Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 307, 2004 г.

Л. Б. Бейненсон

МОНОТОННО НЕВОЗРАСТАЮЩИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ. II. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА МНОГОГРАННЫХ КОНУСАХ

1. Введение

В первой части работы был изложен метод построения невозрастающего случайного поля η_ρ на частично упорядоченном множестве H по произвольной мере ρ на $H \times \mathrm{R}$.

В этой, второй части статьи рассматривается задача вычисления плотностей конечномерных распределений, сосредоточенных на многогранных конусах в R^d. Теоремы 2.1 и 4.2, решающие эту задачу, и позволяют, в частности, находить плотности конечномерных распределений случайного поля η_ρ.

Пусть $(\Lambda, \leq)$ – некоторое конечное частично упорядоченное множество, $\Lambda = \{a_1, \dots, a_d\}$, R^Λ – евклидово пространство всех действительных функций на Λ, $\mathcal{M}_\Lambda$ – множество всех монотонно невозрастающих функций на Λ,

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^\Lambda : \ \forall a, b \in \Lambda \text{ если } a < b, \text{ то } \mathrm{y}(a) \geq \mathrm{y}(b)\}.$$

Пусть μ – некоторая σ-аддитивная вероятностная мера на евклидовом пространстве R^Λ, сосредоточенная на множестве $\mathcal{M}_\Lambda$.

Определим на R^Λ функцию g_μ, полагая для любого y из R^Λ

$$g_\mu(\mathrm{y}) = \mu\Big\{\mathrm{y}' \in \mathrm{R}^\Lambda : \ \mathrm{y}' \geq \mathrm{y}\Big\}. \tag{1}$$

Функцию g_μ будем называть инвертированной функцией распределения меры μ; подобно обычной функции распределения, она однозначно определяет меру μ. Функция g_μ является монотонно невозрастающей и непрерывной снизу на R^Λ.

Определим в евклидовом пространстве R^Λ ортонормированный базис $\mathrm{e}^1, \dots, \mathrm{e}^d$, полагая $\mathrm{e}^i(a_j) = \delta_{ij}$ (где δ_{ij} – символ Кронекера) для любого a_i из Λ.

Зададимся вопросом о строении меры μ в случае, когда функция g_μ непрерывна на множестве $\mathcal{M}_\Lambda$, а на его внутренности $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathrm{int}}$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \ldots \partial\,\mathrm{e}^d}$, которая непрерывно продолжается на $\mathcal{M}_\Lambda$.

Множество $\mathcal{M}_\Lambda$ является множеством решений системы однородных линейных неравенств, то есть многогранным конусом (см. [3]). Внутренние части различных граней многогранного конуса не пересекаются, и любой многогранный конус может быть представлен в виде объединения внутренних частей его граней (см. [3] и [5]).

Таким образом, выполняется равенство

$$\mathcal{M}_\Lambda = \bigcup_{\Gamma} \Gamma^{\mathrm{int}}, \tag{2}$$

где объединение в правой части производится по всем граням конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

А поскольку мера μ сосредоточена на конусе $\mathcal{M}_\Lambda$ и внутренние части различных граней многогранного конуса не пересекаются, то имеет место равенство

$$\mu = \sum_{\Gamma} \mu\Big|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}, \tag{3}$$

где сумма в правой части производится по всем граням конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, а $\mu\Big|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}$ есть ограничение меры μ на множество Γ^{int}, являющееся внутренней частью грани Γ.

Таким образом, исследование строения меры μ сводится к исследованию строения каждой из мер $\mu\Big|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}$.

Если на множестве $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathrm{int}}$ внутренних точек конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ существует производная $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \ldots \partial\,\mathrm{e}^d}$, то из формулы (1) получаем, что ограничение $\mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\mathrm{int}}}$ меры μ на множество $\mathcal{M}_\Lambda^{\mathrm{int}}$ будет абсолютно непрерывным относительно меры Лебега λ^Λ на евклидовом пространстве R^Λ и плотность этого ограничения можно вычислить как

$$\frac{d\mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\mathrm{int}}}}{d\lambda^\Lambda}(\mathrm{y}) = (-1)^d \cdot \frac{\partial^d g_\mu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \ldots \partial\,\mathrm{e}^d}(\mathrm{y}). \tag{4}$$

При этом, очевидно, абсолютно непрерывная составляющая меры μ относительно меры Лебега λ^Λ совпадает с мерой $\mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\text{int}}}$.

Поскольку конус $\mathcal{M}_\Lambda$ является своей гранью и внутренняя часть данной грани совпадает с ее топологической внутренностью $\mathcal{M}_\Lambda^{\text{int}}$, то из равенства (3) получаем, что сингулярная составляющая μ_{sing} меры μ относительно меры Лебега λ^Λ на евклидовом пространстве R^Λ равна сумме мер $\mu\Big|_{\Gamma^{\text{int}}}$ по всем граням Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, не совпадающим с самим конусом $\mathcal{M}_\Lambda$:

$$\mu_{\text{sing}} = \sum_{\Gamma \neq \mathcal{M}_\Lambda} \mu\Big|_{\Gamma^{\text{int}}}.$$

В данной работе из всех граней произвольного многогранного конуса C выделяются некоторые, называемые "гранями, правильно рассекающими блоки" (см. §2).

В теореме 2.1 доказывается, что для произвольной грани Γ конуса C, правильно рассекающей блоки, и для произвольной меры μ, сосредоточенной на конусе C, ограничение $\mu\Big|_{\Gamma^{\text{int}}}$ меры μ на множество Γ^{int} является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега λ_Γ на грани Γ, а плотность меры $\mu\Big|_{\Gamma^{\text{int}}}$ вычисляется через производные функции g_μ, если инвертированная функция распределения g_μ и ее производная $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\, \mathrm{e}^1 \ldots \partial\, \mathrm{e}^d}$ непрерывны во внутренних точках конуса C.

Отсюда, в частности, вытекает, что в предположениях теоремы 2.1 ограничение $\mu\Big|_{\Gamma^{\text{int}}}$ меры μ на множество Γ^{int} полностью определяется значениями производных коррелятора g_μ на конусе C.

Следует заметить, что для выполнения условий теоремы 2.1 не достаточно только абсолютной непрерывности меры μ на внутренности C^{int} конуса C относительно меры Лебега λ^d на R^d. Действительно, из абсолютной непрерывности меры μ на C^{int} вытекает, что λ^d-почти всюду на C^{int} существует производная $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\, \mathrm{e}^1 \ldots \partial\, \mathrm{e}^d}$, значения которой λ^d-почти всюду совпадают со значениями плотности меры μ. И даже если плотность меры μ на C^{int} непрерывна, этого может быть не достаточно для выполнения условия теоремы 2.1, поскольку данная теорема требует существования и непрерывности производной $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\, \mathrm{e}^1 \ldots \partial\, \mathrm{e}^d}$ не в почти всех, а во всех точках открытого множества C^{int}. Это продемонстрировано в примере 2.2 параграфа 2.

В §3 доказана теорема 3.1, которую можно использовать в качестве критерия, позволяющего находить правильно рассекающие грани конуса.

Наконец, в §4 доказаны теорема 4.1, которая утверждает, что для произвольного частично упорядоченного множества Λ все грани конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ правильно рассекают блоки, и теорема 4.2, которая позволяет находить плотности следов меры на гранях конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ через производные инвертированной функции распределения меры.

2. Вычисление распределений вероятности на гранях конуса

Будем обозначать через $\mathrm{e}^1, \dots, \mathrm{e}^d$ канонический ортонормированный базис в пространстве R^d.

Обозначим через $\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}$ производную по направлению v и положим для любого подмножества W множества $\{1, \dots, d\}$

$$\frac{\partial^{|W|}}{\partial\, \mathrm{e}^W} \stackrel{df}{=} \prod_{i \in W} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{e}^i}.$$

Определим для любого вектора v из R^d одностороннюю производную $\frac{\partial}{\partial^+ \mathrm{v}}$, полагая

$$\frac{\partial f}{\partial^+ \mathrm{v}}(\mathrm{x}) \stackrel{df}{=} \lim_{h \to +0} \frac{f(\mathrm{x} + h \cdot \mathrm{v}) - f(\mathrm{x})}{h}.$$

Аналогично, для любого подмножества W множества $\{1, \dots, d\}$ обозначим

$$\frac{\partial^{|W|}}{\partial^+ \mathrm{e}^W} \stackrel{df}{=} \prod_{i \in W} \frac{\partial}{\partial^+ \mathrm{e}^i}.$$

Будем говорить, что функция f непрерывна на множестве M вплоть до его границ, если существует функция f_1, которая является непрерывной на замыкании множества M, а на самом множестве M совпадает с функцией f.

Для любого подмножества M пространства R^d обозначим через $V(M)$ минимальное подпространство, содержащее M.

Пусть M – выпуклое множество, x – элемент из M и v – вектор из R^d; будем говорить, что вектор v из точки x направлен вовнутрь M, если существует такое положительное h, что точка $\mathrm{x}+h\cdot\mathrm{v}$ принадлежит M.

Многогранным конусом называется множество решений некоторой системы линейных однородных неравенств. Далее, если не оговорено обратное, под конусом всегда будем понимать многогранный конус.

Полупространство P называется опорным для многогранного конуса C, если C содержится в P; граница опорного полупространства называется опорной гиперплоскостью конуса C.

Гранью конуса C называется пересечение конуса с некоторой его опорной гиперплоскостью. Для удобства будем считать, что пустое множество и сам конус C всегда являются гранями конуса C.

В случае, если Γ_1 и Γ_2 – некоторые грани и Γ_1 содержится в Γ_2, то Γ_1 называется подгранью грани Γ_2, а Γ_2 называется надгранью грани Γ_1.

Точка x грани Γ называется внутренней, если она не принадлежит никакой ее подграни. Множество всех внутренних точек грани Γ обозначается через Γ^{int}.

Для любого многогранного конуса C и любой его грани Γ определим множество $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ всех тех индексов i из $\{1,\ldots,d\}$, что вектор e^i направлен вовнутрь конуса C из всех точек Γ^{int}. В случае, когда не вызывает недоразумений, гранью какого конуса является Γ, будем использовать обозначение $\mathrm{In}\,\Gamma$ вместо $\mathrm{In}_C(\Gamma)$.

Будем называть открытым справа блоком d-мерный открытый справа параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат в R^d. Для произвольных элементов $\mathrm{x}=(x_1,\ldots,x_d)$ и $\mathrm{y}=(y_1,\ldots,y_d)$ из R^d, таких, что $\mathrm{x}<\mathrm{y}$, обозначим через

$$\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})=\Big\{(x'_1,\ldots,x'_d)\in\mathrm{R}^d: x_j\le x'_j<y_j,\ j=1,\ldots,d\Big\}$$

открытый справа блок с наименьшей точкой x и наибольшей точкой y. Точки x и y будем называть экстремальными точками для блока $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$.

Для любого подмножества I множества $\{1,\ldots,d\}$ определим множество $\mathrm{B}_I(\mathrm{x};\mathrm{y})$, полагая

$$\mathrm{B}_I(\mathrm{x};\mathrm{y})=\Big\{(x'_1,\ldots,x'_d)\in\mathrm{R}^d:\ x_i\le x'_i<y_i,\ i\in I,\quad x'_j\ge x_j,\ j\notin I\Big\};$$

это d-мерный неограниченный и открытый справа блок с $d-|I|$ рецессивными направлениями, параллельными осям координат (под рецессивными направлениями параллелепипеда мы понимаем линейно независимые направления, по которым он неограничен).

Очевидно, что множество $\mathrm{B}_{\{1,\dots,d\}}(\mathrm{x};\mathrm{y})$ является ограниченным и совпадает с $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что грань* Γ *многогранного конуса* C *правильно рассекает блоки, если существует хотя бы один открытый справа блок* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$*, такой, что его экстремальные вершины принадлежат* Γ^{int}*, и для любого такого блока множество* $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x};\mathrm{y}) \cap C$ *содержится в блоке* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$*.*

По определению, сам конус C *всегда является своей правильно рассекающей гранью.*

Замечание 1. Для любой точки x из Γ^{int} множество всех тех векторов v из R^d, для которых у открытого справа блока $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})$ экстремальные вершины принадлежат Γ^{int}, является выпуклым конусом и совпадает с множеством всех строго положительных векторов v из подпространства $V(\Gamma)$ (см. теорему 3.1).

Замечание 2. Для того чтобы грань Γ правильно рассекала блоки, достаточно, чтобы существовал хотя бы один открытый справа блок $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$ с экстремальными вершинами из Γ^{int}, для которого множество $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x};\mathrm{y}) \cap C$ содержится в блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$ (см. теорему 3.1).

Как следует из принципа включения и исключения (см. замечание к лемме 2.1), для любой меры ν на R^d, любого x из R^d и любого строго положительного вектора v из R^d мера открытого справа блока $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$ вычисляется через значения инвертированной функции распределения меры g_ν по формуле

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset\{1,\dots,d\}} (-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Но в случае, когда мера сосредоточена на конусе, Γ – правильно рассекающая блоки грань этого конуса, а экстремальные вершины блока $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$ принадлежат Γ^{int}, часть слагаемых в этой формуле взаимно уничтожится, что позволяет находить меру на правильно рассекающей грани конуса по значениям производной инвертированной функции распределения внутри конуса (см. лемму 2.2 из §2.1).

Для любых подпространств V_1 и V_2 евклидова пространства R^d будем обозначать через $\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}$ отображение, получающееся ограничением области определения проекции pr_{V_2} до подпространства V_1.

В случае, когда подпространства V_1 и V_2 имеют одинаковую размерность, определим $q(V_1, V_2)$ как модуль определителя Якоби отображения $\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}$. Это определение является корректным, поскольку отображение $\mathrm{pr}_{V_1}\Big|_{V_2}$ сопоставляет друг другу два евклидовых пространства одинаковой размерности, а определитель Якоби линейного отображения равен константе.

В случае трехмерного пространства число $q(V_1, V_2)$ равно косинусу угла между плоскостями V_1 и V_2. Геометрический смысл коэффициента $q(V_1, V_2)$ в пространствах более высокой размерности дает лемма 2.7.

Определим для любого конуса C и любой его грани Γ, такой, что $|\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim \Gamma$, вещественное число $\mathrm{q}_C(\Gamma)$, полагая $\mathrm{q}_C(\Gamma) = q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big)$, где

$$L_\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathrm{R}^d : \ x_j = 0, \ \forall j \notin \mathrm{In}_C(\Gamma)\};$$

это определение также корректно, поскольку в случае, когда $|\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim \Gamma$, подпространства L_Γ и $V(\Gamma)$ имеют одинаковую размерность.

Теперь мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2.1. *Пусть C – многогранный конус в R^d, ν – вероятностная мера на C, $g_\nu(\mathrm{x})$ – ее инвертированная функция распределения, а U – открытое подмножество множества R^d, такое, что на множестве $U \cap C$ функция g_ν непрерывна, а во всех внутренних точках множества $U \cap C$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial\, \mathrm{e}^1 \ldots \partial\, \mathrm{e}^d}(\mathrm{y})$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ этого множества.*

Тогда для любой правильно рассекающей блоки грани Γ конуса C ограничение $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}$ меры ν на множество $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на линейном подпространстве $V(\Gamma)$, причем имеют место следующие соотношения:

1) *если* $|\operatorname{In}_C(\Gamma)| > \dim\Gamma$, *то* $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{\rm int}} = 0$;

2) *если* $|\operatorname{In}_C(\Gamma)| = \dim\Gamma$ *и все надграни* Γ *правильно рассекают блоки, то на множестве* $U\cap\Gamma^{\rm int}$ *существует производная* $\frac{\partial^{|\operatorname{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial^+ \mathrm{e}^{\operatorname{In}_C(\Gamma)}}$, *непрерывная на* $U\cap\Gamma^{\rm int}$, *и для любого* y *из* $U\cap\Gamma^{\rm int}$ *имеет место соотношение*

$$\frac{d\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{\rm int}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathrm{y}) = (-1)^{|\operatorname{In}_C(\Gamma)|}\,\mathrm{q}_C(\Gamma)\frac{\partial^{|\operatorname{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial^+ \mathrm{e}^{\operatorname{In}_C(\Gamma)}}(\mathrm{y}). \qquad (5)$$

Следует заметить, что по теореме 3.1, доказанной ниже в §3, для любой правильно рассекающей блоки грани Γ конуса C имеет место неравенство $|\operatorname{In}_C(\Gamma)| \geq \dim\Gamma$, поэтому в теореме 2.1 случай $|\operatorname{In}_C(\Gamma)| < \dim\Gamma$ не рассматривается.

Теорема 2.1 устанавливает связи между следами распределения вероятностей на гранях конуса и инвертированной функцией распределения меры. Продемонстрируем эти связи в простых случаях, не требующих применения теоремы 2.1.

Пример 2.1. Пусть $\Lambda = \{a_1, a_2\}$ и $a_1 < a_2$.

Отождествим евклидово пространство R^Λ всех действительных функций на Λ с пространством R^2, поставив в соответствие любой функции y из R^Λ вектор $\Big(\mathrm{y}(a_1), \mathrm{y}(a_2)\Big)$ из R^2.

Тогда множества $\mathcal{M}_\Lambda$ и $\mathcal{M}_\Lambda^{\rm int}$ выглядят следующим образом:

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{(y_1, y_2) \in \mathrm{R}^2 : y_1 \geq y_2\}, \quad \mathcal{M}_\Lambda^{\rm int} = \{(y_1, y_2) \in \mathrm{R}^2 : y_1 > y_2\}.$$

Определим прямую Γ, полагая $\Gamma = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^2 : y_1 = y_2\}$.

Очевидно, что конус $\mathcal{M}_\Lambda$ является полупространством, ограниченным прямой Γ, и эта прямая является его гранью. Так как Γ – единственная нетривиальная грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, то множество внутренних точек $\Gamma^{\rm int}$ грани Γ совпадает с самой гранью.

Тогда разбиение конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, выписанное в формуле (2), в данном случае имеет вид $\mathcal{M}_\Lambda = \mathcal{M}_\Lambda^{\rm int} \cup \Gamma$.

Положим $\mathrm{e}^1 = (1, 0)$, $\mathrm{e}^2 = (0, 1)$.

Пусть μ – произвольная мера на R^2, сосредоточенная на множестве $\mathcal{M}_\Lambda$, g_μ – ее инвертированная функция распределения; и пусть функция g_μ непрерывна на всем пространстве R^2 и на множестве $\mathcal{M}_\Lambda^{\rm int}$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^d g_\mu}{\partial\,\mathrm{e}^1\,\partial\,\mathrm{e}^2}$, которая непрерывно продолжается на $\mathcal{M}_\Lambda$.

Предложение 2.1. *Мера* $\mu\Big|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}$ *является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега* λ_Γ *на прямой* Γ*; при этом плотность ее вычисляется по формуле*

$$\frac{d\mu\Big|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}}{d\lambda_\Gamma}(\mathrm{y}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial g_\mu}{\partial^+ \mathrm{e}^1}(\mathrm{y}), \tag{6}$$

где $\frac{\partial}{\partial^+ \mathrm{e}^1}$ *есть односторонняя производная по направлению* e^1.

Доказательство. Определим для любых $\mathrm{x} < \mathrm{y}$ из R^2 открытый справа прямоугольник $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, полагая

$$\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^2 : \ \mathrm{x} \le \mathrm{x}' < \mathrm{y}\}.$$

Тогда, используя принцип включения и исключения, из соотношения (1) получаем равенство

$$\mu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big) = g_\mu(x_1,x_2) - g_\mu(y_1,x_2) - g_\mu(x_1,y_2) + g_\mu(y_1,y_2). \tag{7}$$

Пусть точки x и y строго положительны и лежат на прямой Γ.

Тогда имеет место соотношение $x_1 = x_2 < y_1 = y_2$, откуда получаем равенство

$$g_\mu(y_1,y_2) - g_\mu(x_1,y_2) = g_\mu(y_1,y_1) - g_\mu(x_1,y_1).$$

Поскольку $x_1 < y_1$, то (y_1,y_1) есть наименьшая точка из множества $\mathcal{M}_\Lambda$, бо́льшая точки (x_1,y_1). А так как мера μ сосредоточена на множестве $\mathcal{M}_\Lambda$, то по формуле (1) имеем $g_\mu(x_1,y_1) = g_\mu(y_1,y_1)$. Отсюда получаем, что $g_\mu(y_1,y_2) - g_\mu(x_1,y_2) = 0$, а значит, выполняется следующее равенство:

$$\mu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big) = g_\mu(x_1,x_2) - g_\mu(y_1,x_2) = g_\mu(x_1,x_1) - g_\mu(y_1,x_1). \tag{8}$$

Тогда, устремляя точку y к точке x по прямой Γ сверху, вычисляем следующий предел:

$$\lim_{\substack{\mathrm{y}\to\mathrm{x}+0\\ \mathrm{y}\in\Gamma}} \frac{\mu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big)}{y_1 - x_1} = \lim_{\substack{\mathrm{y}\to\mathrm{x}+0\\ \mathrm{y}\in\Gamma}} \frac{g_\mu(x_1,x_1) - g_\mu(y_1,x_1)}{y_1 - x_1} = -\frac{\partial g_\mu}{\partial^+ \mathrm{e}^1}(\mathrm{x}), \tag{9}$$

где $\frac{\partial g_\mu}{\partial^+ \mathrm{e}^1}$ – односторонняя производная функции g_μ по направлению e^1. (Существование этой производной доказано в лемме 2.3.)

Из соотношения $\mathcal{M}_\Lambda = \mathcal{M}_\Lambda^{\rm int} \cup \Gamma$ непосредственно вытекает равенство

$$\mu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big) = \mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\rm int}}\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big) + \mu\Big|_\Gamma\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big).$$

Но по формуле (4) мера $\mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\rm int}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ^2 на плоскости R^2, откуда получаем, что выполняется следующее равенство:

$$\lim_{\substack{\mathrm{y}\to\mathrm{x}+0\\ \mathrm{y}\in\Gamma}} \frac{\mu\Big|_{\mathcal{M}_\Lambda^{\rm int}}\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big)}{y_1 - x_1} = 0.$$

А значит, предел в левой части соотношения (9) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{\mathrm{y}\to\mathrm{x}+0\\ \mathrm{y}\in\Gamma}} \frac{\mu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big)}{y_1 - x_1} = \lim_{\substack{\mathrm{y}\to\mathrm{x}+0\\ \mathrm{y}\in\Gamma}} \frac{\mu\Big|_\Gamma\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big)}{y_1 - x_1}.$$

Тогда из формулы (9) получаем, что ограничение $\mu\Big|_\Gamma$ меры μ на грань $\Gamma_1^{\rm int}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ_Γ на прямой Γ, причем для ее плотности в любой точке x из Γ выполняется соотношение (6). Предложение доказано.

Замечание. Можно провести аналогию между доказательством предложения 2.1 в данном примере и доказательством теоремы 2.1, сформулированной ниже и являющейся основной теоремой данной статьи.

А именно:

- равенство (7) в примере соответствует лемме 2.1;
- доказательство равенства (8) в примере соответствует лемме 2.2;
- и, наконец, доказательство равенства (9) в примере соответствует лемме 2.6.

Пример 2.2. Покажем, что абсолютной непрерывности меры на внутренности конуса не достаточно для выполнения условий теоремы 2.1.

Пусть $C = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^3 : \ x_1 + x_2 \geq 2x_3\}$ – полупространство в R^3. Единственной нетривиальной гранью конуса C является плоскость $\Gamma = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 2x_3\}$. Пусть мера μ сосредоточена на прямой $V = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^3 : \ x_1 = x_2 = x_3\}$, лежащей в плоскости Γ.

Очевидно, мера μ сосредоточена на конусе C и абсолютно непрерывна на множестве C^{int}; при этом ее плотность во всех точках множества C^{int} равна нулю.

Для любого x из R положим $g_0(x) = \mu\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^3 : \ x_i' \geq x, \ i = 1, 2, 3\}$. Поскольку мера μ сосредоточена на прямой V, то она однозначно определяется функцией $g_0(x)$.

Тогда инвертированная функция распределения g_μ меры μ может быть вычислена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
g_\mu(\mathrm{x}) &= \mu\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^3 : \ x_i' \geq x_i, \ i = 1, 2, 3\} = \\
&= \mu\{\mathrm{x}' \in V : \ x_i' \geq x_i, \ i = 1, 2, 3\} = g_0\Big(\max\{x_1, x_2, x_3\}\Big).
\end{aligned}
$$

Таким образом, если функция g_0 является дифференцируемой (то есть мера μ абсолютно непрерывна на прямой V относительно меры Лебега λ_V на V), то инвертированная функция распределения g_μ меры μ не будет дифференцируема в точках множества $\{\mathrm{x} \in C^{\mathrm{int}} : \ x_1 = x_2\}$, то есть условие теоремы 2.1 для меры μ не выполняется.

Пример 2.3. Рассмотрим случай, когда значения меры на подмножествах грани конуса не могут быть определены через значения инвертированной функции распределения на конусе.

Пусть $P = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2 : \ x_1 + x_2 \geq 0\}$ – полуплоскость в R^2, Γ – граница полуплоскости P и $P^{\mathrm{int}} = P \backslash \Gamma$ – внутренность полуплоскости P.

Следует заметить, что из доказанного в примере 3.1 предложения 3.1.1 вытекает, что грань Γ конуса P не является правильно рассекающей блоки.

Пусть μ – произвольная мера, сосредоточенная на P, и g_μ – ее инвертированная функция распределения.

Для многогранного конуса P соотношение (3) принимает вид

$$
\mu = \mu\Big|_{P^{\mathrm{int}}} + \mu\Big|_{\Gamma},
$$

где $\mu\Big|_{P^{\mathrm{int}}}$ – ограничение меры μ на P^{int} и $\mu\Big|_{\Gamma}$ – ограничение меры μ на Γ.

По определению, $g_\mu(\mathrm{x}) = \mu\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^2 : \ \mathrm{x}' \geq \mathrm{x}\}$. Так как для любой точки x из P^{int} множество $\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^2 : \ \mathrm{x}' \geq \mathrm{x}\}$ содержится в P^{int}, то на P^{int} имеет место равенство $g_\mu(\mathrm{x}) = g_{\mu|_{P^{\mathrm{int}}}}(\mathrm{x})$, где $g_{\mu|_{P^{\mathrm{int}}}}$ – инвертированная функция распределения меры $\mu\Big|_{P^{\mathrm{int}}}$.

Аналогично, так как для любой точки x из Γ множество $\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^2 : \ \mathrm{x}' \geq \mathrm{x}\}\backslash\{\mathrm{x}\}$ содержится в P^{int}, то для любого x из Γ имеет место равенство $g_\mu(\mathrm{x}) = \mu\{\mathrm{x}\} + g_{\mu|_{P^{\mathrm{int}}}}(\mathrm{x})$.

Отсюда вытекает, что если дискретная составляющая меры μ равна нулю, то на P имеет место равенство $g_\mu(\mathrm{x}) = g_{\mu|_{P^{\mathrm{int}}}}(\mathrm{x})$, а значит, ограничение $\mu\Big|_\Gamma$ меры μ не может быть определено по значениям функции g_μ и ее производных на множестве P.

Доказательство теоремы 2.1.

Для любых элементов $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $\mathrm{y} = (y_1, \dots, y_d)$ из R^d, таких, что $\mathrm{x} < \mathrm{y}$, обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{y}) = \Big\{(x_1', \dots, x_d') \in \mathrm{R}^d : x_j \leq x_j' \leq y_j,\ j = 1, \dots, d\Big\};$$

это d-мерный замкнутый блок в R^d.

Обозначим через $\mathrm{Vert}(\mathrm{x};\mathrm{y})$ множество вершин блока $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{y})$.

Также для любого элемента $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_d)$ из R^d и любых линейно независимых векторов $\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_l$ в R^d положим

$$\mathrm{Par}_l(\mathrm{x};\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_l) =$$
$$= \Big\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^d : \quad \mathrm{x}' = \mathrm{x} + \sum_{j=1}^{l} h_j \cdot \mathrm{v}_j,\ 0 \leq h_j \leq 1,\ j = 1, \dots, l\Big\};$$

это l-мерный параллелепипед общего вида, и $\mathrm{Vert}_l(\mathrm{x};\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_l)$ есть множество вершин параллелепипеда $\mathrm{Par}_l(\mathrm{x};\mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_l)$.

Для любых элементов $\mathrm{x}' = (x_1', \dots, x_d')$ и $\mathrm{x}'' = (x_1'', \dots, x_d'')$ из R^d обозначим через $\mathrm{s}(\mathrm{x}', \mathrm{x}'') = |\{i : \ x_i' \neq x_i''\}|$ количество различий между значениями соответствующих координат элементов x' и x''.

Нам также потребуются следующие понятия общей теории меры.

Будем говорить, что семейство $\mathcal{S}$ подмножеств пространства R^d сгущается в каждой точке множества P, если для любой точки x из P и любой ее окрестности $O(\mathrm{x})$ существует множество S из семейства $\mathcal{S}$, содержащееся в окрестности $O(\mathrm{x})$.

Определение 2.2. *Семейство $\mathcal{S}$ подмножеств пространства R^d называется покрытием Витали пространства R^d для меры λ^d, если оно сгущается в каждой точке R^d и выполняется следующее условие: для любого подмножества P пространства R^d и любого подсемейства $\mathcal{S}'$ семейства $\mathcal{S}$, сгущающегося в каждой точке множества P, существует счетное подсемейство $\mathcal{S}''$ семейства $\mathcal{S}'$, состоящее из попарно непересекающихся множеств и покрывающее P λ^d-почти полностью.*

Важность такого понятия, как покрытие Витали, связано в первую очередь со следующим утверждением, доказанным в [6]: для любой меры ν на R^d, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега λ^d, и для любого покрытия Витали $\mathcal{S}$ пространства R^d для меры λ^d плотность меры ν в точке x может быть вычислена по значениям меры ν на множествах из $\mathcal{S}$ с помощью следующей формулы:

$$\frac{d\nu}{d\lambda^d}(\mathrm{x}) = \lim_{S\to\mathrm{x}} \frac{\nu(S)}{\lambda^d(S)},$$

где предел в правой части берется по множествам из семейства $\mathcal{S}$.

Для любого ограниченного непустого подмножества M пространства R^d обозначим через $\mathcal{S}(M)$ семейство всех множеств, подобных M:

$$\mathcal{S}(M) = \Big\{\mathrm{x} + \alpha\cdot M :\ \mathrm{x}\in\mathrm{R}^d,\ \alpha>0\Big\}$$

(следует заметить, что под подобными множествами мы здесь понимаем множества, которые можно получить одно из другого с помощью сдвига и масштабного преобразования).

Политопом в R^d называется выпуклая оболочка конечного набора точек. Политоп называется телесным, если у него есть хотя бы одна внутренняя точка.

Для любого телесного политопа M семейство $\mathcal{S}(M)$ является покрытием Витали пространства R^d для меры λ^d (см. доказательство леммы 2.4).

Лемма 2.1. *Пусть ν – вероятностная мера на R^d, $g_\nu(\mathrm{x})$ – ее инвертированная функция распределения и I – некоторое подмножество множества $\{1,\dots,d\}$. Тогда для любой точки x из R^d и лю-*

бого строго положительного вектора v *выполняется равенство*

$$\nu\Big(\mathrm{B}_I(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset I}(-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big). \tag{10}$$

Замечание. В случае, когда $I = \{1,\dots,d\}$, имеет место равенство $\mathrm{B}_I(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v}) = \mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$, а значит, соотношение (10) имеет вид

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset\{1,\dots,d\}}(-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Доказательство. Определим для любого подмножества A множества $\{1,\dots,d\}$ конус $T(A)$, полагая

$$T(A) = \Big\{\mathrm{x}' \in \mathrm{R}^d:\ \mathrm{x}' \geq \mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big\}.$$

Очевидно, имеет место соотношение

$$\nu\Big(T(A)\Big) = g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Из определения множества $\mathrm{B}_I(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$ следует равенство

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}_I(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v}) = \\
&= \Big\{(x'_1,\dots,x'_d)\in \mathrm{R}^d:\ x_i \leq x'_i < x_i+v_i,\ i\in I,\quad x'_j \geq x_j,\ j\notin I\Big\} = \\
&= T(\emptyset)\setminus\bigcup_{i\in I} T(\{i\}).
\end{aligned}$$

Но для любых подмножеств A и B множества $\{1,\dots,d\}$ имеет место соотношение $T(A)\cap T(B) = T(A\cup B)$, а значит, для вычисления меры множества $T(\emptyset)\setminus\bigcup_{i\in I} T(\{i\})$ можно применить принцип включения и исключения, в результате чего получаем следующую цепочку равенств:

$$\nu\Big(\mathrm{B}_I(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset I}(-1)^{|A|}\nu\Big(T(A)\Big) = \sum_{A\subset I}(-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть C – конус в R^d, Γ – его грань, правильно рассекающая блоки, ν – вероятностная мера на C и $g_\nu(\mathrm{x})$ – ее инвертированная функция распределения.*

Тогда для любого элемента x *из* Γ^{int} *и любого строго положительного вектора* v, *такого, что* $\mathrm{x}+\mathrm{v}$ *принадлежит* Γ^{int}, *имеет место равенство*

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}_i\Big). \tag{11}$$

Доказательство. 1. Так как $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v}) = \mathrm{B}_{\{1,\dots,d\}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})$, то по лемме 2.1 имеет место равенство

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset \{1,\dots,d\}} (-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big). \tag{12}$$

Обозначим через I' множество $\{1,\dots,d\}\setminus \mathrm{In}_C(\Gamma)$.

Представляя A в виде суммы множеств $A_1 = A\cap I'$ и $A_2 = A\cap \mathrm{In}_C\,\Gamma$, равенство (12) можно переписать следующим образом:

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A_1\subset I'}\ \sum_{A_2\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A_1|+|A_2|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A_1\cup A_2} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Выделяя слагаемое $A_1=\emptyset$ из внешней суммы в правой части этого равенства, получаем

$$\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}^i\Big) +$$

$$+\sum_{\substack{A_1\subset I'\\ A_1\neq\emptyset}}\ \sum_{A_2\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A_1|+|A_2|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A_1\cup A_2} v_i\,\mathrm{e}^i\Big).$$

Таким образом, чтобы доказать равенство (11), достаточно доказать, что для любого непустого подмножества J множества I' имеет место следующее соотношение:

$$\sum_{A_2\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A_2|} g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{j\in J} v_j\,\mathrm{e}^j + \sum_{i\in A_2} v_i\,\mathrm{e}^i\Big) = 0. \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{x}^J = \mathrm{x}+\sum\limits_{i\in J} v_i\,\mathrm{e}^i$ – вершина открытого справа блока $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\mathrm{v})$.

Тогда, как следует из леммы 2.1, сумма в левой части равенства (13) совпадает с мерой $\nu\Big(\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J;\mathrm{x}^J+\mathrm{v})\Big)$.

Значит, достаточно для любого непустого подмножества J множества I' доказать равенство $\nu\Big(\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J;\mathrm{x}^J+\mathrm{v})\Big)=0$.

А поскольку мера ν сосредоточена на конусе C, то достаточно для любого непустого подмножества J множества I' доказать, что множество $\mathrm{B}'=C\cap\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J,\mathrm{x}^J+\mathrm{v})$ является пустым.

2. Пусть J – некоторое непустое подмножество множества I'.

Так как $\mathrm{x}^J\ge\mathrm{x}$, причем элементы x^J и x могут отличаться только координатами из множества $I'=\{1,\dots,d\}\setminus\mathrm{In}_C(\Gamma)$, то блок $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J,\mathrm{x}^J+\mathrm{v})$ содержится в блоке $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$.

Тогда, поскольку Γ есть правильно рассекающая грань конуса C, получаем, что множество B' содержится в открытом справа блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$.

Пусть $\mathrm{x}^J=(x_1^J,\dots,x_d^J)$. Тогда для любого элемента $\mathrm{y}=(y_1,\dots,y_d)$ из $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J,\mathrm{x}^J+\mathrm{v})$ и для всех j из J имеет место неравенство $y_j\ge x_j^J=x_j+v_j$.

С другой стороны, для любого элемента $\mathrm{z}=(z_1,\dots,z_d)$ из $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$ и для всех i от 1 до d имеет место неравенство $z_i<x_i+v_i$. Отсюда в силу непустоты множества J получаем, что блок $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}^J,\mathrm{x}^J+\mathrm{v})$ не пересекается с блоком $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$.

Таким образом, мы получили, что множество B' одновременно содержится в блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})$ и не пересекается с ним, а значит, оно является пустым. Лемма доказана.

Следствие 2.2.1. *Пусть C – конус в R^d, Γ – его грань, правильно рассекающая блоки, ν – вероятностная мера на C и ее инвертированная функция распределения $g_\nu(\mathrm{x})$ непрерывна на конусе C.*

Тогда для любого элемента x из Γ^{int} и любого строго положительного вектора v, такого, что $\mathrm{x}+\mathrm{v}$ принадлежит Γ^{int}, имеет место равенство

$$\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big)=\sum_{A\subset\mathrm{In}_C(\Gamma)}(-1)^{|A|}g_\nu\Big(\mathrm{x}+\sum_{i\in A}v_i\,\mathrm{e}_i\Big). \tag{14}$$

Доказательство. По лемме 2.2 из σ-аддитивности меры ν получаем соотношение

$$\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x},\mathrm{x}+\mathrm{v})\Big) = \lim_{\alpha\to+0}\nu\Big(\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x}+(1+\alpha)\,\mathrm{v})\Big) = $$
$$= \lim_{\alpha\to+0}\sum_{A\subset\mathrm{In}_C(\Gamma)}(-1)^{|A|}g\Big(\mathrm{x}+(1+\alpha)\sum_{i\in A}v_i\,\mathrm{e}_i\Big).$$

Поскольку инвертированная функция распределения g_ν непрерывна на конусе C, то отсюда получаем равенство (14). Следствие доказано.

Лемма 2.3. *Пусть C – многогранный конус в R^d, C^{int} – множество всех его внутренних точек, $\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m$ – система линейно независимых векторов в R^d, C' – подмножество C, обладающее следующим свойством: для любой точки x из C' вектора $\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m$ направлены из точки x вовнутрь конуса C.*

Пусть U – некоторое открытое множество в R^d, а f – некоторая функция, определенная на R^d.

Если функция f непрерывна на множестве $U\cap C$, а на множестве $U\cap C^{\mathrm{int}}$ существует производная $\frac{\partial^m f}{\partial\,\mathrm{u}_1\ldots\partial\,\mathrm{u}_m}$, непрерывная на этом множестве вплоть до его границ, то и на множестве $U\cap C'$ существует односторонняя производная $\frac{\partial^m f}{\partial^+\mathrm{u}_1\ldots\partial^+\mathrm{u}_m}$, непрерывная на нем вплоть до его границ.

Доказательство. По определению, для того чтобы производная $\frac{\partial^m f}{\partial^+\mathrm{u}_1\ldots\partial^+\mathrm{u}_m}$ существовала на множестве $U\cap C'$ и была непрерывна на нем вплоть до границ, необходимо и достаточно, чтобы для любой подсистемы векторов $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_l$ системы $\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m$ и для любого x из $U\cap C'$ существовал предел

$$\lim_{\substack{h_1\to+0\\ \ldots\\ h_l\to+0}}\frac{1}{h_1\cdot\ldots\cdot h_l}\sum_{\mathrm{x}'\in\mathrm{Vert}_l(\mathrm{x};h_1\cdot\mathrm{v}_1,\dots,h_l\cdot\mathrm{v}_l)}(-1)^{\mathrm{s}(\mathrm{x}';\mathrm{x})+l}f(\mathrm{x}'),\qquad(15)$$

который непрерывно зависит от x на замыкании множества $U\cap C'$.

Пусть $\mathrm{v}_1,\dots,\mathrm{v}_l$ – произвольная подсистема векторов системы $\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m$.

По условию на $U\cap C^{\mathrm{int}}$ существует производная $\frac{\partial^m f}{\partial\,\mathrm{u}_1\ldots\partial\,\mathrm{u}_m}$, непрерывная на этом множестве вплоть до его границ. Тогда на множестве $U\cap C^{\mathrm{int}}$ существует и непрерывна до границ и производная $\frac{\partial^l f}{\partial\,\mathrm{v}_1\ldots\partial\,\mathrm{v}_l}$. Обозначим через $f_1(\mathrm{x})$ непрерывное продолжение производной $\frac{\partial^l f}{\partial\,\mathrm{v}_1\ldots\partial\,\mathrm{v}_l}$ на замыкание множества $U\cap C^{\mathrm{int}}$.

Тогда для любого x из $U \cap C^{\mathrm{int}}$ и любых достаточно малых положительных $h_1, \dots, h_l$ имеет место равенство

$$\sum_{x' \in \mathrm{Vert}_l(x; h_1 \cdot v_1, \dots, h_l \cdot v_l)} (-1)^{s(x';x)+l} f(x') =$$

$$= \int\limits_{\substack{0 < h'_j < h_j, \\ j=1,\dots,l}} f_1(x + \sum_{j=1}^{l} h'_j \cdot v_j) dh'_1 \dots dh'_l. \qquad (16)$$

Докажем, что соотношение (16) будет выполняться для любого элемента x из $U \cap C'$ и любых достаточно малых положительных чисел $h_1, \dots, h_l$.

Пусть x – некоторый элемент из $C' \cap U$. По условию, существует такое малое положительное число h, что точки $x + h \cdot v_i$ принадлежат C для всех i от 1 до l. Тогда ввиду выпуклости конуса C существуют такие малые положительные числа $h_1, \dots, h_l$, что l-мерный параллелепипед $\mathrm{Par}_l(x; h_1 \cdot v_1, \dots, h_l \cdot v_l)$ содержится в множестве C.

Пусть y – некоторая точка из C^{int} и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что ε-окрестность точки y целиком содержится в множестве C^{int}, а ε-окрестность точки x целиком содержится в множестве U. Тогда для любого x′ из C, принадлежащего ε-окрестности точки x, и для любого достаточно малого числа $t > 0$ элемент $x' + t \cdot (y - x)$ принадлежит $C^{\mathrm{int}} \cap U$.

Не ограничивая общности можно считать, что числа $h_1, \dots, h_l$ настолько малы, что l-мерный параллелепипед $\mathrm{Par}_l(x; h_1 \cdot v_1, \dots, h_l \cdot v_l)$ содержится в ε-окрестности точки x. Отсюда очевидно получаем, что для любого малого $t > 0$ параллелепипед $\mathrm{Par}_l(x + t \cdot (y - x); h_1 \cdot v_1, \dots, h_l \cdot v_l)$ содержится в множестве $U \cap C^{\mathrm{int}}$, а значит, для любого числа t, $0 < t < 1$, для элемента $x + t \cdot (y - x)$ и положительных чисел $h_1, \dots, h_l$ выполняется соотношение (16).

Но так как в соотношении (16) левая и правая части равенства непрерывны на множестве $U \cap C$, то, устремив элемент $x + t \cdot (y - x)$ к элементу x, мы можем перейти к пределу, откуда получаем, что соотношение (16) будет выполняться для элемента x и положительных чисел $h_1, \dots, h_l$.

Тогда предел (15) существует для всех x из $U \cap C'$ и равен $f_1(x)$, и поскольку функция f_1 непрерывна на $U \cap C$ вплоть до границ, то значение предела (15) на множестве $U \cap C'$ также непрерывно вплоть до границ. Лемма доказана.

Поскольку в любой точке из $\Gamma^{\rm int}$ вектора e^i, $i \in \mathrm{In}_C(\Gamma)$, направлены вовнутрь конуса, то имеет место следующее следствие.

Следствие 2.3.1. *Пусть C – многогранный конус в R^d, $C^{\rm int}$ – множество всех его внутренних точек, Γ – грань C. И пусть U – некоторое открытое множество в R^d, а f – некоторая функция, определенная на R^d.*

Если функция f непрерывна на множестве $U \cap C$, а на множестве $U \cap C^{\rm int}$ существует производная $\frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} f}{\partial\, \mathrm{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}$, непрерывная на этом множестве вплоть до его границ, то на множестве $U \cap \Gamma^{\rm int}$ существует производная $\frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} f}{\partial +\, \mathrm{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}$, непрерывная на нем вплоть до его границ.

Лемма 2.4. *Пусть M – телесный политоп в R^d. Тогда семейство $\mathcal{S}(M)$ всех множеств, подобных M, является покрытием Витали пространства R^d для меры λ^d.*

Доказательство. Так как множество M – политоп, то оно ограничено, а значит, семейство $\mathcal{S}(M)$ стягивается в каждой точке пространства R^d.

Определим для любого M' из $\mathcal{S}(M)$ подмножество $\theta(M')$ множества R^d как объединение всех M'' из $\mathcal{S}(M)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $M'' \cap M' \neq \emptyset$;

2) $\lambda^d(M'') < 2\lambda^d(M')$.

Очевидно, что отображение $M' \to \theta(M')$ линейно, то есть $\theta(\mathrm{x} + \alpha \cdot M') = \mathrm{x} + \alpha \cdot \theta(M')$. Тогда для любого M' из $\mathcal{S}(M)$ имеет место равенство

$$\frac{\lambda^d(\theta(M'))}{\lambda^d(M')} = \frac{\lambda^d(\theta(M))}{\lambda^d(M)} = \mathrm{const}\,.$$

А как было доказано в [6, §2.8.17], этого достаточно, чтобы семейство множеств $\mathcal{S}(M)$ являлось покрытием Витали пространства R^d для меры λ^d. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть M – телесный политоп в R^d, U – открытое подмножество в R^d. И пусть ν – мера на R^d, такая, что для любого политопа M', подобного M и содержащегося в U, имеет место соотношение $\nu(M') \leq C \cdot \lambda^d(M')$ (где $C > 0$ – константа, не зависящая от M').*

Тогда мера $\nu\big|_U$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ^d, и для плотности меры $\nu\big|_U$ λ^d-почти всюду на U выполняется равенство

$$\frac{d\nu\big|_U}{d\lambda^d}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda^d(M)} \cdot \lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu(\mathrm{x} + \alpha \cdot M)}{\alpha^d}, \tag{17}$$

где предел в правой части также существует λ^d-почти всюду на множестве U.

Доказательство. 1. Так как политоп M телесный, то по лемме 2.4 семейство $\mathcal{S}(M)$ всех множеств, подобных M, является покрытием Витали пространства R^d для меры λ^d.

Тогда, как доказано в [6, §2.9.10], если мера $\nu\big|_U$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ^d, то λ^d-почти всюду на U выполняется соотношение

$$\frac{d\nu\big|_U}{d\lambda^d}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda^d(M)} \cdot \lim_{M' \to \mathrm{x}} \frac{\nu(M')}{\lambda^d(M')}, \tag{18}$$

где предел в правой части берется по всем множествам M' из $\mathcal{S}(M)$ и существует на U также почти всюду.

Но поскольку семейство $\mathcal{S}(M)$ состоит из множеств вида $\mathrm{x} + \alpha \cdot M$, а $\lambda^d(\mathrm{x} + \alpha \cdot M) = \alpha^d \cdot \lambda^d(M)$, то равенство (17) вытекает из соотношения (18).

Таким образом, мы доказали, что если мера $\nu\big|_U$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ^d, то равенство (17) выполняется.

2. Докажем теперь, что мера $\nu\big|_U$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ^d. Для этого достаточно доказать, что для произвольной точки x множества U существует такая окрестность $O(\mathrm{x})$, что мера $\nu\big|_{O(\mathrm{x})}$ абсолютно непрерывна.

Пусть $O(\mathrm{x})$ – открытый шар с центром в x, такой, что расстояние от множества $O(\mathrm{x})$ до $\mathrm{R}^d \setminus U$ строго больше нуля. Тогда найдется такое число $\delta(\mathrm{x}) > 0$, что любой политоп M', подобный

M, пересекающий окрестность $O(\mathrm{x})$ и удовлетворяющий соотношению $\lambda^d(M') < \delta(\mathrm{x})$, будет целиком содержаться в U.

Пусть B – произвольное подмножество в $O(\mathrm{x})$ лебеговой меры нуль. Покажем, что $\nu(B) = 0$.

Так как $\lambda^d(B) = 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое не более чем счетное покрытие Π_ε множества B замкнутыми блоками, что суммарная мера Лебега всех блоков из Π_ε будет меньше ε. Не ограничивая общности будем считать, что покрытие Π_ε состоит из замкнутых кубов, пересекающихся только по границе (в противном случае можно разбить каждый замкнутый блок на не более чем счетное число кубов так, что это условие будет выполняться).

Тогда, так как политоп M телесный, в нем помещается некоторый куб положительной меры Лебега $h > 0$, а значит, любой куб меры Лебега h' может быть помещен в политоп M', подобный M, так, что $\lambda^d(M') = \frac{h'}{h} \cdot \lambda^d(M)$.

Поместив таким образом каждый куб из покрытия Π_ε в политоп, подобный M, получаем покрытие Π'_ε множества B, такое, что каждое множество из Π'_ε подобно M и суммарная мера Лебега всех политопов из Π'_ε меньше $\frac{\lambda^d(M)}{h}\varepsilon$.

А поскольку, не ограничивая общности мы можем считать, что все кубы из покрытия Π_ε имеют меру Лебега меньшую $\delta(\mathrm{x}) \cdot \frac{h}{\lambda^d(M)}$, то получаем, что все политопы из покрытия Π'_ε пересекают множество $O(\mathrm{x})$ и имеют меру Лебега меньшую $\delta(\mathrm{x})$, а следовательно, содержатся в U.

Тогда будет выполняться следующая цепочка неравенств:

$$\nu(B) \leq \sum_{M' \in \Pi'_\varepsilon} \nu(M') \leq \sum_{M' \in \Pi'_\varepsilon} C\lambda^d(M') < C \cdot \frac{\lambda^d(M)}{h}\varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $\nu(B) = 0$.

Значит, для произвольного элемента x из U и для любого измеримого подмножества B окрестности $O(\mathrm{x})$, если $\lambda^d(B) = 0$, то и $\nu(B) = 0$, то есть мера $\nu\big|_{O(\mathrm{x})}$ абсолютно непрерывна относительно λ^d. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть V – линейное подпространство R^d, U – открытое подмножество R^d, ν – мера на R^d, v – некоторый строго* *положительный вектор из V, и пусть для любого x из $U \cap V$ и любого достаточно малого $\alpha > 0$, если параллелепипед $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha\, \mathrm{v})$ содержится в U, то имеет место неравенство*

$$\nu\big|_{U \cap V}\left(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha\, \mathrm{v})\right) \leq C \cdot \alpha^k, \tag{19}$$

где $C > 0$ и $k \geq \dim V$ – некоторые константы.

Тогда ограничение $\nu\big|_{U \cap V}$ меры ν на $U \cap V$ будет абсолютно непрерывно относительно меры Лебега λ_V на V, причем

1) *если $k > \dim V$, то $\nu\big|_{U \cap V} = 0$;*
2) *если же $k = \dim V$, то для плотности распределения $\nu\big|_{U \cap V}$ λ_V-почти всюду на U выполняется следующее равенство:*

$$\frac{d\nu\big|_{U \cap V}}{d\lambda_V}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda_V\left(\overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})\right)} \cdot \lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\big|_{U \cap V}\left(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\right)}{\alpha^{\dim V}}. \tag{20}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда $k = \dim V$.

Так как v принадлежит V, то для любого x из V и любого $\alpha > 0$ имеет место соотношение

$$V \cap \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha\, \mathrm{v}) = \mathrm{x} + \alpha \cdot \left(V \cap \overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_V\left(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha\, \mathrm{v})\right) = \lambda_V\left(\overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})\right) \cdot \alpha^{\dim V}.$$

А поскольку $\mathrm{v} > 0$, то $\lambda_V\left(\overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})\right) > 0$, а значит, множество $V \cap \overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})$ является политопом, телесным во внутренней топологии пространства V.

Тогда, отождествляя евклидово пространство V с $\mathrm{R}^{\dim V}$, из леммы 2.5 получаем, что мера $\nu\big|_{U \cap V}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ_V на V, причем выполняется равенство (20).

2. Пусть теперь $k > \dim V$.

Тогда при малых $\alpha > 0$ неравенство (19) будет выполняться и при $k = \dim V$, а значит, мера $\nu\big|_{U \cap V}$ будет абсолютно непрерывна на V и для ее плотности распределения λ_V-почти всюду на U будет выполняться равенство (20).

Но по условию

$$0 \le \frac{\nu\big|_{U\cap V}\left(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\cdot\mathrm{v})\right)}{\alpha^{\dim V}} \le C\cdot\alpha^{k-\dim V}.$$

Отсюда получаем, что предел в правой части равенства (20) равен нулю, а значит, плотность распределения меры $\nu\big|_{U\cap V}$ также λ_V-почти всюду равна нулю. В силу абсолютной непрерывности данной меры имеем $\nu\big|_{U\cap V}=0$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть V_1 и V_2 – подпространства евклидова пространства R^d одинаковой размерности, S_1 – подмножество множества V_1, измеримое по Лебегу, и $\lambda_{V_1}(S_1)>0$.*

Тогда имеет место равенство

$$\frac{\lambda_{V_2}\Big(\mathrm{pr}_{V_2}(S_1)\Big)}{\lambda_{V_1}(S_1)} = q(V_1,V_2).$$

Доказательство. Поскольку и область определения, и область значений отображения $\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}$ являются евклидовыми пространствами одной размерности, то, воспользовавшись правилом замены переменных под знаком интеграла Лебега, получаем следующую цепочку равенств:

$$\lambda_{V_2}\Big(\mathrm{pr}_{V_2}(S_1)\Big) = \int\limits_{\mathrm{pr}_{V_2}(S_1)} d\lambda_{V_2} = \int\limits_{S_1}\left|J\left(\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}\right)(\mathrm{y})\right|\,d\lambda_{V_1}(\mathrm{y}),$$

где $J\left(\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}\right)(\mathrm{y})$ – постоянный определитель Якоби линейного отображения $\mathrm{pr}_{V_2}\Big|_{V_1}$.

Отсюда в силу определения коэффициента $q(V_1,V_2)$ получаем равенство

$$\lambda_{V_2}\Big(\mathrm{pr}_{V_2}(S_1)\Big) = q(V_1,V_2)\cdot\lambda_{V_1}(S_1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть C – конус в R^d, Γ – его грань, такая, что* $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim\Gamma$, *а подпространство $V(\Gamma)$ содержит хотя бы одну строго положительную точку $\mathrm{v}=(v_1,\ldots,v_d)$.*

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\mathrm{q}_C(\Gamma) = \frac{\prod\limits_{i\in \mathrm{In}_C(\Gamma)} v_i}{\lambda_{V(\Gamma)}\Big(\overline{\mathrm{B}}(0;\mathrm{v})\Big)}. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $L_\Gamma = \{(x'_1,\ldots,x'_d) \in \mathrm{R}^d : \ x'_j = 0, \ j \notin \mathrm{In}_C(\Gamma)\}$ – некоторое подпространство, параллельное осям с индексами из множества $\mathrm{In}_C(\Gamma)$.

Положим $S_1 = \overline{\mathrm{B}}(0;\mathrm{v}) \cap V(\Gamma)$. Очевидно, что S_1 есть подмножество пространства $V(\Gamma)$, измеримое по Лебегу, а поскольку точка v является строго положительной, то $\lambda_{V(\Gamma)}(S_1) > 0$.

Пусть S_2 есть проекция множества S_1 на подпространство L_Γ.

Так как $\overline{\mathrm{B}}(0;\mathrm{v})$ есть прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям, а точка v принадлежит подпространству $V(\Gamma)$, то S_2 будет также являться прямоугольным параллелепипедом размерности $|\mathrm{In}_C(\Gamma)|$ с ребрами, параллельными осям, и будет выполняться равенство

$$S_2 = \mathrm{pr}_{L_\Gamma}(S_1) =$$
$$= \Big\{(x'_1,\ldots,x'_d) \in \mathrm{R}^d : 0 \le x'_k \le v_k,\, x'_j = 0,\, k \in \mathrm{In}_C(\Gamma),\, j \notin \mathrm{In}_C(\Gamma)\Big\}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda_{L_\Gamma}(S_2) = \prod_{i\in \mathrm{In}_C(\Gamma)} v_i.$$

Тогда, поскольку $\mathrm{q}_C(\Gamma) = q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big)$, используя лемму 2.7, получаем равенство (21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для любой грани Γ обозначим через $h(\Gamma)$ ее коразмерность: $h(\Gamma) = d - \dim\Gamma$.

Воспользуемся индукцией по коразмерности граней.

Единственной гранью конуса нулевой коразмерности является сам конус C. Докажем, что для этой грани утверждение теоремы выполняется.

Действительно, так как по условию во всех внутренних точках множества $U \cap C$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial \mathrm{e}^1 \ldots \partial \mathrm{e}^d}$, то мера $\nu\Big|_{U\cap C^{\mathrm{int}}}$ является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега λ^d на R^d, причем почти всюду имеет место равенство

$$\frac{d\nu\Big|_{U\cap C^{\rm int}}}{d\lambda^d} = (-1)^d \frac{\partial^d g_\nu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \dots \partial\,\mathrm{e}^d}.$$

Тогда, поскольку $\mathrm{In}_C(C) = \{1, \dots, d\}$, $\mathrm{q}_C(C) = 1$ по определению, а во внутренних точках множества $U \cap C$ производные $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \dots \partial\,\mathrm{e}^d}$ и $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial_+\,\mathrm{e}^1 \dots \partial_+\,\mathrm{e}^d}$ совпадают, то для грани C утверждение теоремы выполняется.

Предположим теперь, что оно выполняется и для всех правильно рассекающих блоки граней конуса C коразмерности меньше некоторого h_0. Докажем, что для произвольной правильно рассекающей грани Γ коразмерности h_0 оно также выполняется.

Для удобства разобьем доказательство на две части.

1. Докажем сначала, что мера $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{\rm int}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$, а если $|\mathrm{In}_C(\Gamma)| > \dim\Gamma$, то $\nu\Big|_{U\cap\Gamma^{\rm int}} = 0$.

Пусть x – некоторый элемент из $U \cap \Gamma^{\rm int}$, а v – строго положительный вектор из $V(\Gamma)$. Так как v принадлежит $V(\Gamma)$, то при достаточно малом α элемент $\mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{v}$ принадлежит $\Gamma^{\rm int}$. Тогда по следствию к лемме 2.2 имеет место равенство

$$\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{v})\Big) = \sum_{A\subset \mathrm{In}_C(\Gamma)} (-1)^{|A|} g\Big(\mathrm{x}+\alpha \sum_{i\in A} v_i\,\mathrm{e}_i\Big).$$

Но поскольку инвертированная функция распределения g_ν непрерывна на множестве $U \cap C$, а на $U \cap C^{\rm int}$ существует производная $\frac{\partial^d g_\nu}{\partial\,\mathrm{e}^1 \dots \mathrm{e}^d}$, непрерывная на этом множестве вплоть до его границ, то по следствию к лемме 2.3 на множестве $U \cap \Gamma^{\rm int}$ существует односторонняя производная $\frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial_+\,\mathrm{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}$, непрерывная на нем вплоть до его границ.

Отсюда получаем, что для любого x из $U \cap \Gamma^{\rm int}$ существует предел

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}, \mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{v})\Big)}{\alpha^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|}} = \prod_{i\in \mathrm{In}_C(\Gamma)} v_i \cdot \frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial_+\,\mathrm{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}(\mathrm{x}). \tag{22}$$

А значит, при достаточно малых $\alpha > 0$ для некоторой константы $K > 0$ выполняется неравенство

$$\nu\big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}\big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{v})\big) \le \nu\big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{v})\big) \le K\cdot\alpha^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|}.$$

Но поскольку грань Γ является правильно рассекающей блоки, то по теореме 3.1, доказанной ниже, $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| \ge \dim\Gamma = \dim V(\Gamma)$.

Тогда из леммы 2.6 получаем, что

– если $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| > \dim\Gamma$, то $\nu\big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}} = 0$;

– если же $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim\Gamma$, то мера $\nu\big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$, причем для плотности этой меры $\lambda_{V(\Gamma)}$-почти всюду на $U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}$ выполняется равенство

$$\frac{d\nu\big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\lambda_{V(\Gamma)}\big(\overline{\mathrm{B}}(0;\mathrm{v})\big)}\cdot\lim_{\alpha\to+0}\frac{\nu\big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}\big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\cdot\mathrm{v})\big)}{\alpha^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|}}. \quad (23)$$

2. Докажем теперь, что если $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| = \dim\Gamma$ и все надграни грани Γ являются правильно рассекающими гранями конуса C, то на $U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}$ имеет место соотношение (5).

Как было показано в [3], внутренности граней конуса C образуют его разбиение, то есть выполняется равенство

$$C = \bigcup_{\Gamma_1\subset C}\Gamma_1^{\mathrm{int}},$$

где объединение в правой части равенства производится по всем граням конуса C, причем в этом объединении внутренние части различных граней не пересекаются.

Тогда, так как мера ν сосредоточена на конусе C,

$$\nu\big|_U = \sum_{\Gamma_1\subset C}\nu\big|_{U\cap\Gamma_1^{\mathrm{int}}},$$

где суммирование в правой части равенства производится по всем граням конуса C.

Поскольку любой элемент x из Γ^{int} не принадлежит ни одной подграни грани Γ, то в силу замкнутости граней конуса C при достаточно малых $\alpha > 0$ параллелепипед $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\cdot\mathrm{v})$ будет пересекаться только с надгранями грани Γ. А поскольку для любого x из U при достаточно малых $\alpha > 0$ параллелепипед $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x};\mathrm{x}+\alpha\cdot\mathrm{v})$

целиком содержится в U, то для любого x из $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ имеет место равенство

$$\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big) = \sum_{\Gamma_1 \supset \Gamma} \nu\big|_{U \cap \Gamma_1^{\mathrm{int}}}\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big),$$

где суммирование в правой части производится по всем надграням грани Γ.

Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big)}{\alpha^{\dim \Gamma}} = \sum_{\Gamma_1 \supset \Gamma} \lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\big|_{U \cap \Gamma_1^{\mathrm{int}}}\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big)}{\alpha^{\dim \Gamma}}. \quad (24)$$

Пусть Γ_1 – некоторая надгрань грани Γ, не совпадающая с Γ. Так как Γ_1 является правильно рассекающей гранью, а $h(\Gamma_1) < h(\Gamma) = h_0$, то по предположению индукции мера $\nu\Big|_{U \cap \Gamma_1^{\mathrm{int}}}$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma_1)}$. Отсюда следует, что для некоторой константы $K_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\nu\big|_{U \cap \Gamma_1^{\mathrm{int}}}\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha\, \mathrm{v})\Big) \le K_1 \cdot \alpha^{\dim \Gamma_1}.$$

Но поскольку $\dim \Gamma_1 > \dim \Gamma$, то получаем, что для произвольной надграни Γ_1 грани Γ, $\Gamma_1 \ne \Gamma$, выполняется соотношение

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\big|_{U \cap \Gamma_1^{\mathrm{int}}}\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big)}{\alpha^{\dim \Gamma}} = 0.$$

Тогда мы можем упростить соотношение (24), выбросив из его правой части слагаемые, равные нулю. В результате для любого x из $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ имеем равенство

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big)}{\alpha^{\dim \Gamma}} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\nu\big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}}\Big(\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{x}; \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathrm{v})\Big)}{\alpha^{\dim \Gamma}}.$$

Учитывая равенства (22) и (23), получаем, что на множестве $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ имеет место следующее соотношение:

$$\lambda_{V(\Gamma)}\big(\overline{\mathrm{B}}(0; \mathrm{v})\big) \cdot \frac{d\nu\big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathrm{x}) = \prod_{i \in \mathrm{In}_C(\Gamma)} v_i \cdot \frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)|} g_\nu}{\partial^+ \, \mathrm{e}^{\mathrm{In}_C(\Gamma)}}(\mathrm{x}).$$

Тогда, учитывая результат леммы 2.8, получаем, что на множестве $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ выполняется соотношение (5). Теорема 2.1 доказана.

3. Условия, обеспечивающие правильное рассечение блоков

Сформулируем несколько критериев, позволяющих находить грани конусов, правильно рассекающие блоки.

Под записью $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ будем понимать, что вектора $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r$ из R^d являются столбцами матрицы N.

Пусть $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ – некоторая матрица из $\mathrm{R}^{d \times r}$.

Будем отождествлять матрицу N с отображением N из R^r в R^d, определяемым через матричное умножение как $\mathrm{x} \to N\mathrm{x}$.

Для любого подмножества A пространства R^r под записью $N(A)$ будем понимать множество $N(A) = \{N\mathrm{x},\ \mathrm{x} \in A\}$.

Обозначим через $\mathcal{C}_d = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ \mathrm{x} \geq 0\}$ множество всех неотрицательных векторов в R^d и через $\mathcal{E}_d = \{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_d\}$ – множество базисных ортов в R^d.

Определим для матрицы N ортогональные и взаимно дополняющие друг друга подпространства $V(N)$ и $V^{\perp}(N)$, полагая

$$V(N) = V\Big(\{\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r\}\Big) = \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ \mathrm{x} = N\mathrm{u},\ \mathrm{u} \in \mathrm{R}^r\Big\} = \mathrm{Im}N,$$
$$V^{\perp}(N) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ N^T\mathrm{x} = 0\} = \mathrm{Ker}\ N^T.$$

Обозначим через $\mathrm{Cone}(N)$ минимальный выпуклый конус, содержащий вектора $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r$, полагая

$$\mathrm{Cone}(N) = \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ \mathrm{x} = N\mathrm{u},\ \mathrm{u} \in \mathrm{R}^r,\ \mathrm{u} \geq 0\Big\} =$$
$$= \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ \mathrm{x} = \sum_{j=1}^{l} \mathrm{n}_j\, u_j,\ u_j \geq 0,\ j = 1, \dots, r\Big\} = N(\mathcal{C}_r).$$

Конусы вида $\mathrm{Cone}(N)$ называются конечнопорожденными конусами, а вектора $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r$ – порождающими векторами конуса $\mathrm{Cone}(N)$.

Также обозначим через $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ многогранный конус, являющийся пересечением полупространств с внутренними нормалями $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r$:

$$\mathrm{Cone}^{\perp}(N) = \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ N^T\mathrm{x} \geq 0\Big\} =$$
$$= \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ (\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) \geq 0,\ j = 1, \dots, r\Big\}.$$

Вектора $\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r$ называются определяющими векторами многогранного конуса $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$, а неравенства $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) \geq 0,\ j = 1, \dots, r$, – его определяющими неравенствами.

Следует заметить, что множество $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ является прообразом множества $\mathcal{C}_r$ при отображении N^T. Кроме того, по определению, множества $\mathrm{Cone}(N)$ и $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ инвариантны относительно перестановки столбцов матрицы N.

Как следует из теоремы Минковского (см. [3, 5]), для любой матрицы M конечнопорожденный конус $\mathrm{Cone}(M)$ является многогранным.

Определение 3.1. *Для любой матрицы $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ из $\mathrm{R}^{d\times r}$, для любого подмножества J множества $\{1, \dots, r\}$ обозначим через $\Big(N|J\Big)$ матрицу из $\mathrm{R}^{|J|\times d}$, состоящую из столбцов $(\mathrm{n}_j, j \in J)$.*

Следует заметить, что по лемме 3.1, сформулированной ниже в §3.1, любая грань Γ конуса $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ имеет вид

$$\Gamma = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|J), \tag{25}$$

где J – некоторое подмножество множества $\{1, \dots, r\}$, причем для любого подмножества J найдется соответствующая грань, удовлетворяющая данному равенству.

А поскольку конус $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ есть множество решений системы своих определяющих неравенств $\{(\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) \geq 0,\ j = 1, \dots, r\}$, а $V^{\perp}(N|J)$ – множество решений системы линейных равенств $\{(\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) = 0,\ j \in J\}$, то соотношение (25) является формальной записью того известного факта, что грань многогранного конуса можно получить превращением части из определяющих неравенств конуса в жесткие равенства (см. [3, 5]).

Определение 3.2. *Для любой матрицы $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ из $\mathrm{R}^{d\times r}$, для любой грани Γ конуса $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ определим подмножество $J_N(\Gamma)$ множества $\{1, \dots, r\}$, полагая*

$$J_N(\Gamma) = \{j \in \{1, \dots, r\}:\ (\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) = 0\ \ \forall \mathrm{x} \in \Gamma\}.$$

Везде далее под записью $(N|\Gamma)$ будем понимать матрицу $\big(N|J_N(\Gamma)\big)$.

По лемме 3.1 имеет место равенство $\Gamma = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|\Gamma)$.

Кроме того, из данного определения следует, что для фиксированной грани Γ конуса $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ множество $J_N(\Gamma)$ есть наибольшее по включению подмножество множества $\{1, \dots, r\}$, для которого имеет место равенство (25).

Определение 3.3. *Для любой матрицы $M = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ из $\mathrm{R}^{l\times d}$, будем обозначать через I_M^+ множество всех таких индексов i от 1 до d, что i-й столбец матрицы M неотрицателен, через I_M^- – множество всех таких индексов i от 1 до d, что i-й столбец матрицы M имеет хотя бы одну отрицательную координату, и через I_M^0 – множество всех тех индексов i от 1 до d, что i-й столбец матрицы M равен нулю. Обозначим через $M^+ = \left(M|I_M^+\right)$ матрицу, состоящую из неотрицательных столбцов матрицы M, и через $M^- = \left(M|I_M^-\right)$ – матрицу, состоящую из тех столбцов матрицы M, у которых есть хотя бы один отрицательный элемент.*

Пусть также $Q_M^+ = \mathrm{Cone}(M^+)$ – конус в R^r, порожденный столбцами матрицы M^+, и, аналогично, $Q_M^- = \mathrm{Cone}(M^-)$ – конус в R^r, порожденный столбцами матрицы M^-.

Если N – матрица из $\mathrm{R}^{d\times r}$, $M = N^T$ и m_i – i-й столбец матрицы M, $M = (\mathrm{m}_1, \dots, \mathrm{m}_d)$, то $\mathrm{m}_i = N^T(\mathrm{e}^i)$, а значит, столбец m_i будет неотрицателен в том и только в том случае, когда базисный вектор e^i принадлежит конусу $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$.

Кроме того, множество столбцов матрицы M может быть определено как образ множества базисных ортов $\mathcal{E}_d$ при отображении N^T:

$$\{\mathrm{m}_1, \dots, \mathrm{m}_d\} = N^T(\mathcal{E}_d).$$

А тогда для множеств столбцов матриц M^+ и M^- имеют место равенства

$$\{\mathrm{m}_i,\ i \in I_M^+\} = N^T(\mathcal{E}_d) \cap \mathcal{C}_d, \quad \{\mathrm{m}_i,\ i \in I_M^-\} = N^T(\mathcal{E}_d) \setminus \mathcal{C}_d.$$

Отсюда получаем следующие соотношения для конусов Q_M^+ и Q_M^-:

$$Q_M^+ = \mathrm{Cone}\Big(N^T(\mathcal{E}_d) \cap \mathcal{C}_d\Big), \quad Q_M^- = \mathrm{Cone}\Big(N^T(\mathcal{E}_d) \setminus \mathcal{C}_d\Big).$$

Определение 3.4. *Определим для любой матрицы M из $\mathrm{R}^{l\times d}$ подмножество K_M пространства R^d, полагая*

$$K_M = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathrm{R}^d:\ x_i \le 0,\ i \in I_{M^T}^0,\ \ x_l < 0,\ l \notin I_{M^T}^0\}.$$

То есть множество K_M есть множество всех тех точек $\mathrm{x} \le 0$, что если i-я строка матрицы M не равна нулю, то $x_i < 0$.

Определение 3.5. *Для любой грани* Γ *произвольного конуса* C *обозначим через* $\mathrm{inw}(C,\Gamma)$ *множество векторов, направленных вовнутрь* C *из всех точек множества* Γ^{int}.

Теперь мы можем сформулировать теорему, которую можно использовать в качестве критерия для нахождения правильно рассекающих граней.

Теорема 3.1. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– конус в* R^d, Γ *– грань конуса* C.

И пусть $k = |J_N(\Gamma)|$ *и* $M = \Big(N|J_N(\Gamma)\Big)^T$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{k\times d}$.

Введем следующие условия:

- A1) *существует открытый справа блок* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$, *экстремальные вершины которого принадлежат* Γ^{int};
- A2) *подпространство* $V(\Gamma)$ *содержит хотя бы один строго положительный элемент;*
- A3) *внутренние части конусов* $(-Q_M^+)$ *и* Q_M^- *имеют общую точку;*
- B1) *существует открытый справа блок* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$, *такой, что его экстремальные вершины принадлежат* Γ^{int}, *а множество* $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x};\mathrm{y}) \cap C$ *содержится в блоке* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$;
- B2) *для любого вектора* v *из множества* $\mathrm{inw}(C,\Gamma)$ *выполнение неравенства* $v_i < 0$ *для всех индексов* i *из* $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ *влечет за собой выполнение неравенства* $\mathrm{v} < 0$;
- B3) *столбцы матрицы* M^- *линейно независимы, а внутренняя часть конуса* Q_M^- *содержит множество* $V(M^-) \cap K_{M^+}$.

Тогда условия A1, A2, A3 *будут попарно эквивалентны, и при выполнении любого из них условия* B1, B2, B3 *также будут попарно эквивалентны.*

Для того чтобы грань Γ *правильно рассекала блоки, достаточно, чтобы одновременно выполнялось хотя бы одно из условий* A1, A2, A3 *и хотя бы одно из условий* B1, B2, B3*; и все эти шесть условий являются также и необходимыми.*

Кроме того, если грань Γ *конуса* C *правильно рассекает блоки, то имеет место неравенство* $|\,\mathrm{In}_C(\Gamma)| \geq \dim\Gamma$.

Доказательство теоремы 3.1.

Опираясь на теоремы 2.10 и 4.2 из [4], легко доказать следующую лемму (подробнее см. в [5, §§8.2–8.4]).

Лемма 3.1. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$.

Тогда для любой грани Γ *конуса* $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *имеют место равенства*

$$V(\Gamma) = V^{\perp}(N|\Gamma) \ \textit{и} \ \ \Gamma = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|\Gamma).$$

В свою очередь, для любого подмножества J' *множества* $\{1, \dots, r\}$ *существует такая грань* Γ' *конуса* $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$, *что имеет место равенство*

$$\Gamma' = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|J').$$

В [5] также было доказано следующее утверждение о конечнопорожденных многогранных конусах.

Лемма 3.2. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$, $C = \mathrm{Cone}(N)$ *– конечнопорожденный конус в* R^d.

Тогда для внутренней части конуса C *имеет место следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{int}} &= \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d \colon\ \mathrm{x} = N\,\mathrm{u},\ \ \mathrm{u} \in \mathrm{R}^r,\ \ \mathrm{u} > 0\Big\} = \\ &= \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d \colon\ \mathrm{x} = \sum_{j=1}^{l} u_j\, \mathrm{n}_j,\ \ u_j > 0,\ \ j = 1, \dots, r\Big\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Замечание. В данной лемме под внутренней частью конуса C понимается внутренняя часть его грани, совпадающей со всем конусом C.

Следующая лемма позволяет определить внутреннюю часть грани.

Лемма 3.3. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$.

Тогда для любой грани Γ *конуса* $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *имеет место равенство*

$$\Gamma^{\mathrm{int}} = V^{\perp}(N|\Gamma) \cap \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d :\ (\mathrm{n}_k, \mathrm{x}) > 0,\ \ k \notin J_N(\Gamma)\Big\}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть Γ – некоторая грань конуса $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$.

Так как множество Γ^{int} состоит из всех точек грани Γ, не принадлежащих ни одной из его подграней, то

$$\Gamma^{\mathrm{int}} = \Gamma \setminus \bigcup_{\Gamma_1 \subset \Gamma} \Gamma_1,$$

где объединение в правой части проводится по всем подграням Γ, не совпадающим с Γ.

Но так как для любой грани Γ_1, не содержащей Γ, множество $\Gamma \cap \Gamma_1$ есть подгрань грани Γ, не совпадающая с Γ (см. [3]), то

$$\Gamma^{\mathrm{int}} = \Gamma \setminus \bigcup_{\Gamma_1 \not\supset \Gamma} \Gamma_1,$$

где объединение в правой части проводится по всем граням, не содержащим Γ.

По определению множества $J_N(\Gamma_1)$ и лемме 3.1 получаем, что для любой грани Γ_1, не содержащей Γ, множество $J_N(\Gamma_1)$ не содержится в $J_N(\Gamma)$. Тогда из леммы 3.1 вытекает, что для любого подмножества J' множества $\{1, \dots, r\}$, не содержащегося в $J_N(\Gamma)$, грань $\Gamma' = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|J')$ не содержит Γ.

А тогда, поскольку для любых подмножеств $J' \subset J''$ множества $\{1, \dots, r\}$ подпространство $V^{\perp}(N|J')$ содержится в $V^{\perp}(N|J'')$, имеет место следующее равенство:

$$\bigcup_{\Gamma_1 \not\supset \Gamma} \Gamma_1 = \bigcup_{J_N(\Gamma) \not\subset J' \subset \{1,\dots,r\}} V^{\perp}(N|J') \cap \mathrm{Cone}^{\perp}(N) = \\ = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap \bigcup_{j \notin J_N(\Gamma)} V^{\perp}(\mathrm{n}_j).$$

Отсюда получаем, что выполняется соотношение

$$\Gamma^{\mathrm{int}} = \Gamma \setminus \bigcup_{\Gamma_1 \not\supset \Gamma} \Gamma_1 = \mathrm{Cone}^{\perp}(N) \cap V^{\perp}(N|J_N(\Gamma)) \setminus \bigcup_{j \notin J_N(\Gamma)} V^{\perp}(\mathrm{n}_j). \quad (28)$$

Из определения $\mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ и $V^{\perp}(\mathrm{n}_j)$ следует, что правые части равенств (27) и (28) совпадают. Лемма доказана.

Следствие 3.3.1. *Пусть $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ – матрица из $\mathrm{R}^{d \times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ – многогранный конус в R^d, Γ – грань конуса C.*

Тогда для любого элемента x из множества Γ^{int} существует такая его окрестность $O(\mathrm{x})$, что выполняется равенство

$$O(\mathrm{x}) \cap V(\Gamma) = O(\mathrm{x}) \cap \Gamma^{\mathrm{int}}. \quad (29)$$

Доказательство. Из леммы 3.1 и соотношения (27) леммы 3.3 имеем, что

$$\Gamma^{\mathrm{int}} = V(\Gamma) \cap \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d : \ (\mathrm{n}_k, \mathrm{x}) > 0, \ k \notin J_N(\Gamma)\Big\}.$$

Пусть x – произвольный элемент из Γ^{int}.

Тогда мы можем выбрать окрестность $O(\mathrm{x})$ так, чтобы для любого x' из $O(\mathrm{x})$ выполнялось условие $(\mathrm{n}_k, \mathrm{x}) \geq 0$ для всех k из $\{1, \dots, r\}$, не принадлежащих $J_N(\Gamma)$.

Отсюда получаем, что любой элемент из пересечения $O(\mathrm{x}) \cap V(\Gamma)$ будет принадлежать Γ^{int}, то есть множество $O(\mathrm{x}) \cap V(\Gamma)$ содержится в множестве $O(\mathrm{x}) \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$.

А поскольку подпространство $V(\Gamma)$ включает в себя Γ^{int}, то тем самым равенство (29) доказано. Следствие доказано.

Лемма 3.4. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \dots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d \times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– многогранный конус.*

Тогда для любой грани Γ *конуса* C *множество* $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$ *является многогранным конусом, причем выполняется равенство*

$$\mathrm{inw}(C, \Gamma) = \Big\{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d : \ (\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) \geq 0 \quad j \in J_N(\Gamma)\Big\} = \mathrm{Cone}^{\perp}(N|\Gamma). \quad (30)$$

При этом вектор, направленный вовнутрь конуса C *из некоторой точки множества* Γ^{int}*, будет направлен вовнутрь* C *и из любой другой точки множества* Γ^{int}*.*

Доказательство. По определению, вектор u из R^d будет принадлежать множеству $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$ в том и только в том случае, когда для любого x из Γ^{int} существует такое $h > 0$, что элемент $\mathrm{x} + h \cdot \mathrm{u}$ принадлежит C.

Пусть x – произвольный элемент из Γ^{int}.

Тогда из формулы (27), доказанной в лемме 3.3, следует, что для любого j из $J_N(\Gamma)$ имеет место равенство $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) = 0$, а для любого индекса j, не принадлежащего $J_N(\Gamma)$, имеет место неравенство $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) > 0$.

Тогда для произвольного вектора u из R^d и произвольного $h > 0$ для любого j из $J_N(\Gamma)$ имеет место равенство $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x} + h \cdot \mathrm{u}) = h(\mathrm{n}_j, \mathrm{u})$, а для любого индекса j, не принадлежащего $J_N(\Gamma)$, имеет место равенство $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x} + h \cdot \mathrm{u}) = (\mathrm{n}_j, \mathrm{x}) + h(\mathrm{n}_j, \mathrm{u})$.

Отсюда получаем, что каков бы ни был вектор u, можно взять настолько малое положительное h, что для любого j не из $J_N(\Gamma)$ знак скалярного произведения $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x} + h \cdot \mathrm{u})$ будет совпадать со знаком $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x})$, то есть будет положительный. С другой стороны, для любого $h > 0$, если j принадлежит $J_N(\Gamma)$, то знак $(\mathrm{n}_j, \mathrm{x} + h \cdot \mathrm{u})$ будет совпадать со знаком $(\mathrm{n}_j, \mathrm{u})$.

Тогда по определению конуса C получаем, что вектор u в том и только в том случае будет направлен вовнутрь конуса C из точки x множества Γ^{int}, когда для любого j из $J_N(\Gamma)$ имеет место неравенство $(\mathrm{n}_j, \mathrm{u}) \geq 0$. Отсюда получаем равенство (30). Также отсюда получаем, что если вектор u направлен вовнутрь конуса C из некой точки множества Γ^{int}, то он будет направлен вовнутрь C и из любой другой точки множества Γ^{int}. Лемма доказана.

Следствие 3.4.1. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– конус в* R^d, Γ *– грань конуса* C *и* $M = (N|\Gamma)^T$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{|J_N(\Gamma)|\times d}$. *Тогда множества* I_M^+ *и* $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ *совпадают.*

Доказательство. По лемме 3.4 имеет место равенство $\mathrm{inw}(C, \Gamma) = \mathrm{Cone}^{\perp}(N|\Gamma)$. Но так как $M = (N|\Gamma)^T$, то это равенство можно переписать в виде

$$\mathrm{inw}(C, \Gamma) = \Big\{ \mathrm{x} \in \mathrm{R}^d : \ M\,\mathrm{x} \geq 0 \Big\}.$$

А значит, базисный вектор e^i в том и только в том случае будет направлен вовнутрь конуса C из всех элементов множества Γ^{int}, когда $M\,\mathrm{e}^i \geq 0$, то есть i-й столбец матрицы M неотрицателен.

Отсюда получаем, что множества I_M^+ и $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ совпадают. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– конус в* R^d, Γ *– грань конуса* C.

И пусть $k = |J_N(\Gamma)|$, $M = (N|\Gamma)^T$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{k\times d}$.

Тогда для конуса C *и его грани* Γ *условия* A1, A2 и A3, *сформулированные в теореме* 3.1, *попарно эквивалентны.*

Доказательство. 1. Докажем, что условия A1 и A2 эквивалентны.

Предположим, что выполняется условие A1, то есть существует открытый справа блок $\mathrm{B}(\mathrm{x}; \mathrm{y})$, экстремальные вершины которого принадлежат Γ^{int}. Тогда вектор $\mathrm{v} = \mathrm{y} - \mathrm{x}$ будет принадлежать подпространству $V(\Gamma)$ и, поскольку $\mathrm{y} > \mathrm{x}$, он будет строго положителен. Таким образом мы показали, что условие A2 следует из условия A1.

Обратно, предположим, что выполняется условие A2, то есть подпространство $V(\Gamma)$ содержит хотя бы один строго положительный вектор v.

Пусть x – произвольный элемент множества Γ^{int}. По следствию к лемме 3.3 существует такая его окрестность $O(\text{x})$, что выполняется равенство $O(\text{x}) \cap V(\Gamma) = O(\text{x}) \cap \Gamma^{\text{int}}$.

Пусть α – настолько малое положительное число, что элемент $\text{y} = \text{x} + \alpha \cdot \text{v}$ принадлежит окрестности $O(\text{x})$. Так как элементы x и v принадлежат подпространству $V(\Gamma)$, то и элемент y будет принадлежать $V(\Gamma)$, а значит, он будет принадлежать и множеству $O(\text{x}) \cap V(\Gamma) = O(\text{x}) \cap \Gamma^{\text{int}}$.

Тогда, поскольку $\text{v} > 0$, имеем $\text{y} > \text{x}$, а значит, существует открытый справа блок $\text{B}(\text{x}; \text{y})$, обе экстремальные вершины которого принадлежат Γ^{int}.

Таким образом, мы показали, что условия A1 и A2 эквивалентны.

2. Докажем, что условия A2 и A3 эквивалентны.

Определим для любого вектора v из R^d вектора v_M^+ и v_M^- из $\mathrm{R}^{|I_M^+|}$, и $\mathrm{R}^{|I_M^-|}$ соответственно, полагая $\text{v}_M^+ = (v_i,\ i \in I_M^+)$ – вектор, состоящий из всех координат вектора v из I_M^+, и $\text{v}_M^- = (v_i,\ i \in I_M^-)$ – вектор, состоящий из всех координат вектора v из I_M^-.

Очевидно, что для любого v из R^d имеет место равенство $M\,\text{v} = M^+\,\text{v}_M^+ + M^-\,\text{v}_M^-$ (аналогичный прием см. в [5, §8.2]).

Тогда из леммы 3.1 получаем

$$V(\Gamma) = \Big\{\text{x} \in \mathrm{R}^d :\ M\,\text{x} = 0\Big\} = \\ = \Big\{\text{x} \in \mathrm{R}^d :\ M^+\,\text{x}_M^+ + M^-\,\text{x}_M^- = 0\Big\}. \tag{31}$$

Предположим, что выполняется условие A2, то есть пространству $V(\Gamma)$ принадлежит строго положительный элемент x. Тогда из равенства (31) получаем $M^+\,\text{x}_M^+ + M^-\,\text{x}_M^- = 0$.

Пусть $\text{u}' = M^+\,\text{x}_M^+$, $\text{u}'' = M^-\,\text{x}_M^-$.

Поскольку $\text{x} > 0$, то по лемме 3.2 элементы u' и u'' будут принадлежать внутренним частям конусов Q^+ и Q^- соответственно.

Тогда, так как $\text{u}'' = -\text{u}'$, получаем, что внутренние части конусов Q^+ и Q^- имеют общую точку, то есть выполняется условие A3. Таким образом, мы доказали, что условие A3 следует из условия A2.

Обратно, пусть выполняется условие A3, то есть внутренние части конусов Q^+ и Q^- имеют общий элемент u.

По лемме 3.2 существуют такие строго положительные вектора w' из $\mathrm{R}^{|I^+|}$ и w'' из $\mathrm{R}^{|I^-|}$, что имеет место равенство $\text{u} =$

$(-M^+\,\mathrm{w}') = M^-\,\mathrm{w}''$. Тогда, поскольку множества индексов I^+ и I^- не пересекаются, существует такой строго положительный вектор x из R^d, что $\mathrm{x}_M^+ = \mathrm{w}'$ и $\mathrm{x}_M^- = \mathrm{w}''$. Но тогда будет выполняться соотношение $M\,\mathrm{x} = M^+\,\mathrm{x}_M^+ + M^-\,\mathrm{x}_M^- = (-\,\mathrm{u}) + \mathrm{u} = 0$, а значит, в силу равенства (31), строго положительный элемент x будет принадлежать пространству $V(\Gamma)$.

Таким образом, мы показали, что условия A2 и A3 эквивалентны. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d\times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– конус в* R^d, Γ *– грань конуса* C.

Тогда для конуса C *и его грани* Γ *при выполнении любого из условий A1, A2 и A3, сформулированных в теореме* 3.1, *условия* B1 *и* B2 *будут эквивалентны.*

Кроме того, при выполнении любого из условий A1, A2 *и* A3 *условие* B1 *будет также эквивалентно следующему условию:*

B1′) *для любого открытого справа блока* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$, *экстремальные вершины которого принадлежат* Γ^{int}, *множество* $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x};\mathrm{y}) \cap C$ *содержится в блоке* $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$.

Доказательство. 1. Докажем, что из совместного выполнения условий A1 и B1 следует выполнение условия B2.

Пусть v – вектор из $\mathrm{inw}(C,\Gamma)$, такой, что для любого i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ выполняется неравенство $v_i < 0$.

И пусть $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ – некоторый открытый справа блок, такой, что обе его экстремальные вершины принадлежат Γ^{int} и множество $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x};\mathrm{y}) \cap C$ содержится в блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x};\mathrm{y})$ (так как выполняется условие B1, то такой блок существует).

Обозначим $\mathrm{z}(\alpha) = \mathrm{y} + \alpha \cdot \mathrm{v}$.

Поскольку $\mathrm{x} < \mathrm{y}$, то существует такое малое $\alpha^* > 0$, что для элемента $\mathrm{z}(\alpha^*)$ выполняется неравенство $\mathrm{z}(\alpha^*) \geq \mathrm{x}$. Но для любого i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ имеет место неравенство $v_i < 0$, а значит, и неравенство $z_i(\alpha^*) < y_i$. Из этих неравенств получаем, что элемент $\mathrm{z}(\alpha^*)$ принадлежит множеству $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Но так как вектор v направлен вовнутрь конуса C из любой точки множества Γ^{int}, то ввиду малости числа $\alpha^* > 0$ мы можем не ограничивая общности считать, что элемент $\mathrm{z}(\alpha^*) = \mathrm{y} + \alpha^* \cdot \mathrm{v}$ принадлежит C.

Значит, $\mathrm{z}(\alpha^*)$ принадлежит множеству $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \cap C$. А поскольку это множество содержится в блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, то отсюда получаем, что элемент $\mathrm{z}(\alpha^*) = \mathrm{y} + \alpha^* \cdot \mathrm{v}$ будет меньше y, а значит, $\mathrm{v} < 0$.

Таким образом, мы показали, что если выполняются условия A1 и B1, то для любого вектора v из множества $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$ выполнение неравенства $v_i < 0$ для всех индексов i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ влечет за собой выполнение неравенства $\mathrm{v} < 0$, то есть выполняется условие B2.

2. Докажем теперь, что из совместного выполнения условий A1 и B2 следует выполнение условия B1′.

Пусть $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ – произвольный открытый справа блок, обе экстремальные вершины которого принадлежат Γ^{int} (так как выполняется условие A1, то такой блок существует).

И пусть z – произвольный элемент из множества $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cap C$. Положим $\mathrm{v} = \mathrm{z} - \mathrm{y}$.

Так как z принадлежит $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, то $\mathrm{z} \geq \mathrm{x}$ и для всех индексов i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ имеет место соотношение $z_i < y_i$. Отсюда получаем, что для всех i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ имеет место неравенство $v_i < 0$. А так как z принадлежит конусу C, то вектор v направлен вовнутрь конуса C из точки y, а значит, по лемме 3.4 вектор v будет принадлежать $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$.

Но в силу условия B2 выполнение неравенства $v_i < 0$ для всех индексов i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ влечет за собой выполнение неравенства $\mathrm{v} < 0$. Тогда $\mathrm{z} < \mathrm{y}$, и поскольку $\mathrm{z} \geq \mathrm{x}$, то элемент z будет принадлежать блоку $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

Таким образом, мы показали, что множество $\mathrm{B}_{\mathrm{In}_C(\Gamma)}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \cap C$ содержится в открытом справа блоке $\mathrm{B}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, а значит, из совместного выполнения условий A1 и B2 следует выполнение условия B1′.

Тогда, поскольку условие B1′ сильнее условия B1, при выполнении условия A1 условия B2, B1 и B1′ попарно эквивалентны.

А так как по лемме 3.5 условия A1, A2 и A3 попарно эквивалентны, то, значит, при выполнении любого из условий A1 и A2 условия B1, B1′ и B2 будут попарно эквивалентны. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Пусть* $N = (\mathrm{n}_1, \ldots, \mathrm{n}_r)$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{d \times r}$, $C = \mathrm{Cone}^{\perp}(N)$ *– конус в* R^d, Γ *– грань конуса* C.

И пусть $l = |J_N(\Gamma)|$, $M = (N|\Gamma)^T$ *– матрица из* $\mathrm{R}^{l \times d}$.

Тогда для конуса C *и его грани* Γ *при выполнении любого из условий* A1, A2 *и* A3, *сформулированных в теореме* 3.1, *условия* B2 *и*

В3 *будут эквивалентны.*

Доказательство. 1. Определим для любого вектора v из R^d вектора v_M^+ и v_M^- из $\mathrm{R}^{|I_M^+|}$ и $\mathrm{R}^{|I_M^-|}$ соответственно, полагая $\mathrm{v}_M^+ = (v_i,\ i \in I_M^+)$ – вектор, состоящий из всех координат вектора v из I_M^+, и $\mathrm{v}_M^- = (v_i,\ i \in I_M^-)$ – вектор, состоящий из всех координат вектора v из I_M^-. Очевидно, что для любого v из R^d имеет место равенство $M\,\mathrm{v} = M^+\,\mathrm{v}_M^+ + M^-\,\mathrm{v}_M^-$ (аналогичный прием см. в [5, §8.2]).

Тогда, учитывая соотношение (30), доказанное в лемме 3.4, и соотношения леммы 3.1, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}\mathrm{inw}(C,\Gamma) &= \Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^d:\ M\,\mathrm{x}\geq 0\Big\} = \\ &= \Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^d:\ M^+\,\mathrm{x}_M^+ + M^-\,\mathrm{x}_M^- \geq 0\Big\},\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}V(\Gamma) &= \Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^d:\ M\,\mathrm{x}= 0\Big\} = \\ &= \Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^d:\ M^+\,\mathrm{x}_M^+ + M^-\,\mathrm{x}_M^- = 0\Big\}.\end{aligned} \tag{33}$$

2. Докажем, что из совместного выполнения условий А3 и В3 следует условие В2.

Пусть столбцы матрицы M^- линейно независимы, а внутренняя часть конуса Q_M^- содержит множество $V(M^-)\cap K_{M+}$. И пусть v – вектор из $\mathrm{inw}(C,\Gamma)$, такой, что для всех i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ имеет место неравенство $v_i < 0$.

Так как по следствию к лемме (30) множества индексов I_M^+ и $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ совпадают, то вектор v_M^+ является строго отрицательным. Тогда у вектора $M^+\,\mathrm{v}_M^+$ все координаты неположительны, причем координаты, соответствующие ненулевым строчкам матрицы M^+, отрицательны. Отсюда следует, что элемент $M^+\,\mathrm{v}_M^+$ принадлежит множеству K_{M+}.

Ввиду того, что v принадлежит $\mathrm{inw}(C,\Gamma)$, из соотношения (32) получаем, что $M^-(-\mathrm{v}_M^-) \leq M^+\,\mathrm{v}_M^+$, а значит, элемент $\mathrm{u}^* = M^-(-\mathrm{v}_M^-)$ также принадлежит K_{M+}. Так как u^* принадлежит множеству $V(M^-)\cap K_{M+}$, то по условию В3 элемент u^* принадлежит внутренней части конуса Q_M^-.

Тогда по лемме 3.2 существует такой элемент $\mathrm{w}^* > 0$ из пространства $\mathrm{R}^{|I_M^-|}$, что $\mathrm{u}^* = M^-\,\mathrm{w}^*$.

Записав это равенство в виде $M^-(-\mathrm{v}_M^-) = M^-\mathrm{w}^*$, из линейной независимости столбцов матрицы M^- получаем, что $(-\mathrm{v}_M^-) = \mathrm{w}^*$, то есть $\mathrm{v}_M^- < 0$.

Отсюда вытекает, что $\mathrm{v}_M^+ < 0$ и $\mathrm{v}_M^- < 0$, а значит, вектор v является строго отрицательным.

Таким образом, мы доказали, что если выполняются условия A3 и B3, то выполняется и условие B2.

3. Докажем теперь, что из совместного выполнения условий A2 и B2 следует условие B3.

Докажем сначала, что столбцы матрицы M^- будут линейно независимыми.

Действительно, предположим обратное. Пусть существует такой вектор $\mathrm{w}^* \neq 0$, что имеет место равенство $M^-\mathrm{w}^* = 0$. И пусть v – произвольный строго отрицательный вектор из подпространства $V(\Gamma)$ (по условию A2 такой вектор существует).

Тогда из равенства (33) имеем $M^+\mathrm{v}_M^+ + M^-\mathrm{v}_M^- = 0$.

Но так как $M^-\mathrm{w}^* = 0$, то для любого числа α будет выполняться равенство $M^+\mathrm{v}_M^+ + M^-(\mathrm{v}_M^- + \alpha\,\mathrm{w}^*) = 0$, а поскольку вектор w^* ненулевой, то найдется такое α^*, что элемент $\mathrm{v}_M^- + \alpha^*\mathrm{w}^*$ не будет строго отрицательным.

Определим вектор u из R^d, полагая $\mathrm{u}_M^+ = \mathrm{v}_M^+$, $\mathrm{u}_M^- = \mathrm{v}_M^- + \alpha^*\mathrm{w}^*$. Тогда будет иметь место равенство $M^+\mathrm{u}_M^+ + M^-\mathrm{u}_M^- = 0$, откуда следует, что вектор u принадлежит множеству $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$.

И так как по следствию к лемме 3.4 множества I^+ и $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ совпадают, то для любого i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ будет выполняться неравенство $u_i = v_i < 0$. С другой стороны, поскольку вектор u^- не является строго отрицательным, то и вектор u не является строго отрицательным, что противоречит условию B2.

Так, предположив линейную зависимость столбцов матрицы M^-, мы пришли к противоречию.

Докажем теперь, что из выполнения условий A2 и B2 следует, что множество $V(M^-) \cap K_{M^+}$ содержится во внутренней части конуса Q_M^-.

Если множество $V(M^-) \cap K_{M^+}$ пусто, то оно, очевидно, содержится во внутренней части конуса Q_M^-. Рассмотрим теперь случай, когда это множество непусто. Пусть u – произвольный элемент из $V(M^-) \cap K_{M^+}$.

И пусть $\mathrm{z} < 0$ – произвольный строго отрицательный элемент из $\mathrm{R}^{|I_M^+|}$.

Тогда у вектора $M^+ \mathrm{z}$ все координаты будут неположительны, причем координаты, соответствующие ненулевым строчкам матрицы M^+, будут строго отрицательны. И поскольку u принадлежит K_{M^+}, то существует такое $\alpha > 0$, что будет выполняться неравенство $\alpha \cdot M^+ \mathrm{z} \geq \mathrm{u}$.

А так как u принадлежит $V(M^-)$, то существует такой вектор w из $\mathrm{R}^{|I^-_M|}$, что $\mathrm{u} = M^- \mathrm{w}$.

Определим элемент v из R^d, полагая $\mathrm{v}^+_M = \alpha \mathrm{z}$ и $\mathrm{v}^-_M = -\mathrm{w}$.

Тогда из соотношения

$$M \mathrm{v} = M^+ \mathrm{v}^+_M + M^- \mathrm{v}^-_M = \alpha \cdot M^+ \mathrm{z} - \mathrm{u} \geq 0$$

получаем, что элемент v принадлежит $\mathrm{inw}(C, \Gamma)$, а так как $\mathrm{v}^+_M < 0$, а по следствию к лемме 3.4 множества I^+ и $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ совпадают, то для любого i из $\mathrm{In}_C(\Gamma)$ будет выполняться неравенство $v_i < 0$.

Тогда из условия B2 получаем, что $\mathrm{v} < 0$, то есть вектор $\mathrm{w} = -\mathrm{v}^-_M$ будет строго положительным. Отсюда по лемме 3.2 элемент $\mathrm{u} = M^- \mathrm{w}$ принадлежит внутренней части конуса Q^-_M. В силу произвольности элемента u из $V(M^-) \cap K_{M^+}$ отсюда следует, что множество $V(M^-) \cap K_{M^+}$ содержится во внутренней части конуса Q^-_M.

Таким образом, мы доказали, что из совместного выполнения условий A2 и B2 следует выполнение условия B3. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. По определению, для того чтобы грань Γ была правильно рассекающей гранью конуса C, необходимо и достаточно совместного выполнения условия A1, сформулированного в теореме 3.1, и условия B1$'$, сформулированного в лемме 3.6.

По доказанному в леммах 3.5–3.7, условия A1, A2 и A3 попарно эквивалентны, и при выполнении любого из них условия B1, B1$'$, B2 и B3 также попарно эквивалентны.

Отсюда получаем, что для того чтобы грань Γ была гранью, правильно рассекающей блоки, достаточно, чтобы одновременно выполнялось хотя бы одно из условий A1, A2, A3 и хотя бы одно из условий B1, B2, B3; и все эти шесть условий являются также необходимыми.

Докажем теперь, что если грань Γ правильно рассекающая, то $\mathrm{In}_C(\Gamma) \geq \dim \Gamma$.

Так как $M = (N|\Gamma)^T$, то из леммы 3.1 получаем, что $V(\Gamma) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d : M\mathrm{x} = 0\}$, а значит, имеет место равенство $\dim\Gamma = \dim V(\Gamma) = d - \operatorname{rank} M$, где $\operatorname{rank} M$ – ранг матрицы M.

А поскольку грань Γ – правильно рассекающая, то выполняется условие B3, и значит, все столбцы матрицы M^- линейно независимы. И так как количество столбцов подматрицы M^- матрицы M совпадает с $|I_M^-|$, то $|I_M^-| \le \operatorname{rank} M$.

Тогда из равенства $|I_M^+| + |I_M^-| = d$ имеем $|I_M^+| = d - |I_M^-| \ge d - \operatorname{rank} M = \dim\Gamma$.

Но по следствию к лемме 3.4 $\mathrm{In}_C(\Gamma) = I_M^+$. Отсюда и получаем неравенство $|\mathrm{In}_C(\Gamma)| \ge \dim\Gamma$. Теорема 3.1 доказана.

Пример 3.1. Продемонстрируем применение теоремы 3.1 для выяснения условий, при которых граница полупространства в R^d является гранью, правильно рассекающей блоки.

Пусть n – ненулевой вектор из R^d, $P_n = \mathrm{Cone}^{\perp}(\mathrm{n})$ – полупространство с внутренней нормалью n. Полупространство P_n является частным случаем многогранного конуса. Этот конус имеет единственную грань, совпадающую с его границей $V_n = V^{\perp}(\mathrm{n})$, при этом очевидно имеют место равенства $V(V_n) = V_n$ и $V_n^{\mathrm{int}} = V_n$.

Используя условия A2 и B3 теоремы 3.1, можно доказать следующее предложение, позволяющее определить, при каких условиях $(d-1)$-мерная грань V_n конуса P_n правильно рассекает блоки.

Предложение 3.1.1. *Для того чтобы грань V_n полупространства P_n правильно рассекала блоки, необходимо и достаточно, чтобы в точности одна координата вектора* n *была отрицательна и как минимум одна координата вектора* n *была положительна.*

Пример 3.2. Продемонстрируем применение теоремы 3.1 для нахождения правильно рассекающих граней трехмерного конуса.

Пусть $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathrm{w} = (w_1, w_2, w_3)$ и $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – неотрицательные линейно независимые вектора из R^3, такие, что $u_3 = w_3 = 0$ (то есть вектора u и w лежат в плоскости $V(\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2)$), а $\mathrm{v} > 0$.

Рассмотрим выпуклый конус C, порожденный этими векторами: $C = \mathrm{Cone}(\mathrm{u}, \mathrm{w}, \mathrm{v})$.

Из геометрических соображений видно, что конус C является трехгранным конусом, расположенным в неотрицательном октанте пространства R^3. В силу линейной независимости векторов u, w и v конус C имеет три одномерных грани-ребра, равных $\Gamma_u = \mathrm{Cone}(\mathrm{u})$, $\Gamma_w = \mathrm{Cone}(\mathrm{w})$, $\Gamma_v = \mathrm{Cone}(\mathrm{v})$, и три двумерных грани $\Gamma_{uw} = \mathrm{Cone}(\mathrm{u}, \mathrm{w})$, $\Gamma_{vu} = \mathrm{Cone}(\mathrm{v}, \mathrm{u})$, $\Gamma_{vw} = \mathrm{Cone}(\mathrm{v}, \mathrm{w})$, причем грань Γ_{vw} лежит в плоскости $V(\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2)$.

Используя условия A2 и B3 теоремы 3.1, можно доказать следующее предложение, позволяющее определить, при каких условиях одномерная грань Γ_v правильно рассекает блоки.

Предложение 3.1.2. *Грань Γ_v является гранью, правильно рассекающей блоки, в том и только в том случае, когда хотя бы один из векторов* u *и* w *сонаправлен какому-нибудь из базисных векторов* e^1 *или* e^2, *а проекция вектора* v *на плоскость* $V(\mathrm{e}^1, \mathrm{e}^2)$ *лежит в конусе* $\mathrm{Cone}(\mathrm{u}, \mathrm{w})$.

4. Вычисление распределений вероятности на гранях конуса $\mathcal{M}_\Lambda$

Пусть $(\Lambda, \leq)$ – некоторое частично упорядоченное множество, R^Λ – евклидово пространство всех действительных функций на Λ, $\mathcal{M}_\Lambda$ – множество всех монотонно невозрастающих функций на Λ:

$$\mathcal{M}_\Lambda = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^\Lambda : \ \forall a, b \in \Lambda \ \ \text{если} \ \ a < b, \ \text{то} \ \ \mathrm{y}(a) \geq \mathrm{y}(b)\}. \tag{34}$$

Перенумеруем элементы множества Λ, положив $\Lambda = \{a_1, \ldots, a_d\}$.

Для удобства будем отождествлять элемент a_i из Λ с его индесом i из множества $\{1, \ldots, d\}$, тем самым мы отождествим множество Λ с множеством индексов $\{1, \ldots, d\}$.

Аналогично, поставив в соответствие функции y из R^Λ вектор $\big(\mathrm{y}(a_1), \ldots, \mathrm{y}(a_d)\big)$ из R^d, отождествим евклидовы пространства R^Λ и R^d.

Пусть E_Λ – множество всех пар индексов (i, j) из $\{1, \ldots, d\}^2$, удовлетворяющих условию $a_i < a_j$.

И пусть $\mathcal{E}_\Lambda = (\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j, \ (i, j) \in E_\Lambda)$ – матрица из $\mathrm{R}^{d \times |E_\Lambda|}$, составленная из векторов-столбцов $\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j$, $(i, j) \in E_\Lambda$, при этом порядок стобцов будем считать произвольным. Тогда соотношение (34) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Lambda &= \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^d : \ \forall (i, j) \in E_\Lambda \ \ y_i \geq y_j\} = \\ &= \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^d : \ \forall (i, j) \in E_\Lambda \ \ (\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j, \mathrm{y}) \geq 0\} = \mathrm{Cone}^\perp(\mathcal{E}_\Lambda).\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что множество $\mathcal{M}_\Lambda$ является многогранным конусом, множество определяющих векторов которого есть множество столбцов матрицы $\mathcal{E}_\Lambda$.

Определим для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ отношение эквивалентности k_Γ на множестве Λ, полагая элементы a и b эквивалентными в том и только в том случае, когда для всех x из $V(\Gamma)$ имеет место равенство $\mathrm{x}(a) = \mathrm{x}(b)$. (Поскольку это отношение удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности, оно действительно является отношением эквивалентности.)

Определим для любого подмножества A множества Λ

$$\frac{\partial^{|A|}}{\partial\, \mathrm{e}^A} \overset{df}{=} \prod_{\{i:a_i\in A\}} \frac{\partial}{\partial\, \mathrm{e}^i}, \qquad \frac{\partial^{|A|}}{\partial^+\, \mathrm{e}^A} \overset{df}{=} \prod_{\{i:a_i\in A\}} \frac{\partial}{\partial^+\, \mathrm{e}^i}.$$

Для любого подмножества A некоторого частично упорядоченного множества S под обозначением $\inf A$ будем понимать множество минимальных элементов множества A:

$$\inf A = \{a \in A : \nexists a' \in A,\ a' < a\}.$$

Определение 4.1. *Обозначим через $\mathcal{K}_\Lambda$ множество всех граней Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$, у которых для любого класса эквивалентности $\overline{a}$ отношения k_Γ мощность множества $\inf \overline{a}$ равна единице.*

Определим для любого отношения эквивалентности k на Λ множество $\mathrm{Inf}(k)$ минимальных элементов классов эквивалентности отношения k, полагая

$$\mathrm{Inf}(k) = \bigcup_{\overline{a}\in\Lambda/k} \inf \overline{a}.$$

И определим для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ действительное число $\mathrm{q}_\Lambda(\Gamma)$, полагая

$$\mathrm{q}_\Lambda(\Gamma) = \prod_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}}.$$

Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Все грани многогранного конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ являются правильно рассекающими.*

Теорема 4.2. *Пусть Λ – произвольное конечное частично упорядоченное множество, μ – мера на евклидовом пространстве R^Λ, сосредоточенная на $\mathcal{M}_\Lambda$, g_μ – инвертированная функция распределения меры μ.*

И пусть U – открытое подмножество множества R^Λ, такое, что на множестве $U \cap \mathcal{M}_\Lambda$ функция g_μ непрерывна, а во всех внутренних точках множества $U \cap \mathcal{M}_\Lambda$ существует непрерывная производная $\frac{\partial^{|\Lambda|} g_\mu}{\partial\, \mathrm{e}^\Lambda}(\mathrm{x})$, которая непрерывно продолжается вплоть до границ множества $U \cap \mathcal{M}_\Lambda$.

Тогда для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ ограничение $\mu\Big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}$ меры μ на множество $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на линейном подпространстве $V(\Gamma)$, причем имеют место следующие соотношения:

1) *если Γ не принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то $\mu\Big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}} = 0$;*

2) *если Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то на множестве $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ существует производная $\frac{\partial^{|\,\mathrm{Inf}(k_\Gamma)|} G_{\mu,\Lambda}}{\partial{+}\, \mathrm{e}^{\mathrm{Inf}(k_\Gamma)}}$ и для любого x из $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ имеет место соотношение*

$$\frac{d\mu\Big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}}(\mathrm{x}) = (-1)^{|\Lambda/k_\Gamma|}\, \mathrm{q}_\Lambda(\Gamma) \frac{\partial^{|\,\mathrm{Inf}(k_\Gamma)|} g_\mu}{\partial{+}\, \mathrm{e}^{\mathrm{Inf}(k_\Gamma)}}(\mathrm{x}). \tag{35}$$

Следствие 4.2.1. *Пусть выполняются условия теоремы 4.2.*

Тогда мера μ на множестве U представима в виде

$$\mu\Big|_U = \sum_{\Gamma\in\mathcal{K}_\Lambda} \mu\Big|_{U\cap\Gamma^{\mathrm{int}}}. \tag{36}$$

Следует заметить, что теорема 4.1 дает большое число простых примеров многогранных конусов, у которых все грани правильно рассекают блоки.

Пример 4.1. Задавая порядок на множестве $\Lambda_{\mathrm{tuft}} = \{a_1, \dots, a_d\}$ неравенствами $a_1 \le a_i$, $i = 2, \dots, d$, и полагая все элементы $a_2, \dots, a_d$ попарно несравнимыми, получаем, что у конуса $\mathcal{M}_{\Lambda_{\mathrm{tuft}}}$, определяемого неравенствами $\mathcal{M}_{\Lambda_{\mathrm{tuft}}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d \colon x_1 \ge x_j, j = 2, \dots, d\}$, все грани будут правильно рассекать блоки.

Пример 4.2. Задавая порядок на множестве $\Lambda_{\text{chain}} = \{a_1, \dots, a_d\}$ неравенствами $a_i \leq a_{i+1}$, $i = 2, \dots, d$, то есть взяв в качестве частично упорядоченного множества цепь, получаем, что у многогранного конуса $\mathcal{M}_{\Lambda_{\text{chain}}} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^d \colon x_i \geq x_{i+1},\ i = 2, \dots, d\}$ также все грани будут правильно рассекать блоки.

Доказательство теорем 4.1 и 4.2.

Для любого отношения эквивалентности k на Λ определим $E_\Lambda(k)$ как множество всех пар (i,j) из E_Λ, таких, что $a_i \overset{k}{\sim} a_j$. Положим $E_\Lambda^\perp(k) = E_\Lambda \backslash E_\Lambda(k)$.

И пусть $\mathcal{E}_\Lambda(k)$ – подматрица матрицы $\mathcal{E}_\Lambda$, состоящая из столбцов $(\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j,\ (i,j) \in E_\Lambda(k))$; аналогично, $\mathcal{E}_\Lambda^\perp(k)$ – подматрица матрицы $\mathcal{E}_\Lambda$, состоящая из столбцов $(\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j,\ (i,j) \in E_\Lambda^\perp(k))$.

Также определим подпространство $V^\perp(k)$ пространства R^Λ, полагая

$$V^\perp(k) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R}^\Lambda :\ \mathrm{x}(a_i) = \mathrm{x}(a_j)\ \forall (i,j) \in E_\Lambda(k)\}.$$

Из этого определения вытекает равенство $V^\perp(k) = V^\perp(\mathcal{E}_\Lambda(k))$.

Определение 4.2. *Определим для любого отношения эквивалентности k на Λ подмножество $\Phi(k)$, полагая*

$$\Phi(k) = \mathcal{M}_\Lambda \cap V^\perp(k) = \mathcal{M}_\Lambda \cap V^\perp(\mathcal{E}_\Lambda(k)).$$

Обозначим через $\Phi^{\text{int}}(k)$ множество всех элементов x из $\Phi(k)$, удовлетворяющих следующему условию: для любых элементов a и b из Λ, не эквивалентных по отношению k, неравенство $a < b$ влечет неравенство $\mathrm{x}(a) > \mathrm{x}(b)$.

В лемме 4.1 доказано, что для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство $\Gamma = \Phi(k_\Gamma)$.

Лемма 4.1. *Пусть Λ – произвольное конечное частично упорядоченное множество.*

Тогда для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ имеют место следующие равенства:

$$(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma) = \mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma), \qquad V(\Gamma) = V^\perp(k_\Gamma),$$
$$\Gamma = \mathcal{M}_\Lambda \cap V^\perp(k_\Gamma) = \Phi(k_\Gamma), \qquad \Gamma^{\text{int}} = \Phi^{\text{int}}(k_\Gamma).$$

Доказательство. Так как $\mathcal{M}_\Lambda = \mathrm{Cone}^\perp(\mathcal{E}_\Lambda)$, то по определению $\mathcal{E}_\Lambda$ матрица $(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)$ состоит из всех разностей $\mathrm{e}^i - \mathrm{e}^j$, таких, что

(i,j) принадлежит E_Λ и для любого x из Γ имеет место равенство $(\mathrm{e}^i-\mathrm{e}^j,\mathrm{x})=0$. Тогда из определения отношения k_Γ и множества $E_\Lambda(k_\Gamma)$ получаем

$$(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)=\Big\{\mathrm{e}^i-\mathrm{e}^j:(i,j)\in E_\Lambda(k_\Gamma)\Big\}=\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma).$$

А поскольку $V^\perp(k)=V^\perp(\mathcal{E}_\Lambda(k))$, то из леммы 3.1 вытекает, что $V(\Gamma)=V^\perp(k_\Gamma)$.

Равенство $\Gamma=\Phi(k_\Gamma)$ в свою очередь следует из определения $\Phi(k_\Gamma)$ и леммы 3.1.

И так как $(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)=\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)$, то по лемме 3.3 имеет место следующее соотношение:

$$\Gamma^{\mathrm{int}}=V^\perp(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)\cap\Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^\Lambda:\ (\mathrm{e}^i-\mathrm{e}^j,\mathrm{x})>0,\ (i,j)\in E_\Lambda\backslash E_\Lambda(k_\Gamma)\Big\}=$$
$$=V^\perp(k_\Gamma)\cap\Big\{\mathrm{x}\in\mathrm{R}^\Lambda:\ (\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b,\mathrm{x})>0,\ (a,b)\in E_\Lambda^\perp(k_\Gamma)\Big\}.$$

Тогда из определений $V^\perp(k_\Gamma)$ и $E_\Lambda^\perp(k_\Gamma)$ получаем, что для любой функции x из Γ^{int} и для любых элементов $a<b$ из Λ, если a и b эквивалентны по отношению k_Γ, то $\mathrm{x}(a)=\mathrm{x}(b)$; в противном случае $\mathrm{x}(a)>\mathrm{x}(b)$.

Отсюда получаем, что $\Gamma^{\mathrm{int}}=\Phi^{\mathrm{int}}(k_\Gamma)$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть Λ – произвольное конечное частично упорядоченное множество.*

Тогда для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место равенство $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma=\mathrm{Inf}(k_\Gamma)$.

Доказательство. Пусть Γ – некоторая грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

По определению, $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ есть множество всех тех c из Λ, что e^c принадлежит $\mathrm{inw}_\Lambda(\Gamma)$.

Пусть c – произвольный элемент из Λ.

Из лемм 3.3 и 4.1 вытекает, что $\mathrm{inw}_\Lambda(\Gamma)=\mathrm{Cone}^\perp(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)=\mathrm{Cone}^\perp\Big(\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)\Big)$; значит, элемент c принадлежит $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ в том и только в том случае, когда скалярное произведение вектора e^c на все вектора из $\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)$ неотрицательно.

По определению, $\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)$ состоит из всех векторов вида $\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b$, где $a<b$ – эквивалентные по отношению k_Γ элементы из множества Λ. Отсюда получаем, что c принадлежит $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ тогда и только тогда, когда не существует элемента a из Λ, который был бы одновременно меньше c и эквивалентен ему по отношению k_Γ.

Пусть $\overline{c}$ – класс эквивалентности отношения k_Γ, состоящий из всех элементов, эквивалентных c. Тогда c будет принадлежать $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$, если и только если c принадлежит множеству $\inf\overline{c}$.

А так как $\mathrm{Inf}(k_\Gamma) = \bigcup\limits_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \inf\overline{a}$, то, значит, c принадлежит $\inf\overline{c}$ тогда и только тогда, когда c принадлежит $\mathrm{Inf}(k_\Gamma)$. Лемма доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть Λ – произвольное конечное частично упорядоченное множество, Γ – грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$. Тогда равенство $\dim V(\Gamma) = |\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma|$ имеет место в том и только в том случае, когда Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$.*

Доказательство. По лемме 4.2 имеет место равенство

$$\mathrm{In}(\Gamma) = \mathrm{Inf}(k_\Gamma) = \bigcup_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \inf\overline{a},$$

а значит,

$$|\mathrm{In}(\Gamma)| = \sum_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} |\inf\overline{a}| \geq |\Lambda/k_\Gamma|,$$

причем равенство выполняется в том и только в том случае, когда каждый класс эквивалентности из Λ/k_Γ содержит ровно один минимальный элемент, то есть когда Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$.

С другой стороны, по лемме 4.1 $V(\Gamma) = V^\perp(k_\Gamma)$, а значит, $\dim V(\Gamma) = \dim V^\perp(k_\Gamma) = |\Lambda/k_\Gamma|$.

Отсюда получаем, что равенство $\dim V(\Gamma) = |\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma|$ выполняется в том и только в том случае, когда Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$. Следствие доказано.

Лемма 4.3. *Пусть Λ – произвольное конечное частично упорядоченное множество, Γ – грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ из множества $\mathcal{K}_\Lambda$ и $L_\Gamma = V\Big(\{\mathrm{e}^a,\ a\in \mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma\}\Big)$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{q}_\Lambda(\Gamma) = q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big). \tag{37}$$

Замечание. По следствию к лемме 4.2, если Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то $\dim V(\Gamma) = |\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma| = \dim L_\Gamma$, а значит, выражение в правой части равенства (37) имеет смысл.

Доказательство. По определению, множество векторов $\mathbf{E} = \{\mathrm{e}^a,\ a\in\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma\}$ есть ортонормированный базис линейного подпространства L_Γ.

Тогда отображение проекции $\mathrm{pr}_{L_\Gamma}\Big|_{V(\Gamma)}$ может быть определено следующим образом: для любого x из $V(\Gamma)$

$$\mathrm{pr}_{L_\Gamma}\Big|_{V(\Gamma)}\mathrm{x} = \sum_{a\in \mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma} (\mathrm{x}, \mathrm{e}^a)\,\mathrm{e}^a\,.$$

Для любого класса эквивалентности $\overline{a}$ отношения k_Γ определим вектор $\varepsilon_{\overline{a}}$ из R^Λ, полагая

$$\varepsilon_{\overline{a}} = \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}}\sum_{a\in\overline{a}} \mathrm{e}^a\,.$$

Так как классы эквивалентности не пересекаются, система векторов $\mathbf{B} = \{\varepsilon_{\overline{a}},\ \overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma\}$ является ортонормированной. А так как для любого $\overline{a}$ из Λ/k_Γ и любых элементов b и c из Λ, эквивалентных по отношению k_Γ, имеет место равенство $\varepsilon_{\overline{a}}(b) = \varepsilon_{\overline{a}}(c)$, то система векторов $\mathbf{B}$ содержится в линейном подпространстве $V^\perp(k_\Gamma)$.

Тогда, поскольку по лемме 4.1 $V(\Gamma) = V^\perp(k_\Gamma)$, из равенства $\dim V^\perp(k_\Gamma) = |\Lambda/k_\Gamma|$ вытекает, что мощность множества векторов $\mathbf{B}$ совпадает с размерностью пространства $V(\Gamma)$, а значит, $\mathbf{B}$ является ортонормированным базисом подпространства $V(\Gamma)$.

Определим для любого элемента a из $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ и любого класса эквивалентности $\overline{b}$ из Λ/k_Γ действительное число $\mathrm{j}_{a\overline{b}} = (\mathrm{e}^a, \varepsilon_{\overline{b}})$. Пусть $\mathrm{J} = \left(\mathrm{j}_{a\overline{b}}\right)$ – матрица со строками, индексированными элементами множества $\mathrm{In}(\Gamma)$, и столбцами, индексированными классами эквивалентности из Λ/k_Γ.

Тогда, так как $\mathbf{B}$ есть ортонормированный базис пространства $V(\Gamma)$, для любого x из $V(\Gamma)$ и любого a из $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$, если x разлагается по базису $\mathbf{B}$ как $\mathrm{x} = \sum\limits_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} y_{\overline{a}}\varepsilon_{\overline{b}}$, то имеет место равенство

$$\left(\mathrm{pr}_{L_\Gamma}\Big|_{V(\Gamma)}\mathrm{x},\ \mathrm{e}^a\right) = \sum_{\overline{b}\in\Lambda/k_\Gamma} y_{\overline{b}}\,(\mathrm{e}^a, \varepsilon_{\overline{b}}) = \sum_{\overline{b}\in\Lambda/k_\Gamma} y_{\overline{b}}\,\mathrm{j}_{a\overline{b}}\,. \qquad (38)$$

Ввиду того что $\mathbf{E}$ есть ортонормированный базис пространства L_Γ, из соотношения (38) следует, что J есть матрица Якоби линейного отображения $\mathrm{pr}_{L_\Gamma}\Big|_{V(\Gamma)}$, а значит, $q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big) = \Big|\det \mathrm{J}\Big|$.

Но поскольку любой элемент a принадлежит ровно одному классу эквивалентности $\overline{a}$ из Λ/k_Γ, то для любого вектора e^a из

$\mathbf{E}$ существует единственный вектор $\varepsilon_{\overline{a}}$ из $\mathbf{B}$, такой, что скалярное произведение $(\mathrm{e}^a, \varepsilon_{\overline{a}})$ не равно нулю; при этом имеет место равенство $(\mathrm{e}^a, \varepsilon_{\overline{a}}) = \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}}$.

С другой стороны, так как по лемме 4.2 $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma = \mathrm{Inf}(k_\Gamma) = \bigcup\limits_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \inf\overline{a}$, а грань Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то для любого класса эквивалентности $\overline{a}$ из Λ/k_Γ существует единственный элемент a из $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$, принадлежащий $\overline{a}$, а значит, для любого вектора $\varepsilon_{\overline{a}}$ из $\mathbf{B}$ существует единственный вектор e^a из $\mathbf{E}$, такой, что $(\mathrm{e}^a, \varepsilon_{\overline{a}}) \neq 0$.

Отсюда получаем, что в матрице J в каждой строчке и каждом столбце есть ровно один ненулевой элемент и детерминант $\det\mathrm{J}$ с точностью до знака совпадает с произведением $\prod\limits_{\overline{a}\in\Lambda/k_\Gamma} \frac{1}{\sqrt{|\overline{a}|}} = \mathrm{q}_\Lambda(\Gamma)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. По теореме 3.1 грань Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ правильно рассекает блоки в том случае, когда одновременно имеют место следующие условия:

A2) подпространство $V(\Gamma)$ содержит хотя бы одну положительную точку;

B2) для любого вектора v из $\mathrm{inw}_\Lambda(\Gamma)$ из выполнения неравенства $\mathrm{v}(a) < 0$ для всех элементов a из $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ следует неравенство $\mathrm{v} < 0$.

Пусть Γ – произвольная грань конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

Пусть z – функция из R^Λ, принимающая на всех элементах множества Λ значение 1. Поскольку $V(\Gamma) = V^\perp(k_\Gamma)$, то z будет принадлежать $V(\Gamma)$, а значит, условие A2 выполняется для произвольной грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$.

Докажем, что условие B2 также выполняется для грани Γ.

Пусть v – произвольный вектор из $\mathrm{inw}_\Lambda(\Gamma)$, такой, что для любого элемента a из множества $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda}\Gamma$ имеет место неравенство $\mathrm{v}(a) < 0$.

Поскольку v принадлежит $\mathrm{inw}_\Lambda(\Gamma)$, то по лемме 3.3 v принадлежит конусу $\mathrm{Cone}^\perp(\mathcal{E}_\Lambda|\Gamma)$, который по лемме 4.1 совпадает с конусом $\mathrm{Cone}^\perp\Big(\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)\Big)$. Тогда из определения множества $\mathcal{E}_\Lambda(k_\Gamma)$ получаем, что для любых элементов b и c, эквивалентных по отношению k_Γ, если $b < c$, то имеет место неравенство $(\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^c, \mathrm{v}) \geq 0$, то есть $\mathrm{v}(b) \geq \mathrm{v}(c)$.

Пусть a – некоторый элемент из Λ. Обозначим через $\overline{a}$ класс эквивалентности отношения k_Γ, состоящий из всех элементов, эквивалентных a. Тогда существует такой элемент a^* из $\inf \overline{a}$, что имеет место неравенство $a^* \leq a$. А значит, будет выполняться неравенство $\mathrm{v}(a^*) \geq \mathrm{v}(a)$. Но элемент a^* принадлежит множеству $\mathrm{Inf}(k_\Gamma)$, которое по лемме 4.2 совпадает с $\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma$, откуда получаем, что $\mathrm{v}(a) \leq \mathrm{v}(a^*) < 0$.

Значит, для произвольного элемента a из Λ будет выполняться неравенство $\mathrm{v}(a) < 0$.

Таким образом мы доказали, что условие B2 также выполняется для грани Γ, а значит, грань Γ правильно рассекает блоки. Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. По теореме 4.1 все грани конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ правильно рассекают блоки. Отсюда по теореме 3.1 для всех граней конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ имеет место неравенство $|\,\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma| \geq \dim V(\Gamma)$.

Кроме того, по следствию к лемме 4.2 равенство $\dim V(\Gamma) = |\,\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma|$ выполняется тогда и только тогда, когда Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$.

Тогда, поскольку мера μ_Λ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, отсюда получаем, что для любой грани Γ конуса $\mathcal{M}_\Lambda$ ограничение $\mu_\Lambda\Big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}}$ меры μ_Λ на множество $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ является абсолютно непрерывным на $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ на евклидовом пространстве $V(\Gamma)$, причем

– если Γ не принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то $\mu_\Lambda\Big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}} = 0$;

– если же Γ принадлежит $\mathcal{K}_\Lambda$, то для плотности меры $\mu_\Lambda\Big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}}$ относительно меры Лебега $\lambda_{V(\Gamma)}$ в любой точке x из $U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}$ имеет место равенство

$$\frac{d\mu_\Lambda\Big|_{U \cap \Gamma^{\mathrm{int}}}}{d\lambda_{V(\Gamma)}} = (-1)^{|\,\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma|} q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big) \frac{\partial^{|\,\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma|} g_\mu}{\partial^+ \, \mathrm{e}^{\mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma}}, \qquad (39)$$

где $L_\Gamma = V\Big(\{\mathrm{e}^a, \ a \in \mathrm{In}_{\mathcal{M}_\Lambda} \Gamma\}\Big)$.

А так как по лемме 4.3 для любой грани Γ из $\mathcal{K}_\Lambda$ имеет место равенство $\mathrm{q}_\Lambda(\Gamma) = q\Big(V(\Gamma), L_\Gamma\Big)$, то правые части равенств (39) и (35) совпадают. Теорема 4.2 доказана.

Литература

1. М. А. Антонец, И. А. Шерешевский, *Безгранично делимые распределения вероятностей на решетках.* — Алгебра и анализ **5**, вып. 6 (1993), 39–68.

2. Г. Биркгоф, *Теория решеток*. Наука, М., 1984.
3. А. Бренстед, *Введение в теорию выпуклых многогранников*. Мир, М., 1988.
4. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация*. Наука, М., 1981.
5. А. Схрейвер, *Теория линейного программирования и целочисленного линейного программирования*. Мир, М., 1991.
6. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*. Наука, М., 1987.

Beinenson L. B. Monotone nonincreasing random fields on posets. II. Probability distributions on polyhedral cones.

In this part of the paper we investigate the structure of an arbitrary measure μ concentrated on a polyhedral cone C in $\mathbf{R}^d$ in the case when the decumulative distribution function g_μ of the measure μ satisfies certain continuity conditions.

If a face Γ of the cone C satisfies appropriate conditions, the restriction $\mu|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}$ of the measure μ to the inner part of Γ is proved to be absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ_Γ on the face Γ. Besides, the density of the measure $\mu|_{\Gamma^{\mathrm{int}}}$ is expressed as a derivative of the function g_μ multipied by a constant. This result was used in the first part of the paper to find the finite-dimensional distributions of a monotone random field on a poset.

Нижегородское агентство
наукоемких технологий

Поступило 12 января 2004 г.

E-mail: Leonid BLB@nant.appl.sci-nnov.ru