Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

А. И. Мадунц

ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ЛЮБИНА–ТЕЙТА НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ МНОГОМЕРНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

Теория формальных групп Любина–Тейта хорошо развита в случае групп над кольцом целых классического (одномерного) локального поля (см. [3, 4]). Цель данной работы – обобщить результаты этой теории на многомерный случай.

Введем основные обозначения (подробнее о понятиях, связанных с многомерными локальными и полными полями, см. [2]).

K – n-мерное локальное поле, т.е. последовательность полных дискретно нормированных полей $K_n, K_{n-1}, \dots, K_0$, где каждое последующее поле является полем вычетов предыдущего, причем K_0 конечно.

$q = p^f$ – число элементов поля K_0.

$\overline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ – нормирование ранга n (многомерное нормирование).

$(t_1, \dots, t_n)$ – система локальных параметров поля K. Поскольку в дальнейшем нам понадобится только t_1, мы для краткости будем обозначать его t и называть простым элементом.

$\mathcal{O}$ – кольцо целых поля K относительно многомерного нормирования.

$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$.

$\mathcal{O}_1 = \{a \in \mathcal{O} : (v_2(a), v_3(a), \dots, v_n(a)) \geqslant (0, 0, \dots, 0)\}$.

$\mathfrak{M}_1 = \{a \in \mathcal{O} : (v_2(a), v_3(a), \dots, v_n(a)) \geqslant (1, 0, \dots, 0)\}$.

Напомним, что множество $\mathbb{Z}^n = \{\overline{r} = (r_1, \dots, r_n) : r_s \in \mathbb{Z}\}$ предполагается лексикографически упорядоченным в следующем смысле:

$$\overline{r}^{\,(1)} = (r_1^{(1)}, \dots, r_n^{(1)}) < \overline{r}^{\,(2)} = (r_1^{(2)}, \dots, r_n^{(2)})$$

означает, что $r_m^{(1)} < r_m^{(2)}$, $r_{m+1}^{(1)} = r_{m+1}^{(2)}, \dots, r_n^{(1)} = r_n^{(2)}$, где $m \leqslant n$.

Заметим, что $\mathfrak{M} = t\mathcal{O}$. Кроме того, выполнены включения

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1.$$

Легко видеть также, что $p \in \mathfrak{M}$.

Теперь приведем некоторые результаты из теории формальных групп (см. [4]). Сформулируем так называемую функциональную лемму.

Функциональная лемма. *Пусть R – поле, A – его подкольцо, I – идеал в A, σ – кольцевой гомоморфизм, p – простое число, $p \in A$, $q = p^f$, $s_i \in R$, $i \geqslant 1$, причем выполнены условия*

1. *$\sigma(A) \subset A$,*
2. *$\sigma(a) \equiv a^q \mod I$, $a \in A$,*
3. *для любого i имеем $s_i I \subset A$.*

По каждому ряду $g(X) = \sum_{i\geqslant 1} g_i X^i$ над A мы теперь можем построить новый ряд $f_g(X) = \sum_{i\geqslant 1} f_i X^i$ над R по следующему функциональному уравнению:

$$f_g(X) = g(X) + \sum_{i\geqslant 1} s_i \sigma^i f_g(X),$$

где $\sigma f_g(X) = \sum_{i\geqslant 1} f_i^{\sigma} X^{q^i}$. При этом формула, связывающая коэффициенты рядов, имеет вид

$$f_{q^r m} = g_{q^r m} + s_1 \sigma(f_{q^{r-1}m}) + \ldots + s_r \sigma^r(f_m)$$

(здесь m не делится на q).

Пусть $g(X) = \sum_{i\geqslant 1} g_i X^i$, $h(X) = \sum_{i\geqslant 1} h_i X^i$ ряды над A, и g_1 обратим в A. Тогда

1. *ряд $F_g(X,Y) = f_g^{-1}(f_g(X) + f_g(Y))$ имеет коэффициенты в A,*
2. *ряд $f_g^{-1}(f_h(X))$ имеет коэффициенты в A,*
3. *существует ряд $l(X)$ с коэффициентами в A такой, что $f_g(h(X)) = f_l(X)$,*
4. *если $\alpha(X)$ – степенной ряд над A, а $\beta(X)$ – над R, то*

$$\alpha(X) \equiv \beta(X) \mod I^r$$

тогда и только тогда, когда

$$f_g(\alpha(X)) \equiv f_g(\beta(X)) \mod I^r,$$

5. *если $h(X)$, $l(X)$ удовлетворяют некоторым функциональным уравнениям и $h(X) \equiv l(X) \equiv X \mod X^2$, то формальные законы $H(X,Y)$ и $L(X,Y)$ строго изоморфны тогда и только тогда, когда функциональные уравнения для $h(X)$ и $l(X)$ одного типа.*

Применим функциональную лемму к случаю $R = K$, $A = \mathcal{O}$, $I = \mathfrak{M}$, σ – тождественный гомоморфизм, $s_1 = t^{-1}$, $s_i = 0$, $i > 1$,

$g(X) = X$. Это можно сделать, поскольку $\mathcal{O}/\mathfrak{M}$ является полем, состоящим из q элементов, что очевидным образом дает соотношение

$$a^q \equiv a \mod \mathfrak{M}$$

для всех $a \in \mathcal{O}$.

Итак, наше функциональное уравнение имеет вид

$$f(X) = X + t^{-1} f(X^q).$$

По части 1 функциональной леммы коэффициенты формальной группы $F(X,Y) = f^{-1}(f(X) + f(Y))$ лежат в $\mathcal{O}$. Поскольку ряд $tf(X)$ удовлетворяет функциональному уравнению того же типа, что и $f(X)$, но с $g(X) = tX$, по части 2 функциональной леммы коэффициенты ряда $f^{-1}(tf(X))$ лежат в $\mathcal{O}$.

Обозначим этот ряд $[t]_F(X)$. Таким образом, $[t]_F(X)$ является эндоморфизмом над $\mathcal{O}$ формальной группы $F(X,Y)$. Кроме того, легко видеть, что

$$[t]_F(X) \equiv tX \mod \deg 2$$

и

$$[t]_F(X) \equiv X^q \mod \mathfrak{M}.$$

Теперь введем множество

$$E_t = \{l(X) \in \mathcal{O}[[X]] : l(X) \equiv tX \mod \deg 2, l(X) \equiv X^q \mod \mathfrak{M}\}.$$

Тем же способом, что и в одномерном случае (см. [1, 3]) доказывается, что для любого $l(X) \in E_t$ существует единственная формальная группа $F_l(X,Y)$ над $\mathcal{O}$, такая что $l(X)$ – ее эндоморфизм. Эти формальные группы будем называть формальными группами Любина–Тейта. Итак, $F(X,Y)$ – формальная группа Любина–Тейта, соответствующая эндоморфизму $[t]_F(X)$.

Аналогичным образом, подобно одномерному случаю (см. [4]) доказывается также то, что любая формальная группа Любина–Тейта получается по функциональной лемме при некотором $g(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ и для любого $g(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ полученная по функциональной лемме формальная группа $F_g(X,Y)$ является формальной группой Любина–Тейта. Поэтому имеет место

Предложение 1. *$F(X,Y)$ – формальная группа Любина–Тейта в том и только в том случае, когда ее логарифм (образующая) $f(X)$ удовлетворяет условию $f(X)-t^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$.*

Напомним, что $f(X)\in K[[X]]$ называется логарифмом формальной группы $F(X,Y)$, если $f(X)\equiv X \mod \deg 2$ и $F(X,Y)=f^{-1}(f(X)+f(Y))$.

Однако далее мы наблюдаем некоторое отличие от классической теории. Для классического локального поля был верен тот факт, что простой элемент t определен этим условием однозначно, т.е. если и для простого t_1 выполнено условие $f(X)-t_1^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$, то $t=t_1$. В нашей ситуации это не так.

Предложение 2. *Пусть $f(X)-t^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$. Тогда для простого t_1 выполнено условие $f(X)-t_1^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$ в том и только в том случае, когда $t-t_1\in\mathfrak{M}_1$.*

Доказательство. Пусть выполнено условие $f(X)-t_1^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$. Следовательно,

$$f_{q^i}-t^{-1}f_{q^{i-1}}=g_{q^i}\in\mathcal{O}$$

и

$$f_{q^i}-t_1^{-1}f_{q^{i-1}}=c_{q^i}\in\mathcal{O}.$$

Домножив эти равенства на $tf_{q^i}^{-1}$ и $t_1f_{q^i}^{-1}$ соответственно и вычтя из первого второе, получаем

$$t-t_1=(g_{q^i}t-c_{q^i}t_1)f_{q^i}^{-1}.$$

Учитывая, что $f_q-t^{-1}=g_q\in\mathcal{O}$, имеем $\overline{v}(f_q)=(-1,0,\dots,0)$. Далее несложной индукцией показываем, что $\overline{v}(f_{q^i})=(-i,0,\dots,0)$. Таким образом, для всех i верно соотношение

$$\overline{v}(t-t_1)\geqslant(i+1,0,\dots,0),$$

что и дает условие $t-t_1\in\mathfrak{M}_1$.

Теперь проведем доказательство в обратную сторону. Пусть $t-t_1=a\in\mathfrak{M}_1$ и $f(X)-t^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}[[X]]$. Тогда

$$f_{q^im}-t^{-1}f_{q^{i-1}m}=g_{q^im}\in\mathcal{O}$$

и

$$f_{q^im}-t_1^{-1}f_{q^{i-1}m}=g_{q^im}+t^{-1}f_{q^{i-1}m}(1-(1-at^{-1})^{-1})$$

(здесь m не делится на q). Осталось доказать, что

$$t^{-1}f_{q^{i-1}m}(1-(1-at^{-1})^{-1})\in\mathcal{O}.$$

Поскольку $f_m\in\mathcal{O}$ и $f_{q^im}=t^{-1}f_{qi-1m}+g_{q^im}$, $g_{q^im}\in\mathcal{O}$, индукцией получаем, что $t^mf_{q^im}\in\mathcal{O}$. Следовательно,

$$t^{-1}f_{q^{i-1}m}(1-(1-at^{-1})^{-1})=t^{i-1}f_{q^{i-1}m}t^{-i}(at^{-1}-a^2t^{-2}+\dots).$$

Но $a\in\mathfrak{M}_1$, и потому для любого i имеем $t^{-i}a\in\mathcal{O}$, что завершает доказательство.

Замечание. Таким образом, по любой формальной группе Любина–Тейта с точностью до $\mathfrak{M}_1$ определяется простой элемент $t(F)$ и однозначно определяется элемент $\overline{t}(F)\in\mathcal{O}/\mathfrak{M}_1$.

Теорема 1. *Формальные группы Любина–Тейта $F(X,Y)$ и $G(X,Y)$ изоморфны над $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда $\overline{t}_F=\overline{t}_G$, причем в этом случае они строго изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\overline{t}_F=\overline{t}_G$. Тогда по Предложению 2 можно выбрать простой t такой, что для логарифмов выполнены условия $f(X)-t^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}$ и $g(X)-t^{-1}g(X^q)\in\mathcal{O}$. По части 4 функциональной леммы имеем строгий изоморфизм формальных групп.

Пусть теперь $F(X,Y)$ и $G(X,Y)$ изоморфны, ϕ – изоморфизм. По уже доказанному $g(X)-t_G^{-1}g(X^q)\in\mathcal{O}$. Подставляя в это равенство $\phi(X)$ вместо X, получаем соотношение

$$g(\phi(X))-t_G^{-1}g(\phi(X)^q)=f(X)-t_G^{-1}(f(x^q)+qh(X))\in\mathcal{O},$$

где $h(X)\in\mathcal{O}[[X]]$. Учитывая, что $f(X)-t_F^{-1}f(X^q)\in\mathcal{O}$, применяем Предложение 2.

Теперь изучим фактор-множество $\mathcal{O}/\mathfrak{M}_1$. Для этого требуется напомнить, как определяется многомерное нормирование:

$$\overline{v}_K=\overline{v}=(v_1,\dots,v_n):K\to\mathbb{Z}^n\cup\{\infty\},$$

где $\overline{v}(0)=\infty$, а при $a\neq 0$

$$v_i(a)=v_{K_i}\left(\overline{at_n^{-v_n(a)}\dots t_{i+1}^{-v_{i+1}(a)}}\right)\quad\text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant n-1;$$
$$v_n(a)=v_{K_n}(a).$$

(Здесь надчеркивание обозначает образ в K_i.)

Легко видеть, что можно корректно определить гомоморфизм, сопоставляющий каждому $a \in \mathcal{O}$ его вычет в поле K_1, причем ядром будет являться $\mathfrak{M}_1$, а образом – кольцо целых поля K_1. Обозначим его $\mathcal{O}_{K_1}$. Итак, мы доказали

Предложение 3. $\mathcal{O}/\mathfrak{M}_1 \approx \mathcal{O}_{K_1}$.

Заметим, что K_1 – классическое (одномерное) локальное поле. Для любого простого элемента $\bar{t}$ из локального поля K_1 определим множество

$$E_{\bar{t}} = \{l(X) \in \mathcal{O}[[X]] : \bar{l}(X) \equiv \bar{t}X \mod \deg 2, l(X) \equiv X^q \mod \mathfrak{M}\}$$

(здесь надчеркивание обозначает образ в K_1).

Теорема. *Формальные группы Любина–Тейта изоморфны над $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда среди их эндоморфизмов есть принадлежащие $E_{\bar{t}}$ при одном и том же $\bar{t}$, причем в этом случае формальные группы строго изоморфны.*

Литература

1. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, *Некоторые подходы к построению абелевых расширений для $\mathfrak{p}$-адических полей.* Труды С.-Петерб. мат. общ-ва, **3** (1994), 194–214.
2. И. Б. Жуков, А. И. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* Труды С.-Петерб. мат. общ-ва, **3** (1994), 4–46.
3. К. Ивасава, *Локальная теория полей классов.* М., Мир, 1983, 180 сс.
4. M. Hazewinkel, *Formal groups and applications.* New York, Academic Press, 1978, 573 pp.

Madunts A. I. Lubin–Tate formal groups over integer ring of multidimensional local field.

The paper gives isomorphism criterions for Lubin–Tate formal groups over an integer ring of a miltidimensional local field.

Санкт-Петербургский
государственный
технический университет

Поступило 21 мая 2001 г.