Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

В. В. Нестеров

ПАРЫ КОРОТКИХ КОРНЕВЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ ШЕВАЛЛЕ ТИПА G_2

§1. Введение

Данная работа является фактически завершением серии работ, посвящённых описанию пар корневых унипотентных подгрупп в группах Шевалле. А именно, в ней для группы Шевалле типа G_2 при характеристике основного поля отличной от 2-х описаны подгруппы, порождённые парами коротких корневых унипотентных подгрупп, и классифицированы орбиты группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на таких парах.

Большинство результатов работы остаётся справедливым и при характеристике поля, равной 2. Однако в некоторых случаях для выяснения структуры подгруппы требуются более тонкие вычисления, которые будут проведены в дальнейшем.

Впервые подобное описание для пар длинных корневых подгрупп появилось в работе [7]. Затем оно было передоказано в работах [9, 11]. Это описание играло решающую роль в изучении подгрупп, порождённых длинными корневыми подгруппами и элементами (см., например, [8, 11]).

Используя разложение Брюа длинного и короткого корневого элемента, Н. А. Вавилов передоказал классификацию для пар длинных корневых подгрупп (см. [1]) и получил описание пар, состоящих из длинной и короткой корневых подгрупп в группах Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 (см. [2]).

Развивая эти идеи, автор в работе [5] классифицировал пары коротких корневых подгрупп в группах Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ, F_4. Далее, в работе [6] им было получено описание пар, состоящих из длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2.

Для коротких корневых подгрупп результаты получались гораздо сложнее. Основная причина этого состоит в том, что короткая корневая подгруппа (в отличие от длинной) не лежит в центре унипотентного радикала U борелевской подгруппы, и поэтому сопряжения элементами U приводят к более сложным конфигурациям корней.

Так, любая пара длинных корневых унипотентных подгрупп (X_1, X_2) сопряжена паре элементарных длинных корневых подгрупп вида (X_α, X_β). Орбиты группы Шевалле G на таких парах, в сущности, определяются одним углом между α и β, так что существует пять возможных конфигураций, некоторые из которых могут дать две или три орбиты.

В случае длинной и короткой корневых подгрупп, вообще говоря, существует 6 возможных конфигураций для групп типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 и 5 конфигураций для группы типа G_2. Орбиты группы G на таких парах уже определяются либо одним углом между длинным и коротким корнем, либо двумя углами между длинным корнем и некоторой парой корней, состоящей либо из длинных корней, либо из длинного и короткого корня.

Для пар коротких корневых подгрупп получается: для группы типа $\mathrm{B}_\ell - 12$ возможных конфигураций, для группы типа $\mathrm{C}_\ell - 16$, для случая $\mathrm{F}_4 - 21$, и, как доказано в этой работе, для группы типа $G_2 - 10$. Причём некоторые конфигурации распадаются в бесконечное число орбит (для бесконечного поля), параметризованных непрерывным параметром. Взаимное расположение двух коротких корневых подгрупп определяется уже двумя, тремя, четырьмя и в двух случаях пятью корнями.

В случае характеристики 2 для групп Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 и характеристики 3 для групп Шевалле типа G_2 пары длинных и коротких корневых подгрупп ведут себя одинаковым образом.

Достаточно глубоко ознакомиться с результатами и проблематикой по вопросам порождений в группах Шевалле можно по обзорам [3, 4, 12].

§2. Формулировка результатов

Все необходимые понятия и стандартные обозначения были введены в предшествующей работе автора [6]. Здесь мы их повторять не будем. Введём только наши обозначения.

В данной работе мы имеем дело с группой Шевалле $G = G(\mathrm{G}_2, K)$ типа G_2 над полем K. Система корней типа G_2 имеет следующий вид:

$$\mathrm{G}_2 = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}$$

где α, β – фундаментальные корни, причём α короткий, а β длинный, $\delta = 3\alpha + 2\beta$ – максимальный (длинный) корень, $\rho = 2\alpha + \beta$ – максимальный короткий корень.

Для корней, строго больших, чем ρ, также будем использовать обозначение $\rho_2 = 3\alpha + \beta$, $\rho_3 = \delta = 3\alpha + 2\beta$.

Множество положительных корней будем обозначать через Φ^+, отрицательных через – Φ^-.

Подгруппа X называется длинной корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_δ, и короткой корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_ρ. Элементы X называются длинными или короткими корневыми унипотентными элементами, соответственно. Слово "унипотентный" мы всегда будем опускать.

Для подгруппы $X \leqslant G(\Phi, K)$ мы обозначаем через $\Lambda(X, K)$ и $\Omega(X, K)$ множества коротких и длинных корневых подгрупп, соответственно, содержащихся в X.

Как обычно, $|A|$ обозначает мощность множества A, $X \sim Y$ означает, что подгруппы X и Y сопряжены в G, а обозначения $X_1 \times X_2$ и $[X_1, X_2]$ отвечают за прямое произведение и взаимный коммутант групп X_1 и X_2, соответственно.

В наших вычислениях мы используем матричное представление группы типа G_2 как подгруппы $\Omega(7, K)$ (см. [6, 10]).

В этом представлении коммутационные формулы Шевалле принимают следующий вид:

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(ts)x_{2\alpha+\beta}(2t^2s)x_{3\alpha+\beta}(-t^3s)x_{3\alpha+2\beta}(2t^3s^2),$$

$$[x_\alpha(t), x_{\alpha+\beta}(s)] = x_{2\alpha+\beta}(-2ts)x_{3\alpha+\beta}(-3t^2s)x_{3\alpha+2\beta}(-3ts^2),$$

$$[x_\alpha(t), x_{2\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+\beta}(3ts),$$

$$[x_\beta(t), x_{3\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+2\beta}(-ts),$$

$$[x_{\alpha+\beta}(t), x_{2\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+2\beta}(3ts).$$

Множество корней $S \subset \Phi$ называется замкнутым, если из того, что α, $\beta \in S$ и $\alpha + \beta \in \Phi$ следует, что $\alpha + \beta \in S$. Для замкнутого множества корней S положим $E(S) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$. Как известно $E(S) = E(S^r)E(S^u)$, полупрямое произведение редуктивной и унипотентной подгрупп $E(S)$, где $S^r = \{\alpha \in S \mid -\alpha \in S\}$, $S^u = \{\alpha \in S \mid -\alpha \notin S\}$. Если S^r состоит только из двух корней, скажем γ и $-\gamma$, мы имеем изоморфизм $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2(K)$ (группа односвязна). В этом случае для короткого корня γ мы будем писать $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2^{\rho}(K)$, для длинного корня γ мы будем писать $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2^{\delta}(K)$. Ясно, что эти группы не сопряжены.

Если в системе корней Φ существуют корни двух длин, а в системе корней Δ корни только одной длины, то Δ может быть вложена в Φ двумя принципиально различными способами: на длинные корни и на короткие корни. С целью различить эти случаи мы пишем $\tilde{\Delta} \subset \Phi$ для вложения на короткие корни и $\Delta \subset \Phi$ для вложения на длинные.

Для поля K через $\overline{K}$ обозначим его алгебраическое замыкание.

Наконец, обозначения (LS1), (LS2) соответствуют случаям работы [6], теорема 1, взаимного расположения пары подгрупп, состоящей из длинной и короткой корневых подгрупп.

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть X_1, X_2 – две различные короткие корневые подгруппы в группе Шевалле $G(G_2, K)$. Предположим, что $\operatorname{char} K \neq 3$ и $\operatorname{char} K \neq 2$. Тогда*

1) *X_1 и X_2 порождают группу, изоморфную одной из групп (S1)–(S10) перечисленных ниже;*
2) *пары (X_1, X_2), принадлежащие к различным случаям, не сопряжены в G и число орбит под действием сопряжением G на парах одного и того же случая равно d (мы опускаем $d = 1$).*

(S1) $\langle X_1, X_2\rangle = X_1 \times X_2$, $|\Lambda| = |K|$, $|\Omega| = 1$;

(S2) $\langle X_1, X_2\rangle = X_1 \times X_2$, $2 \leqslant |\Lambda| \leqslant 4$, $|\Omega| = 0$;

(S3) $\langle X_1, X_2\rangle = X_1X_2Z$, $Z = [X_1, X_2] \in \Omega$, $|K|+1 \leqslant |\Lambda| \leqslant 3|K|+1$, $|\Omega| = 1$, (X_1, Z) *как в* (LS1), (X_2, Z) *как в* (LS2), $d = |K| - 1$;

(S4) $\langle X_1, X_2\rangle = X_1X_2Z$, $Z = [X_1, X_2] \in \Omega$, $|\Lambda| = 2|K|$, $|\Omega| = 1$, (X_i, Z) *как в* (LS1), $i = 1, 2$;

(S5) $\langle X, Y\rangle \simeq E(\Phi^+ \setminus \{\beta\})$, $d = 2$;

(S6) $\langle X_1, X_2\rangle = U(\mathrm{G}_2, K)$, $d = 2$;

(S7) $\langle X_1, X_2\rangle = \mathrm{SL}_2(K)$;

(S8) $\langle X, Y\rangle \simeq \mathrm{SL}_2^{\rho}(K)E(\Phi^+)$, $d = 2$;

(S9) $\langle X, Y\rangle \simeq \mathrm{SL}_2^{\delta}(K)E(S)$, *где* $S = \{-\beta, \alpha, 3\alpha+\beta\}$;

(S10) $\langle X_1, X_2\rangle = \mathrm{G}_2(\overline{K})$, $d = |K|-1$.

Когда $\operatorname{char} K = 3$ описание выглядит значительно проще.

Теорема 2. *При тех же предположениях, что и в теореме* 1, *но* $\operatorname{char} K = 3$, *имеем следующие случаи:*

(T1) $\langle X_1, X_2\rangle = X_1 \times X_2$, $|\Lambda| = |K|+1$, $|\Omega| = 0$;

(T2) $\langle X_1, X_2\rangle \simeq U(\widetilde{A}_2, K)$;

(T3) $\langle X_1, X_2\rangle = \mathrm{SL}_2(K)$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству этих теорем.

§3. Конфигурации корней

На протяжении всей работы мы имеем дело только с группой Шевалле G типа G_2, не оговаривая это в дальнейшем.

Отправным результатом для наших рассуждений является следующая лемма, доказанная в работе [6].

Лемма 1. *Пусть* $gX_\rho g^{-1}$ – *короткая корневая подгруппа. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

a) *существуют такие* $u \in U$, *короткий корень* γ *и* $\varepsilon \in K^*$, *что*

$$gx_\rho(t)g^{-1} = ux_\gamma(t\varepsilon)u^{-1}, \quad t \in K.$$

b) $\operatorname{char} K \neq 3$, *существуют такие* $u \in U$, s, $r \in K$, *короткий корень* σ *и длинный корень* λ, *которые образуют угол* $\pi/6$, *причём* $\sigma > \lambda$, *что*

$$gx_\rho(t)g^{-1} = ux_\sigma(st)x_\lambda(rt)u^{-1}, \quad t \in K.$$

Эта лемма позволяет получить следующий ключевой результат.

Лемма 2. *Пусть* X_1, X_2 – *короткие корневые подгруппы в* G. *Предположим, что* $\operatorname{char} K \neq 3$. *Тогда существует* $g \in G$ *такой, что*

$$gX_1g^{-1} = \{x_\rho(t)x_{\rho_2}(c_2t)x_{\rho_3}(c_3t),\ t \in K\},$$

и выполняется одно из следующих утверждений:

$$a)\quad gX_2g^{-1} = X_\gamma,$$

$$b)\quad gX_2g^{-1} = X_{\sigma,\lambda} = \{x_\sigma(s)x_\lambda(s),\ s \in K\},$$

где γ, λ, σ *такие же, как в лемме* 1, $c_2, c_3 \in K$ *зависят только от* X_1 *и* X_2.

Если $\operatorname{char} K = 3$, *имеем* $gX_1g^{-1} = X_\rho$, $gX_2g^{-1} = X_\gamma$.

Доказательство. Пусть $z \in G$ такой, что $zX_1z^{-1} = X_\rho$. Тогда по лемме 1 выберем $u \in U$ так, чтобы $u^{-1}zX_1z^{-1}u$ совпало либо с X_γ, либо с $\{x_\sigma(s)x_\lambda(s),\ s \in K\}$, $k \in K^*$. В первом случае положим $g = u^{-1}z$, во втором $g = h_\tau(k^{-1})u^{-1}z$. Корень τ следует выбрать так, чтобы $\angle(\sigma,\tau) = \pi/2$, а $\angle(\lambda,\tau) = \pi/3$.

Остаётся только заметить, что $uX_\rho u^{-1} = \{x_\rho(t)x_{\rho_2}(c_2t)x_{\rho_3}(c_3t),\ t \in K\}$ и при $\operatorname{char} K = 3$ c_2, $c_3 = 0$. Лемма доказана.

Для каждой пары коротких корневых подгрупп (X_1, X_2) обозначим через R_J множество корней ρ_i, которые соответствуют неединичным элементам $x_{\rho_2}(c_2t)$, $x_{\rho_3}(c_3t)$ в представлении gX_1g^{-1} в лемме 2 и через $J \subset \{2,3\}$ множество индексов i при ненулевых коэффициентах c_i. Тогда

$$X_{\rho,J} = \{x_\rho(t)x_{\rho_2}(c_2t)x_{\rho_3}(c_3t),\ t \in K\}.$$

Если множество $R_J \neq \emptyset$, мы всегда будем считать, что $\rho_3 = \delta \in R_J$. Действительно, это можно делать, так как $w_\beta\rho = \rho$ и $w_\beta\rho_2 = \rho_3$.

Случай I. $gX_1g^{-1} = X_{\rho,J}, gX_2g^{-1} = X_\gamma$.

Предположим вначале, что $R_J = \emptyset$, т.е. $gX_1g^{-1} = X_\rho$. Заметим сразу, что этот случай реализуется для поля произвольной характеристики. В то время, как все остальные – для поля $\operatorname{char} K \neq 3$.

Пусть $\theta = \angle(\rho,\gamma)$, угол между корнями ρ и γ. Тогда возможности для γ приведены в таблице 1 ниже.

Таблица 1

	(θ)	γ
1	0	$2\alpha+\beta$
2	$\pi/3$	$\alpha,\ \alpha+\beta$
3	$2\pi/3$	$-\alpha,\ -\alpha-\beta$
4	π	$-2\alpha-\beta$

Пусть теперь $R_J \neq \emptyset$. Положим $\theta = \angle(\rho, \gamma)$ и $\psi = \angle(\delta, \gamma)$. Возможные корни γ и соответствующие максимально возможные множества R_J приведены в таблице 2.

Таблица 2

	(θ, ψ)	γ	R_J
5	$(0, \pi/6)$	$2\alpha + \beta$	$\rho_2,\ \rho_3$
6	$(\pi/3, \pi/6)$	$\alpha + \beta$	ρ_3
7	$(\pi/3, \pi/2)$	α	$\rho_2,\ \rho_3$
8	$(2\pi/3, \pi/2)$	$-\alpha$	ρ_3
9	$(2\pi/3, 5\pi/6)$	$-\alpha - \beta$	$\rho_2,\ \rho_3$
10	$(\pi, 5\pi/6)$	$-2\alpha - \beta$	$\rho_2,\ \rho_3$

Случай II. $gX_1g^{-1} = X_{\rho,J}$, $gX_2g^{-1} = X_{\sigma,\lambda}$.

Предположим вначале, что $R_J = \emptyset$. Тогда возможные корни (σ, λ) определяются углами (θ_1, θ_2), где $\theta_1 = \angle(\rho, \sigma)$ и $\theta_2 = \angle(\rho, \lambda)$.

Таблица 3

	(θ_1, θ_2)	$(\sigma,\ \lambda)$
11	$(\pi/3, \pi/2)$	$(\alpha, -\beta)$, $(\alpha + \beta, \beta)$
12	$(2\pi/3, 5\pi/6)$	$(-\alpha - \beta, -3\alpha - 2\beta)$, $(-\alpha, -3\alpha - \beta)$
13	$(\pi, 5\pi/6)$	$(-2\alpha - \beta, -3\alpha - 2\beta)$, $(-2\alpha - \beta, -3\alpha - \beta)$

Когда $R_J \neq \emptyset$, дополнительно к (θ_1, θ_2) введём обозначение $(\psi_1, \psi_2) = (\angle(\delta, \sigma), \angle(\delta, \lambda))$.

Возможные корни $(\sigma,\ \lambda)$ и соответствующие им максимально возможные множества R_J собраны в следующей таблице.

Таблица 4

	$(\theta_1,\theta_2),\ (\psi_1,\psi_2)$	$(\sigma,\ \lambda)$	R_J
14	$(\pi/3,\pi/2),(\pi/6,\pi/3)$	$(\alpha+\beta,\beta)$	ρ_3
15	$(\pi/3,\pi/2),(\pi/2,2\pi/3)$	$(\alpha,-\beta)$	$\rho_2,\ \rho_3$
16	$(2\pi/3,5\pi/6),(\pi/2,2\pi/3)$	$(-\alpha,-3\alpha-\beta)$	ρ_3
17	$(2\pi/3,5\pi/6),(5\pi/6,\pi)$	$(-\alpha-\beta,-3\alpha-2\beta)$	$\rho_2,\ \rho_3$
18	$(\pi,5\pi/6),(5\pi/6,2\pi/3)$	$(-2\alpha-\beta,-3\alpha-\beta)$	ρ_3
19	$(\pi,5\pi/6),(5\pi/6,\pi)$	$(-2\alpha-\beta,-3\alpha-2\beta)$	$\rho_2,\ \rho_3$

§4. Представители орбит

Используя данные таблиц 1–4, мы в этом параграфе построим список пар (X_1,X_2), содержащий представителей каждой орбиты группы G, действующей сопряжением на данных подгруппах.

Лемма 3. *Пусть X_1, X_2 – короткие корневые подгруппы в группе G. Тогда существует $f\in G$ такой, что $fX_2f^{-1}=X_\gamma$ или $X_{\sigma,\lambda}$ и верно одно из следующих утверждений*

(1) $fX_1f^{-1}=X_\rho$,
(2) $fX_1f^{-1}=X_{\rho,c}=\{x_\rho(t)x_\delta(ct),\ t\in K\}$.

Доказательство. В силу леммы 2 имеем: $gX_1g^{-1}=X_{\rho,J}$ и $gX_2g^{-1}=X_\gamma$ или $X_{\sigma,\lambda}$ для некоторого $g\in G$. В вариантах 1–4, 11–13 $J=\emptyset$, поэтому $f=g$.

Предположим, что $J\neq\emptyset$. Тогда элемент f будет иметь вид $f=x_\tau(k_\tau)g$, где $\tau\in\Phi$, $k_\tau\in K^*$. Причём корень τ будем выбирать так, чтобы $\tau+\gamma$ или $\tau+\sigma$ и $\tau+\lambda$ не были бы корнями. Тогда, подбирая такого вида корни τ и соответствующие $k_\tau\in K^*$, можно сопряжением "уничтожить" некоторые $x_{\rho_i}(c_it)$ в $X_{\rho,J}$, оставляя инвариантными X_γ или $X_{\sigma,\lambda}$.

В вариантах 6 и 14 положим $\tau=\alpha+\beta$ и $k_\tau=\pm\frac{1}{3}c_i$, получаем (1).

В вариантах 5, 7, 9, 10, 15, 17, 19 положим $\tau=\beta$ и $k_\tau=\pm c_i$, получаем (2).

В вариантах 8, 16, 18 R_J состоит из единственного корня δ, сразу получаем (2). Лемма доказана.

Таким образом, каждому варианту N, $1 \leq N \leq 19$, соответствует одна из четырёх пар множеств корней, называемая в дальнейшем его *копией*. А именно:

вариант	копия
1, 2, 3, 4, 6	$(\{\rho\}, \{\gamma\})$
5, 7 – 10	$(\{\rho, \rho_i\}, \{\gamma\})$
11 – 14	$(\{\rho\}, \{\sigma, \lambda\})$
15 – 19	$(\{\rho, \rho_i\}, \{\sigma, \lambda\})$

.

Следующая лемма показывает, что вариант определяет свою копию однозначно.

Лемма 4. *Копии каждого варианта сопряжены элементом группы Вейля.*

Доказательство. Во всех случаях этим элементом будет w_β.

Из этой леммы следует, что варианты 2 и 6 и варианты 11 и 14 имеют одинаковые с точностью до сопряжённости копии и поэтому их можно отождествить.

Лемма 5. *Пусть* X_1, X_2 *– короткие корневые подгруппы. Тогда, исключая варианты* 15 *и* 19 *существует элемент* $g \in G$ *такой, что*

$$gX_1g^{-1} = X_\rho \quad \textit{или} \quad X_{\rho,\delta} = \{x_\rho(t)x_\delta(t)\},$$

$$gX_2g^{-1} = X_\gamma \quad \textit{или} \quad X_{\sigma,\lambda} = \{x_\sigma(s)x_\lambda(s)\}.$$

Доказательство. В случае вариантов 5, 7–10, 16, 17 положим $\tau = \beta$, а в варианте 18 $\tau = 3\alpha + 2\beta$. Тогда

$$h_\tau(c^{-1})\{x_\rho(t)x_\delta(ct)\}h_\tau^{-1}(c^{-1}) = \{x_\rho(t)x_\delta(t)\}.$$

При этом $hX_\gamma h^{-1} = X_\gamma$ и $hX_{\sigma,\lambda}h^{-1} = X_{\sigma,\lambda}$.

Таблица 5

случай	варианты	представители	
(S1)	5	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{2\alpha+\beta}\}$
(S2)	7,11,14	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}(3)\}$	$\{x_{\alpha}x_{-\beta}\}$
(S3)	15	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}(c)\}$, $c \neq 3$	$\{x_{\alpha}x_{-\beta}\}$
$(S4)^*$	2,6	$\{x_{2\alpha+\beta}\}$	$\{x_{\alpha}\}$
$(S5)_1^*$	3	$\{x_{2\alpha+\beta}\}$	$\{x_{-\alpha}\}$
$(S5)_2$	8	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-\alpha}\}$
$(S6)_1$	9,12	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-\alpha-\beta}\}$
$(S6)_2$	16	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-\alpha}x_{-3\alpha-\beta}\}$
$(S7)^*$	4	$\{x_{2\alpha+\beta}\}$	$\{x_{-2\alpha-\beta}\}$
$(S8)_1$	10,13	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-2\alpha-\beta}\}$
$(S8)_2$	18	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-2\alpha-\beta}x_{-3\alpha-\beta}\}$
(S9)	17	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-\alpha-\beta}x_{-3\alpha-2\beta}\}$
(S10)	19	$\{x_{2\alpha+\beta}x_{3\alpha+2\beta}(c)\}$, $c \neq 0$	$\{x_{-2\alpha-\beta}x_{-3\alpha-2\beta}\}$

Лемма 6. *Пары подгрупп, принадлежащие к вариантам 7 и 11 (14), 9 и 12, 10 и 13 сопряжены в G.*

Доказательство. Вариантам 7, 9, 10 отвечают пары подгрупп вида $(X_{\rho,\delta}, X_\gamma)$, где γ – один из корней α, $-\alpha-\beta$, $-2\alpha-\beta$ соответственно.

Вариантам 11, 12, 13 отвечают пары подгрупп вида $(X_\rho, X_{\sigma,\lambda})$, где (σ,λ) – одна из пар $(\alpha,-\beta)$, $(-\alpha-\beta,-3\alpha-2\beta)$, $(-2\alpha-\beta,-3\alpha-2\beta)$ соответственно.

Для каждой пары вариантов укажем такой $w \in W$, что

$$wX_{\rho,\delta}w^{-1} = X_{\sigma,\lambda} \quad \text{и} \quad wX_\gamma w^{-1} = X_\rho.$$

Действительно, в вариантах 7 и 11 $w = w_{\alpha+\beta}$, в вариантах 9 и 12 $w = w_{3\alpha+2\beta}$, в вариантах 10 и 13 $w = w_{2\alpha+\beta}w_\beta$. Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии явно перечислить представители орбит для каждого случая теорем 1, 2. Ими будут пары подгрупп, принадлежащие к вариантам, не отождествлённым леммами 3–6. Для каждого варианта выберем по нашему произволу корни γ и (σ, λ) из таблиц 1–4, положим $x_\tau = x_\tau(t)$ и $x_\tau(c) = x_\tau(ct)$ и соберём представители в таблице 5.

Большинство случаев возникает для поля характеристики отличной от 3-х. Случаи, которые возникают для произвольного поля, мы в дальнейшем будем помечать $*$.

Случаи, перечисленные в таблице 5, в точности соответствуют случаям теоремы 1. В том, что последует, мы докажем, что все пары различных случаев не сопряжены. В случаях (S3), $c \neq 3$, и (S10), $c \neq 0$ орбиты пар подгрупп параметризуются элементом поля c так, что каждому c соответствует в точности одна орбита.

§5. Структура порождений

В §5 мы изучаем подгруппы, порожденные каждой парой коротких корневых подгрупп, предполагая, что характеристика поля отлична от 2-х и 3-х. Именно, мы определяем, чему такие подгруппы изоморфны, и подсчитываем число корневых подгрупп, в них содержащихся. Ясно, что из различной структуры подгрупп следует несопряженность пар, которые порождают данные подгруппы. Случаи, когда подгруппы, порожденные парой коротких корневых подгрупп, имеют одинаковое описание, в смысле §5, рассматриваются в §6.

Для каждого представителя орбиты (X_1, X_2), перечисленного в таблице 5, обозначим через $X = \langle X_1, X_2 \rangle$ подгруппу, порождённую парой (X_1, X_2). Подсчитывая корневые подгруппы, содержащиеся в X, во всех нетривиальных случаях нам придется работать внутри унипотентного радикала $U(\mathrm{G}_2, K)$. С этой целью выпишем всевозможные корневые элементы, содержащиеся в $U(\mathrm{G}_2, K)$.

Напомним, что в $U(\mathrm{G}_2, K)$ любой длинный корневой элемент имеет вид $ux_\mu(t)u^{-1}$, где μ – длинный положительный корень (см. [1]), любой короткий корневой элемент совпадает либо с $ux_\gamma(t)u^{-1}$, либо с $ux_\lambda(t)x_\sigma(kt)u^{-1}$, где γ, σ и λ имеют тот же смысл, что и в лемме 1, и являются положительными.

Для $u = x_\alpha(c_1)x_\beta(c_2)x_{\alpha+\beta}(c_3)x_{2\alpha+\beta}(c_4)x_{3\alpha+\beta}(c_5)x_{3\alpha+2\beta}(c_6)$, $c_i \in K$, получаем, что длинные корневые элементы в $U(\mathrm{G}_2, K)$ имеют следующий вид:

$$x_{3\alpha+2\beta}(t), \tag{1}$$
$$x_{3\alpha+\beta}(t)x_{3\alpha+2\beta}(-c_4t), \tag{2}$$
$$x_\beta(t)x_{\alpha+\beta}(c_1t)x_{2\alpha+\beta}(-c_1^2t)x_{3\alpha+\beta}(-c_1^3t)x_{3\alpha+2\beta}(c_5t). \tag{3}$$

Короткие корневые элементы в $U(\mathrm{G}_2, K)$ устроены таким образом:

$$x_\alpha(t)x_{\alpha+\beta}(-c_4t)x_{2\alpha+\beta}(2c_2t+2c_1c_4t)x_{3\alpha+\beta}(f_1)x_{3\alpha+2\beta}(f_2), \tag{4}$$
$$x_{\alpha+\beta}(t)x_{2\alpha+\beta}(-2c_1t)x_{3\alpha+\beta}(-3c_1^2t), \tag{5}$$
$$x_{2\alpha+\beta}(t)x_{3\alpha+\beta}(3c_1t)x_{3\alpha+2\beta}(3c_2t), \tag{6}$$
$$x_\beta(kt)x_{\alpha+\beta}((c_1k+1)t)x_{2\alpha+\beta}(-(c_1^2k+2c_1)t)\times$$
$$x_{3\alpha+\beta}(-(c_1^3k+3c_1^2)t)x_{3\alpha+2\beta}(f_3), \tag{7}$$

где

$$f_1 = f_1(t) = -3c_3t + 6c_1c_2t + 3c_1^2c_4t - 3c_2t^2 - 3c_1c_4t^2 + c_4t^3,$$
$$f_2 = f_2(t) = 3c_3c_4t + 3c_2^2t + 3c_2c_4t^2 + 3c_1c_4^2t^2 - 2c_4t^3,$$
$$f_3 = f_3(t) = -3c_3t + c_5kt + 3c_1t^2 + k^2c_1^3t^2 + 3c_1^2kt^2.$$

Рассмотрим теперь последовательно каждый случай.

(S1). Здесь $X = \langle x_\rho(t)x_\delta(t), x_\rho(s)\rangle = X_1 \times X_2$. Однопараметрическая подгруппа $\{x_\rho(kt)x_\delta(t)\}$ является короткой корневой подгруппой при $k \neq 0$ и длинной корневой при $k = 0$.

(S2), (S3). Для произвольного $c \in K$ имеем:

$$X = \langle x_{2\alpha+\beta}(t)x_{3\alpha+2\beta}(ct), x_\alpha(s)x_{-\beta}(s)\rangle.$$

Так как

$$[x_{2\alpha+\beta}(t)x_{3\alpha+2\beta}(ct), x_\alpha(s)x_{-\beta}(s)] = x_{3\alpha+\beta}((c-3)ts),$$

то при $c = 3$ подгруппы коммутируют (случай (S2)), при $c \neq 3$ их коммутант совпадает с длинной корневой подгруппой (случай (S3)).

Поскольку корневые подгруппы являются (аддитивными) однопараметрическими подгруппами, мы рассмотрим вид произвольной однопараметрической подгруппы и сравним его с видами корневых подгрупп в $U(\mathrm{G}_2, K)$ (см. начало §5).

Вместо группы X рассмотрим сопряжённую ей подгруппу

$$\langle x_{\alpha+\beta}(t)x_\beta(ct), x_{2\alpha+\beta}(s)x_{3\alpha+\beta}(s)\rangle \subset U(G_2, K).$$

Однопараметрическими подгруппами последней будут подгруппы следующего вида

$$\left\{x_{\alpha+\beta}(at)x_\beta(act)x_{2\alpha+\beta}(bt)x_{3\alpha+\beta}(bt)x_{3\alpha+2\beta}(kt+\frac{1}{2}abct^2-\frac{3}{2}abt^2)\right\},$$

где a, b – произвольные элементы поля и $k=0$, $c=3$ для случая (S2), k – произвольный, $c\neq 3$ для случая (S3).

Вычисления приводят к следующему результату: если $k=0$ и либо $a=0$, $b\neq 0$, либо $b=0$, $a\neq 0$, получаем 2 короткие корневые подгруппы, если $a,b=0$, $k\neq 0$ – длинную корневую подгруппу $X_{3\alpha+2\beta}$ в случае (S3), если $a=0$, $b,k\neq 0$ получаем $|K|-1$ коротких корневых подгрупп в случае (S3), если $b=0$, a, $k\neq 0$ однопараметрическая подгруппа не является корневой. Если $k=0$, a, $b\neq 0$, то, приравнивая коэффициенты при соответствующих унипотентах рассматриваемой подгруппы и подгруппы (7), приходим к квадратному уравнению, в случае разрешимости которого получаем одну или две короткие корневые подгруппы в случаях (S2) и (S3). Наконец, если a, b, $k\neq 0$, подобным образом в зависимости от разрешимости квадратного уравнения получаем, меняя параметр k, ещё 0 или $(|K|-1)$ или $2(|K|-1)$ коротких корневых подгрупп в случае (S3).

(S4)*.

$$X=\langle x_{2\alpha+\beta}(t), x_\alpha(s)\rangle = X_1X_2Z,$$

где $Z=[X_{2\alpha+\beta}, X_\alpha]=X_{3\alpha+\beta}$.

Пары $(X_{2\alpha+\beta}, X_{3\alpha+\beta})$ и $(X_\alpha, X_{3\alpha+\beta})$ сопряжены и принадлежат случаю (LS1). Однопараметрическими подгруппами являются подгруппы вида

$$\left\{x_\alpha(at)x_{2\alpha+\beta}(bt)x_{3\alpha+\beta}(kt-\frac{3}{2}abt^2)\right\},$$

где a, b, k – произвольные элементы поля.

Сравнивая данную подгруппу с корневыми подгруппами в $U(\mathrm{G}_2, K)$ (см. начало §5), получаем: если $k=0$ и либо $a=0$, $b\neq 0$, либо $b=0$, $a\neq 0$, получаем 2 короткие корневые подгруппы $X_{2\alpha+\beta}$ и X_α, если a, $b=0$, $k\neq 0$ – длинную корневую подгруппу $X_{3\alpha+\beta}$, если $k \neq 0$ и либо $a = 0$, $b \neq 0$, либо $b = 0$, $a \neq 0$, получаем $2(|K| - 1)$ коротких корневых подгрупп. Если $a, b \neq 0$, k – произвольный элемент поля, данная подгруппа не является корневой.

(S5). Здесь

$$X = \langle x_\rho(t)x_\delta(\varepsilon t), x_{-\alpha}(s)\rangle,$$

где $\varepsilon = 0$ или 1 для $(S5)_1^*$ и $(S5)_2$, соответственно.

Вычислим следующие коммутаторы

$$[x_\rho(t)x_\delta(\varepsilon t), x_{-\alpha}(s)] = x_{\alpha+\beta}(2ts)x_\beta(-3ts^2)x_{3\alpha+2\beta}(-3t^2s),$$
$$[x_{\alpha+\beta}(2ts)x_\beta(-3ts^2)x_{3\alpha+2\beta}(-3t^2s), x_{-\alpha}(r)] = x_\beta(-6rts),$$
$$[x_{\alpha+\beta}(2ts)x_\beta(-3ts^2)x_{3\alpha+2\beta}(-3t^2s), x_\rho(r)x_\delta(\varepsilon r)] = x_{3\alpha+2\beta}(6rts).$$

Отсюда следует, что $X = E(S)$, где $S = \{-\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$. При этом группа $E(S)$ сопряжена элементом группы Вейля с группой $E(S_1)$, где $S_1 = \{\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$.

(S6). Здесь

$$X = \langle x_\rho(t)x_\delta(\varepsilon t), x_{-\alpha}(s)x_{-3\alpha-\beta}(s)\rangle,$$

где $\varepsilon = 0$ или 1 для $(S6)_1$ и $(S6)_2$ соответственно.

Положим $x_1(t) = x_\rho(t)x_\delta(\varepsilon t)$, $x_2(s) = x_{-\alpha}(s)x_{-3\alpha-\beta}(s)$.

Вычисляя коммутаторы получаем:

$$x_3(t,s) = [x_1(t), x_2(s)] = x_{-\alpha}(ts)x_\beta(3ts^2 - 3t^2s^2 - 2t^3s^2 - \varepsilon ts)\times$$
$$x_{\alpha+\beta}(2ts + t^2s)x_{3\alpha+2\beta}(-3t^2s - t^3s),$$
$$[x_1(1), [x_1(1), x_3(t,s)]] = x_{3\alpha+2\beta}(-6ts),$$
$$[x_{3\alpha+2\beta}(t), x_2(s)] = x_\beta(-ts).$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$X_\beta, \quad X_{3\alpha+2\beta} \text{ и } \{x_{-\alpha}(ts)x_{\alpha+\beta}(2ts + t^2s)\}$$

содержатся в X. Далее получаем, что $X_{-\alpha}$, $X_{\alpha+\beta}$ и $X_{3\alpha+2\beta}$ также содержатся в X. Таким образом, $X \simeq U(\mathrm{G}_2, K)$.

(S7)*. Очевидно, $\langle X_\rho, X_{-\rho}\rangle \simeq \mathrm{SL}_2(K)$.

(S8). Здесь

$$X = \langle x_\rho(t)x_\delta(t), x_{-\rho}(s)x_{-3\alpha-\beta}(\varepsilon s)\rangle,$$

где $\varepsilon = 0$ или 1 для $(S8)_1$ и $(S8)_2$, соответственно.

Каждый элемент группы X может быть представлен в виде произведения yu, где $y \in \langle X_\rho, X_{-\rho}\rangle \simeq \mathrm{SL}_2^\rho(K)$, $u \in U_0$, где U_0 – ядро гомоморфизма из X в $\mathrm{SL}_2(K)$, при котором $yu \mapsto y$.

Положим $x(t) = x_\rho(t)x_\delta(t)$, $y(s) = x_{-\rho}(s)x_{-3\alpha-\beta}(\varepsilon s)$ и

$$w(t) = x(t)y(-t^{-1})x(t), \qquad h(t) = w(t)w(-1),$$
$$u_1(t,s) = w(t)x(s)w(-t)y(t^{-2}s), \qquad u_2(t,s) = h(t)h(s)h(t^{-1}s^{-1}).$$

Тогда $U_0 = \langle u_1(t,s), u_2(t,s)\rangle$.

Вычисления дают, что

$$u_1(t,s) = x_{-3\alpha-\beta}(f_1(t,s))x_{-\alpha}(f_2(t,s))x_\beta(f_3(t,s))x_{\alpha+\beta}(-s(\varepsilon + t^{-1})),$$
$$u_2(t,s) = x_{-3\alpha-\beta}(f_4(t,s))x_\beta(f_5(t,s))x_{3\alpha+2\beta}(f_6(t,s)),$$

где $f_i(t,s)$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, – некоторые многочлены над полем K. Далее,

$$u_1(t) = u_1(t,t) = x_{-\alpha}(-\varepsilon + t^{-1})x_\beta(3\varepsilon - t\varepsilon + t^{-1})x_{\alpha+\beta}(-1 - t\varepsilon),$$
$$[u_1(t), u_1(1)] = x_\beta(3(\varepsilon+1)(1-t^{-1})).$$

Отсюда следует, что X_β содержится в X.

Далее,

$$[y(s), u_1(t)] =$$
$$= x_{-3\alpha-\beta}(-3s(st\varepsilon + s + \varepsilon - t^{-1})x_{-\alpha}(-2s(t\varepsilon+1)x_\beta(3s(t\varepsilon+1)^2)$$
$$[y(1), [y(s), u_1(t)]] = x_{-3\alpha-\beta}(-6s(t\varepsilon+1)).$$

Отсюда следует, что $X_{-3\alpha-\beta}$ и $X_{-\alpha}$ содержатся в X. Тогда из разложения $u_1(t,s)$ следует, что и $X_{\alpha+\beta}$ содержится в X.

Умножая подходящим образом полученные элементы на $u_2(t,s)$, получаем, что $X_{3\alpha+2\beta}$ также содержится в X. Следовательно, $U_0 = E(S)$, где $S = \{-3\alpha-\beta, -\alpha, \beta, \alpha+\beta, 3\alpha+2\beta\}$. Теперь результат, сформулированный в теореме, следует из сопряжённости множества положительных корней Φ^+ и S.

(S9). Здесь

$$X = \langle x_\rho(t)x_\delta(t), x_{-\alpha-\beta}(s)x_{-\delta}(s)\rangle.$$

Ход рассуждений в этом случае полностью аналогичен случаю (S8). Группа X изоморфна полупрямому произведению $\mathrm{SL}_2^\delta(K)U_0$.

Положим $x(t) = x_\rho(t)x_\delta(t)$, $y(s) = x_{-\alpha-\beta}(s)x_{-\delta}(s)$.

Вычисления дают следующие результаты.

$$u_1(t) = x_{-\beta}(-t + 3t^{-1} - 2t^{-2})x_\alpha(t^{-1} - t)x_{3\alpha+\beta}(3t - t^{-1} + 2t^2),$$

$$[u_1(t), x(s)] = x_{3\alpha+\beta}(-2s(t - t^{-2})),$$

$$[u_1(t), y(s)] = x_{-\beta}(-2st^{-1}(1 + t^3)).$$

Отсюда следует, что $U_0 = E(S_3)$, где $S_3 = \{-\beta, \alpha, 3\alpha + \beta\}$.

(S10).

Для анализа этого случая нам понадобится следующее наблюдение.

Лемма 7. *Пусть $g = uhwv$ – разложение Брюа произвольного элемента $g \in G(\mathrm{G}_2, K)$. Пусть в матричном представлении элементу g соответствует матрица $A = (a_{ij})$. Тогда коэффициенты этой матрицы*

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} \\ a_{71} & a_{72} \end{pmatrix}$$

с точностью до умножения на элемент $h \in H(G_2)$ имеют следующий вид.

Если

$$w = w_\alpha,\ w_\alpha w_\beta,\ w_{3\alpha+\beta},\ w_{\alpha+\beta}w_\beta, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{3\alpha+\beta}w_\beta, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{2\alpha+\beta}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 d_1 \\ -1 & -d_1 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{2\alpha+\beta} w_\beta, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 d_1 - 1 \\ -1 & -d_1 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{3\alpha+2\beta}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -c_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{3\alpha+2\beta} w_\beta, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$w = w_{\alpha+\beta}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где c_1 и d_1 – коэффициенты при x_α в разложении элементов $u = \prod x_\tau(c_\tau)$, $c_\tau \in K$, и $v = \prod x_\tau(d_\tau)$, $d_\tau \in K$, когда корни τ положительны и берутся в возрастающем порядке.

Доказательство. Непосредственные вычисления в матричном представлении.

В случае (S10) пусть $x(t) = x_\rho(t) x_\delta(t)$, $y(s) = x_{-\rho}(s) x_{-\delta}(s)$. Положим $g = y(q)x(1)y(p)x(1)$, p, $q \in K$, и вычислим элемент $gy(s)g^{-1}$.

Тогда коэффициенты $\begin{pmatrix} a_{61} & a_{62} \\ a_{71} & a_{72} \end{pmatrix}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} f_1(p,q,s) & f_2(p,q,s) \\ f_4(p,q,s) & f_3(p,q,s) \end{pmatrix},$$

где $f_1(p,q,s)$, $f_2(p,q,s)$, $f_3(p,q,s)$, $f_4(p,q,s) \in K[p,q,s]$ – многочлены над полем K.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, \\ f_4 \neq 0. \end{cases}$$

В алгебраическом замыкании поля $\overline{K}$ эта система разрешима относительно p, q, s. Следовательно, в силу леммы 7 элемент $gy(s)g^{-1}$ имеет разложение Брюа вида $uhw_{2\alpha+\beta}v$, причём коэффициенты при x_α в разложении u и v равны нулю.

Рассмотрим пару подгрупп $(X_{\rho,\delta}, gX_{\rho,\delta}g^{-1})$, содержащуюся в X:

$$(X_{\rho,\delta}, gX_{\rho,\delta}g^{-1}) \sim (h^{-1}u^{-1}X_{\rho,\delta}uh, w_\rho v X_{\rho,\delta} v^{-1} w_\rho^{-1}) =$$
$$= (X_{\rho,\delta}, X_{-\rho,-3\alpha-\beta}),$$

т.е. пара $(X_{\rho,\delta}, gX_{-\rho}g^{-1})$ принадлежат случаю $(S8)_1$. Следовательно, так как X_δ содержится в группе $\langle X_{\rho,\delta}, X_{-\rho,-3\alpha-\beta}\rangle$, то и $uX_\delta u^{-1} = X_\delta$ также содержится в X.

Таким образом, получаем, что

$$\langle X_1, X_2\rangle = \langle X_\rho, X_\delta, X_{-\rho,-\delta}\rangle \simeq \mathrm{G}_2(\overline{K}).$$

§6. Завершение доказательства теоремы 1

Для завершения доказательства теоремы 1 остается только показать, что пары подгрупп в случаях (S5), (S6), (S8) распадаются на две орбиты, а орбиты пары подгрупп в случаях (S3) и (S10) параметризуются элементом поля K.

Вначале опишем нормализатор $N(X_\rho)$ группы X_ρ в группе Шевалле $G(\mathrm{G}_2, K)$.

Напомним, что приведенное разложение Брюа утверждает, что любой элемент $g \in G$ может быть единственным образом представлен в виде $g = uhwv$, где $u \in U$, $h \in H$, $v \in U \cap w^{-1}Vw$ и $w \in N$, где N/H изоморфна группе Вейля W.

Пусть $u = \prod x_\tau(c_\tau)$, $c_\tau \in K$, и $v = \prod x_\tau(d_\tau)$, $d_\tau \in K$, где корни τ положительные и берутся в возрастающем порядке.

При этих обозначениях рассмотрим для произвольного $g \in G$ уравнение $gx_{2\alpha+\beta}(t)g^{-1} = x_{2\alpha+\beta}(s)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&uhwvx_{2\alpha+\beta}(t)v^{-1}w^{-1}h^{-1}u^{-1} = x_{2\alpha+\beta}(s),\\
&hwx_{2\alpha+\beta}(t)x_{3\alpha+\beta}(q_1t)x_{3\alpha+2\beta}(q_2t)w^{-1}h^{-1} =\\
&x_{2\alpha+\beta}(s)x_{3\alpha+\beta}(p_1s)x_{3\alpha+2\beta}(p_2s).
\end{aligned}$$

Отсюда $w(2\alpha+\beta) = 2\alpha+\beta$. Следовательно, либо $w = 1$, либо $w = w_\beta$. В первом случае $v = 1$, во втором $v = x_\beta(d)$, $d \in K$, и в обоих случаях p_1, $p_2 = 0$. Откуда получаем, что

$$u = x_\beta(c_1)x_{2\alpha+\beta}(c_2)x_{3\alpha+\beta}(c_3)x_{3\alpha+2\beta}(c_4). \qquad (*)$$

Таким образом, если $g \in N(X_\rho)$, то либо $g = uh$, либо $g = uhw_\beta x_\beta$, где u вида $(*)$.

Рассмотрим теперь каждый случай отдельно.

В случае (S5) представители орбит – пары $(X_\rho, X_{-\alpha})$ и $(X_{\rho,\delta}, X_{-\alpha})$ (см. табл. 5). Вместо второй пары рассмотрим сопряжённую ей пару $(X_\rho, X_{-\alpha,\beta})$. Тогда из условия

$$g(X_\rho, X_{-\alpha})g^{-1} = (X_\rho, X_{-\alpha,\beta})$$

следует, что $g \in N(X_\rho)$, т.е. либо $g = uh$, либо $g = uhw_\beta x_\beta$ и, соответственно, должно выполняться одно из следующих условий:

$$uX_{-\alpha}u^{-1} = X_{-\alpha,\beta},$$
$$uX_{-\alpha-\beta}u^{-1} = X_{-\alpha,\beta}.$$

Вычисления левых частей равенств показывают, что они содержат неединичные унипотенты, которых нет в правых частях, откуда и следует несопряжённость данных пар.

В случае (S6) представителями двух орбит являются пары $(X_\rho, X_{-\alpha,-3\alpha-\beta})$ и $(X_{\rho,\delta}, X_{-\alpha,-3\alpha-\beta})$. Вместо второй пары возьмём сопряжённую ей пару $(X_\rho, \{x_{-\alpha}(s)x_\beta(s)\})$. Тогда, подобно случаю (S5), условие сопряжённости сводится к одному из следующих условий:

$$uhX_{-\alpha,-3\alpha-\beta}h^{-1}u^{-1} = \{x_{-3\alpha-\beta}(s)x_{-\alpha}(s)x_\beta(s)\},$$
$$uhX_{-\alpha-\beta,-3\alpha-2\beta}h^{-1}u^{-1} = \{x_{-3\alpha-\beta}(s)x_{-\alpha}(s)x_\beta(s)\}.$$

Прямые вычисления показывают, что оба уравнения неразрешимы и, следовательно, пары не сопряжены.

В случае (S8) имеем дело с парами

$$(X_{\rho,\delta}, X_{-\rho}) \text{ и } (X_{\rho,\delta}, X_{-\rho,-3\alpha-\beta}).$$

Решая уравнение $gX_{\rho,\delta}g^{-1} = X_{\rho,\delta}$ подобно тому, как мы описывали нормализатор X_ρ в начале §6, получаем, что $g = uh$, где

$$u = x_\beta(c_1)x_{\alpha+\beta}(c_2)x_{2\alpha+\beta}(c_3)x_{3\alpha+\beta}(c_4)x_{3\alpha+2\beta}(c_5).$$

Следовательно, вопрос сопряжённости сводится в данном случае к решению следующего уравнения:

$$uX_{-\rho}u^{-1} = X_{-\rho,-3\alpha-\beta},$$

которое неразрешимо.

Рассмотрим теперь вопрос независимости от параметра. А именно, нам остаётся обсудить несопряжённость следующих пар:

(S3) $(\{x_\rho(t)x_\delta(ct)\}, \{x_\alpha(s)x_{-\beta}(s)\})$ и
$(\{x_\rho(t')x_\delta(c't')\}, \{x_\alpha(s')x_{-\beta}(s')\})$

(S10) $(\{x_\rho(t)x_\delta(ct)\}, \{x_{-\rho}(s)x_{-\delta}(s)\})$ и
$(\{x_\rho(t')x_\delta(c't')\}, \{x_{-\rho}(s')x_{-\delta}(s')\})$.

Из рассуждений в случае (S8) следует, что, если существует элемент g, который сопряжением переводит одну пару подгрупп в другую, то он имеет вид $g = uh$, $u \in U$. Поскольку в этом случае g должен нормализовать вторую подгруппу пар, то получаем, что $g = h$.

Любой элемент $h \in H(\mathrm{G}_2)$ может быть представлен как $h = h_\alpha(k_1)h_\beta(k_2)$. Действие им приводит к следующим системам на коэффициентах уравнений:

$$(S3) \qquad \begin{cases} k_1 t = t', \\ k_2 ct = c't', \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k_1^2 k_2^{-1} s = s', \\ k_1^3 k_2^{-2} s = s', \end{cases}$$

$$(S10) \qquad \begin{cases} k_1 t = t', \\ k_2 ct = c't', \end{cases} \text{ и } \begin{cases} k_1^{-1} s = s', \\ k_2^{-1} s = s', \end{cases}$$

Решение систем даёт, что $c = c'$, поэтому каждому элементу c соответствует своя орбита.

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

§7. Доказательство теоремы 2

Как было указано, при характеристике 3 возникают только случаи $(S4)^*$, $(S5)^*_1$, $(S7)^*$, которые в точности соответствуют случаям (T1), (T2), (T3) теоремы 2.

Поскольку в характеристике 3

$$[x_\alpha(t), x_{2\alpha+\beta}(s)] = 1,$$

в случае (T1) подгруппы X_α и $X_{2\alpha+\beta}$ коммутируют и однопараметрические подгруппы вида $x_\alpha(at)x_{2\alpha+\beta}(bt)$ являются короткими корневыми подгруппами при всех $a, b \in K$.

В случае (T2) мы имеем дело с коммутационным соотношением

$$[x_{2\alpha+\beta}(t), x_{-\alpha}(s)] = x_{\alpha+\beta}(\pm 2ts),$$

в силу которого подгруппа $\langle X_1, X_2\rangle = X_1X_2Y$, где Y – короткая корневая подгруппа. Остаётся заметить, что эта группа изоморфна $U(\widetilde{A}_2, K)$.

Случай (T3) полностью аналогичен (S7).

Доказательства теорем полностью завершены.

Литература

1. Н. А. Вавилов, *О геометрии длинных корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. 1, вып.1 (1988), 5–10.
2. Н. А. Вавилов, *Взаимное расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. 1, вып.1 (1989), 1–7.
3. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общ. **1** (1990), 64–109.
4. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — УМН **41**, № 1 (1986), 57–96.
5. В. В. Нестеров, *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Докл. РАН **357** (1997), 302–305.
6. В. В. Нестеров, *Расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 273–285.
7. M. Aschbacher, G. M. Seitz, *Involutions in Chevalley groups over fields of even order.* — Nagoya Math. J. **63** (1976), 1–91.
8. B. N. Cooperstein, *The geometry of root subgroups in exceptional groups.* I, II. — Geom. Dedic. **8,** no. 3 (1979), 317–381; **15,** no. 1 (1983), 1–45.
9. B. N. Cooperstein, *Geometry of long root subgroups in groups of Lie type.* — Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 243–248.
10. J. Hurrelbrink, U. Rehmann, *Eine endliche Präsentation der Gruppe* $\mathrm{G}_2(\mathbb{Z})$. — Math. Z. **141** (1975), 243–251.
11. W. M. Kantor, *Subgroups of classical groups generated by long root elements.* — Trans. Am. Math. Soc. **248,** no. 2 (1979), 347–379.
12. W. M. Kantor, *Generation of linear groups.* The Geom. Vein: Coxeter Festschift. Springer-Verlag, Berlin et al, 1981, pp. 497–509.

Nesterov V. V. Pairs of short root subgroups in the Chevalley group of type G_2.

The present paper is devoted to the pairs of unipotent short root subgroups in the Chevalley group of type G_2 over a field of characteristic distinct from 2. Namely, we describe the subgroups generated by a pair of short root subgroups and classify the orbits of the Chevalley group acting by simultaneous conjugation on such pairs. Most of the calculations are valid for fields of characteristic 2.

Балтийский
государственный
технический университет
email v_nesterov_2000@mail.ru

Поступило 10 апреля 2001 г.