). 1) *Представление π_ρ, действующее в пространстве $L^2(B_\rho)$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} (\pi_\rho(x_a)f)(\alpha,\beta) &= f(\alpha+a,\beta), \\ (\pi_\rho(y_a)f)(\alpha,\beta) &= \alpha(a)f(\alpha,\beta), \\ (\pi_\rho(z_a)f)(\alpha,\beta) &= \rho(a)f(\alpha,\beta), \end{aligned} \tag{29}$$

является факторпредставлением типа II_1. След этого представления задается формулой

$$\mathrm{Tr}_\rho(g) = \delta_{x,0}\cdot\delta_{y,0}\cdot\rho(z), \quad \text{где} \ \ g = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) *π_ρ, $\rho \in \widehat{F}$, $\rho \neq 1$, — полный список неодномерных конечных факторпредставлений группы H.*

Лемма 3.2. *Представления T_L и T_R, определенные формулами (27)–(28), задают факторпредставление группы H, унитарно эквивалентное представлению π_γ.*

Доказательство. Переменная y принадлежит полю F, которое мы сейчас рассматриваем как счетную аддитивную группу. Двойственная группа $\widehat{F}$ несчетна и компактна. Выполним преобразование Фурье по y. Мы получим пространство $L^2(F\times\widehat{F})$ и представление

$$\begin{aligned} T_R(x_a)f(x,\beta) &= f(x+a,\beta)\,, \\ T_R(y_a)f(x,\beta) &= \beta(a)\gamma(ax)f(x,\beta)\,. \end{aligned}$$

Вводя переобозначение $f(x,\beta)\mapsto f(\beta+x,\beta)$, получаем формулы

$$\begin{aligned} T_R(x_a)f(\alpha,\beta) &= f(\alpha+a,\beta)\,, \\ T_R(y_a)f(\alpha,\beta) &= \alpha(a)f(\alpha,\beta)\,, \end{aligned}$$

где $\alpha = \beta + x$, которые эквивалентны формулам (29). $\square$

Таким образом, все факторпредставления группы Гейзенберга над счетным полем могут быть получены с помощью метода орбит.

3.3. Нильпотентные группы ступени 3.

Здесь мы ограничимся одним отрицательным результатом, который показывает, что конструкция факторпредставления по орбите из §2, вообще говоря, не работает для нильпотентных групп ступени 3.

Пример 3.2 Пусть G — нильпотентная группа вещественных верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали:

$$G = \{(x, y, z, u, v, s)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & u & s \\ 0 & 1 & y & v \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Пусть $\mathfrak{g}^*$ — пространство, дуальное к ее алгебре Ли. Отождествим $\mathfrak{g}^*$ с пространством нижнетреугольных матриц

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \beta & 0 & 0 \\ \phi & \epsilon & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

В $\mathfrak{g}^*$ действует коприсоединенное представление группы G по правилу

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{Ad}^*(x, y, z, u, v, s)\big)(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi) = \\ &= (\alpha - y\delta - v\phi + yz\phi, \beta + x\delta - z\epsilon - xz\phi, \gamma + y\epsilon + u\phi, \delta - z\phi, \epsilon + x\phi, \phi). \end{aligned}$$

Зафиксируем $\phi \neq 0$, $\beta \neq 0$ и рассмотрим орбиту коприсоединенного представления точки $\lambda = (0, \beta, 0, 0, 0, \phi)$. Эта орбита четырехмерна, ее стабилизатор S и одномерное представление стабилизатора, соответствующее точке λ, имеют вид

$$S = \{(y, s)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \chi_\lambda(y, s) = e^{i(\phi s + \beta y)}.$$

Представления T^L, T^R группы G, полученные индуцированием с χ_λ по формулам (17), (18), не коммутируют.

4. Крайние точки множества положительно определенных функций.

Пусть $M(G)$ обозначает множество положительно определенных функций φ на группе G, постоянных на классах сопряженных элементов и таких, что $\varphi(e) = 1$. Известно, что множество $M(G)$ — выпуклый компакт.

Описание множества $M(G)$ для случая, когда G — алгебраическая нильпотентная группа над дискретным полем характеристики 0, дано в работе С. В. Смирнова [4]. Оно имеет следующий вид.

Теорема ([4]). *Пусть H — алгебраический нормальный делитель группы G; C — центр факторгруппы G/H; p — естественная проекция G на G/H. Обозначим через π характер группы C, не обращающийся в 1 ни на какой однопараметрической подгруппе этой группы. Тогда функция, заданная формулой*

$$\varphi(g) = \begin{cases} \pi\bigl(p(g)\bigr), & \text{если } p(g) \in C\,, \\ 0, & \text{если } p(g) \notin C\,, \end{cases}$$

является крайней точкой множества $M(G)$. Обратно, всякая крайняя точка множества $M(G)$ может быть получена такой конструкцией.

Утверждение этой теоремы остается верным для произвольной дискретной нильпотентной группы ступени 2, если вместо слов “однопараметрическая подгруппа” читать просто “подгруппа” (и подходящим образом избавиться в доказательстве от использования алгебр Ли). Точное утверждение мы сформулируем ниже, но сначала приведем пару технических лемм, навеянных работой [4].

Лемма 4.1. *Пусть f — положительно определенная функция на дискретной группе G. Пусть H — максимальная нормальная подгруппа в G, для которой $f|_H \equiv 1$. Тогда f постоянна на классах смежности по H.*

Доказательство. Рассмотрим представление π группы G с циклическим вектором ξ, $\|\xi\|=1$, соответствующее функции f. Тогда $f(g) = (\pi(g)\xi,\xi)$ при всех $g \in G$. Поскольку при $h \in H$

$$1 = f(h) = (\pi(h)\xi,\xi)\,,$$

то $\pi(h)\xi = \xi$ при всех $h \in H$. Тогда при всех $g \in G$, $h \in H$

$$f(g) = (\pi(g)\xi,\xi) = (\pi(g)\pi(h)\xi,\xi) = f(gh)\,.$$

$\square$

Лемма 4.2. *Пусть G — произвольная топологическая группа, C — ее центр, f — положительно определенная функция на G, постоянная на классах сопряженных элементов, $f(e) = 1$. Пусть $g \in G$ — такой элемент, что при всех $c \in C$ элементы gc и g сопряжены. Тогда функция $f(c) - |f(g)|^2$ положительно определена на C.*

Доказательство. В определении положительно определенной функции рассмотрим набор элементов группы $c_1, c_2, \ldots, c_n \in C$, $g, g, \ldots, g$ (n раз) и комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(c_j^{-1}c_k)\alpha_k\overline{\alpha_j} + \sum_{j,k=1}^{n} f(c_j^{-1}g)\beta_k\overline{\alpha_j} + \\ + \sum_{j,k=1}^{n} f(g^{-1}c_k)\alpha_k\overline{\beta_j} + \sum_{j,k=1}^{n} f(e)\beta_k\overline{\beta_j} \geq 0\,.$$

Воспользуемся тем, что f постоянна на классах сопряженных элементов, а элементы $c_j^{-1}g$ и g, а также $g^{-1}c_k$ и g^{-1} сопряжены. Кроме того, $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$, $f(e) = 1$. Тогда мы можем переписать неравенство в виде

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(c_j^{-1}c_k)\alpha_k\overline{\alpha_j} + f(g)\sum_{j,k=1}^{n} \beta_k\overline{\alpha_j} + \overline{f(g)}\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k\overline{\beta_j} + \sum_{j,k=1}^{n} \beta_k\overline{\beta_j} \geq 0\,.$$

Пусть $\arg f(g) = \theta$. Заменяя все α_ℓ на $e^{-i\theta}\alpha_\ell$, а все β_ℓ на $e^{-2i\theta}\beta_\ell$, получаем неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(c_j^{-1}c_k)\alpha_k\overline{\alpha_j} + |f(g)|\sum_{j,k=1}^{n} \beta_k\overline{\alpha_j} + |f(g)|\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k\overline{\beta_j} + \sum_{j,k=1}^{n} \beta_k\overline{\beta_j} \geq 0\,.$$

Теперь положим $\beta_i = t\alpha_i$ при всех i, где t — вещественный параметр:

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(c_j^{-1}c_k)\alpha_k\overline{\alpha_j} + 2t|f(g)|\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k\overline{\alpha_j} + t^2\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k\overline{\alpha_j} \geq 0\,.$$

Перед нами неотрицательный квадратный трехчлен относительно t. Утверждение о том, что его дискриминант неположителен, есть в точности утверждение леммы. $\square$

Теорема 4.1. *Пусть G — дискретная нильпотентная группа ступени 2, H — нормальный делитель G; C — центр факторгруппы G/H; p — естественная проекция G на G/H. Обозначим через π характер группы C, не обращающийся в 1 ни на какой нетривиальной подгруппе этой группы. Тогда функция, заданная формулой*

$$\varphi(g) = \begin{cases} \pi\bigl(p(g)\bigr), & \text{если } p(g) \in C\,, \\ 0, & \text{если } p(g) \notin C\,, \end{cases}$$

является крайней точкой множества $M(G)$. Обратно, всякая крайняя точка множества $M(G)$ может быть получена такой конструкцией.

Доказательство. Пусть f — крайняя точка множества $M(G)$, H — максимальная нормальная подгруппа в G, для которой $f|_H \equiv 1$. Пусть C — центр группы $G_1 = G/H$. По лемме 4.1 мы можем рассматривать f как положительно определенную функцию на группе G_1, при этом f невырождена на C. По [7, лемма 14] сужение f на C является характером группы C. Докажем, что f сосредоточена на C. Допустим, что $f(a) \neq 0$, $a \in G_1 \setminus C$. Выберем произвольный элемент $b \in G_1$, для которого $c = a^{-1}b^{-1}ab \in C$, $c \neq 1$ (такой элемент b обязательно найдется, так как $a \notin C$). Рассмотрим в G_1 подгруппу G_2, порожденную a и b; пусть $C_2 \subset C$ — ее центр. Заметим, что элементы a и ac сопряжены в G_2, а поскольку C_2 порожден элементом c, то a и ac_1 сопряжены при любом $c_1 \in C$. По лемме 4.2 функция $f(c) - |f(a)|^2$ положительно определена на C_2, что невозможно, поскольку сужение f на C_2 — это некоторый нетривиальный характер группы C_2. Полученное противоречие доказывает, что f сосредоточена на C, откуда и следует утверждение теоремы. □

Теперь мы можем дать другое описание множества $M(G)$ для групп с 2-делимым центром — на языке орбит.

Теорема 4.2. *Пусть G — произвольная счетная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром. Каждая функция $\varphi(g) = \mathrm{Tr}_{\pi_\Omega}(g)$ (см. (21)) является крайней точкой множества $M(G)$. Каждая крайняя точка множества $M(G)$ имеет такой вид.*

Доказательство. Проверим, что каждая функция $\varphi(g) = \mathrm{Tr}_{\pi_\Omega}(g)$, где Ω — некоторая орбита коприсоединенного представления группы G, является крайней точкой множества $M(G)$. Положим

$$N_\Omega = S_\Omega \cap \ker\varphi = \bigl\{g : \varphi(g) = 1,\ \varphi([g, G]) = 1\bigr\}\,.$$

Подгруппа N_Ω является нормальной в G. Действительно, $xgx^{-1} = g + [x,g]$, поэтому для $g \in N_\Omega$ мы имеем равенства $\varphi(xgx^{-1}) = 1$, $\varphi([xgx^{-1}, G]) = 1$, т. е. $xgx^{-1} \in N_\Omega$.

Возьмем в качестве подгруппы H из теоремы 4.1 подгруппу N_Ω. Мы уже отмечали, что отображение π_Ω является не только аддитивным характером кольца Ли, но и характером группы S_Ω. Тогда ясно, что π_Ω — невырожденный характер группы S_Ω/N_Ω. Нам остается проверить, что S_Ω/N_Ω — центр группы G/N_Ω, т. е. что $xgx^{-1} \in g + N_\Omega$ тогда и только тогда, когда $g \in S_\Omega$. Это так, поскольку $xgx^{-1} - g = [x,g]$. При $g \in S_\Omega$ имеем $[g,x] \in N_\Omega$, а при $g \notin S_\Omega$ найдется $x \in G$, такой, что $\pi_\Omega([g,x]) \neq 1$, поэтому $[g,x] \notin N_\Omega$.

Отметим, что в проведенном рассуждении мы пользовались не столько орбитами, сколько их стабилизаторами.

Теперь проверим, что каждая крайняя точка конструкции теоремы 4.1 может быть описана на языке орбит. Положим $S = CH$ (объединение смежных классов); тогда S — нормальная подгруппа группы G. Характер π имеет естественное продолжение на множество S (кстати, оно согласовано с аддитивной структурой S как идеала кольца Ли). Продолжим π произвольным образом на кольцо Ли $\mathfrak{g}$. Нам остается проверить, что S — стабилизатор полученного аддитивного характера π.

Пусть для подгрупп C и G/H выбраны какие-то системы представителей в G. Тогда произвольный элемент $g \in S$ можно записать в виде $g = c + h$, $c \in C$, $h \in H$. Если $c \in C$, то, поскольку C — центр группы G/H, мы при всех $x \in G$ имеем $h_x = [c,x] \in H$. Тогда

$$\pi\big([c+h,x]\big) = \pi\big(h_x + [h,x]\big) = 1\,.$$

Таким образом, $S \subset \mathrm{Stab}_\pi$. Далее, если $g \notin S$, то $g = c + n + h$, $c \in C$, $n \in G/H \setminus C$, $h \in H$. Существует $x \in G/H$, для которого $[n,x] \in C \setminus \{e\}$. Для такого x

$$\pi\big([c+n+h,x]\big) = \pi\big(h_x + [n,x] + [h,x]\big) = \pi\big([n,x]\big) \neq 1\,,$$

т. е. $g \notin \mathrm{Stab}_\pi$. □

Мы получили, таким образом, что все следы счетной нильпотентной группы ступени 2 с 2-делимым центром могут быть описаны в рамках теории орбит. В заключение мы обобщим одно из утверждений теоремы 1.1 на случай счетных групп.

Теорема 4.3. *Пусть G — конечная или счетная нильпотентная группа ступени 2 с 2-делимым центром, G_0 — ее подгруппа, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ — соответствующие кольца Ли, P — естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{g}_0^*$.*

Если T — факторпредставление группы G, соответствующее орбите $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, то представление $T_0 = T|_{G_0}$ подгруппы G_0 разлагается в прямой интеграл факторпредставлений, соответствующих тем орбитам в $\mathfrak{g}_0^*$, которые содержатся в $P(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega}$ — замыкание орбиты Ω.

Доказательство. Благодаря теореме 4.2 достаточно предъявить разложение функции Tr_{π_Ω} в выпуклую комбинацию функций вида $\mathrm{Tr}_{\pi_{\Omega_0}}$.

Пусть $\chi \in \Omega$. Замыкание орбиты Ω имеет вид $\{\chi + \alpha; \alpha \in \mathfrak{g}^*, \alpha|_{S_\Omega} = 1\}$. Мы можем условно записать, что $\overline{\Omega} = \chi + (G/S_\Omega)^\wedge$, подразумевая, что во втором слагаемом характеры факторгруппы продолжены на всю группу тривиальным образом (и используя аддитивную запись для произведения характеров).

Пусть S_0 — стабилизатор какой-либо орбиты Ω_0 группы G_0, содержащейся в $\overline{\Omega}$. Тогда $S_\Omega \cap G_0 \subset S_0$ и $\overline{\Omega}_0 = \chi|_{G_0} + (G_0/S_0)^\wedge$. Таким образом, группа S_0 задает целое семейство орбит группы G_0, лежащих в $\overline{\Omega}$, нумерующихся элементами группы $(S_0/S \cap G_0)^\wedge$.

Обозначим через φ характер представления T, для $\alpha \in (S_0/S \cap G_0)^\wedge$ обозначим через φ_α характер представления группы G_0, определяемого функционалом $\chi|_{G_0} + \alpha$. Докажем, что

$$\varphi|_{G_0} = \int\limits_{(S_0/S \cap G_0)^\wedge} \varphi_\alpha \, d\alpha \tag{30}$$

(интегрирование по мере Хаара). Действительно, при $g \in S \cap G_0$ при всех α имеем $\alpha(g) = 1$ и, следовательно, $\varphi(g) = \chi(g)$. При $g \notin S \cap G_0$, $g \in S_0$ функционал φ_α пробегает всю группу характеров $(S_0/S \cap G_0)^\wedge$, и, так как среднее значение характеров в нетривиальной точке равно 0, мы заключаем, что $\varphi(g) = 0$. Наконец, при $g \notin S_0$ имеем $\varphi_\alpha = 0$ при всех α. Таким образом, мы проверили, что функция φ, заданная формулой (30), есть в точности сужение характера представления, задаваемого функционалом χ, на группу G_0. □

Литература

1. А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли.* — УМН **XVII**, вып. 6 (1962), 57–110.
2. К. П. Кохась, *Классификация конечных факторпредставлений* $(2m+1)$*-мерной группы Гейзенберга над счетным полем конечной характеристики.* — Функц. анал. и его прил. **36**, No. 3, 79–83.
3. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца.* Наука, М., 1968.
4. С. В. Смирнов, *Положительно определенные функции на алгебраических нильпотентных группах над дискретным полем.* — ДАН СССР **170**, №3 (1966), 524–525.
5. R. Howe, *On representations of discrete, finitely generated, torsion-free, nilpotent groups.* — Pacific J. Math. **73**, No. 2 (1977), 281–305.
6. A. Mihailovs, *The orbit method for finite groups of nilpontency class two of odd order,* arxiv.org: math.RT/0001092.
7. E. Thoma, *Über unitäre Darstellung abzählbarer, diskreter Gruppen.* — Math. Ann. **153** (1964), 111–138.

K. P. Kokhas. Finite factor representations of 2-step nilpotent groups, and orbit theory.

In this paper we describe factor representations of discrete 2-step nilpotent groups with 2-divisible center. We show that some standard theorems of the orbit theory are valid in the case of these groups. For countable 2-step nilpotent groups, we explain how to construct a factor representation starting from the orbit of the “coadjoint representation.” We also prove that every factor representation (more precisely, every trace) can be obtained by this construction, and prove a theorem on the decomposition of the factor representation restricted to a subgroup.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: kostik@KK1437.spb.edu

Поступило 18 марта 2004 г.