Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ЯДРОМ ПОРЯДКА 8

Настоящая работа продолжает исследования авторов по универсально разрешимой задаче погружения (см. [1, 2]). Напомним это понятие. Пусть

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$$

– точная последовательность конечных групп. Говорят, что она определяет универсально разрешимую задачу погружения, если задача погружения $(K/k, G, F)$ разрешима для любого конечного расширения K/k с группой Галуа F. Заметим, что в качестве решения допускаются алгебры Галуа, причем задача погружения может ставиться и над алгеброй Галуа K над полем k (см. [3]).

В работе [1] показано, что класс универсально разрешимых расширений шире класса полупрямых расширений. В работе [2] показано, что если A – циклическая группа нечетного порядка, то класс универсально разрешимых задач совпадает с классом полупрямых. В настоящей работе мы покажем, что аналогичный результат верен, когда A – циклическая группа порядка 8.

Заметим, что можно ограничиться случаем, когда G – p-группа, т.е. в данном случае можно считать, что G – 2-группа. Действительно, пусть

$$1 \to A \to G \to F \to 1$$

– групповое расширение с циклическим ядром порядка 8 и задача погружения, связанная с данной последовательностью является универсально разрешимой, тогда универсально разрешимой будет и задача, связанная с последовательностью

$$1 \to A \to G_2 \to F_2 \to 1,$$

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, гранты 00-01-00116 и 00-01-00441.

где G_2, F_2 – силовские 2-подгруппы G и F, соответственно. Если мы покажем, что последнее расширение является полупрямым, то таковым будет и исходное расширение. Таким образом, в дальнейшем будем предполагать, что G – 2-группа.

Заметим, что группа автоморфизмов циклической группы порядка 8 – это группа F_0 порядка 4 с образующими σ_0 и τ_0, причем действие на образующем элементе a группы A задается формулами $a^{\sigma_0} = a^5$, $a^{\tau_0} = a^{-1}$. Будем в дальнейшем предполагать, что группа F действует на ядре A как полная группа автоморфизмов.

Докажем вспомогательное теоретико-групповое утверждение. Рассмотрим следующие три групповых расширения с одним и тем же ядром A:

1) $$1 \to A \to \overline{H}_1 \xrightarrow{\alpha_1} H_1 \to 1, \qquad (1)$$

где H_1 – 2-группа класса нильпотентности 2 с двумя образующими h_{11}, h_{12} и дополнительными соотношениями

$$h_{11}^4 = 1, \quad h_{12}^2 = 1, \quad \left[h_{11}, h_{12}\right]^2 = 1.$$

Здесь и в дальнейшем мы используем обозначения: $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $[a, b, c] = [[a, b]c]$. Группа H_1 имеет порядок 16 и действие H_1 на ядре A задается формулами

$$a^{h_{11}} = a^5, \quad a^{h_{12}} = a^{-1}.$$

Группу $\overline{H}_1$ определим как 2-группу с тремя образующими a, $\overline{h}_{11}$, $\overline{h}_{12}$ и соотношениями

$$\overline{h}_{11}^4 = 1, \quad \overline{h}_{12}^2 = 1, \quad a^8 = 1, \quad [a, \overline{h}_{11}] = a^4, \quad [a, \overline{h}_{12}] = a^{-2},$$

$$[\overline{h}_{11}, \overline{h}_{12}, \overline{h}_{11}] = a^4, \quad [\overline{h}_{11}, \overline{h}_{12}, \overline{h}_{12}] = 1, \quad [\overline{h}_{11}, \overline{h}_{12}]^2 = 1.$$

Гомоморфизм α_1 определяется по формулам

$$\alpha_1(\overline{h}_{11}) = h_{11}, \quad \alpha_1(\overline{h}_{12}) = h_{12}, \quad \alpha_1(a) = 1.$$

2) $$1 \to A \to \overline{H}_2 \xrightarrow{\alpha_2} H_2 \to 1, \qquad (2)$$

где H_2 – абелева группа порядка 8 с образующими h_{21}, h_{22}, причем $h_{21}^4 = 1$, $h_{22}^2 = 1$ и действие H_2 на A определяется формулами

$$a^{h_{21}} = a^5, \quad a^{h_{22}} = a^{-1}.$$

Группу $\overline{H}_2$ определим как 2-группу с тремя образующими a, $\overline{h}_{21}$, $\overline{h}_{22}$ и соотношениями

$$\overline{h}_{21}^4 = a^4,\ \overline{h}_{22}^2 = 1,\ \ a^8 = 1,\ [a, \overline{h}_{22}] = a^4,\ [a, \overline{h}_{22}] = a^{-2},\ [\overline{h}_{21}, \overline{h}_{22}] = 1.$$

Гомоморфизм α_2 определяется по формулам

$$\alpha_2(\overline{h}_{21}) = h_{21}, \quad \alpha_2(\overline{h}_{22}) = h_{12}, \quad \alpha_2(a) = 1.$$

3)
$$1 \to A \to \overline{H}_3 \xrightarrow{\alpha_3} H_2 \to 1. \tag{3}$$

Группа H_2 определена выше. Группу $\overline{H}_3$ определим как 2-группу с тремя образующими a, $\overline{h}_{31}$, $\overline{h}_{32}$ и соотношениями

$$\overline{h}_{31}^4 = 1,\ \overline{h}_{32}^2 = a^4,\ \ a^8 = 1,\ [a, \overline{h}_{32}] = a^4,\ [a, \overline{h}_{32}] = a^{-2},\ [\overline{h}_{31}, \overline{h}_{32}] = 1.$$

Гомоморфизм α_3 определяется по формулам

$$\alpha_3(\overline{h}_{31}) = h_{21}, \quad \alpha_3(\overline{h}_{32}) = h_{22}, \quad \alpha_3(a) = 1.$$

Заметим, что группа F_0 является гомоморфным образом введенных групп $\overline{H}_i$, если мы положим $\beta_i(a) = 1$, $\beta_i(\overline{h}_{i1}) = \sigma_0$, $\beta_i(\overline{h}_{i2}) = \tau_0$, где β_i – гомоморфизм $\overline{H}_i \to F_0$, следовательно, можно рассматривать прямые произведения групп $\overline{H}_i$ с объединенной факторгруппой F_0.

Лемма. *Пусть*

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$$

– расширение конечных 2-групп, A – циклическая группа порядка 8 и F действует на A как полная группа автоморфизмов. Кроме того, пусть для любой собственной подгруппы $\overline{F}$ группы F найдется изоморфная ей подгруппа $\overline{G}$ в G со свойством $\varphi(\overline{G}) = \overline{F}$. Тогда, если F имеет 2 образующие, то в группе G существует нормальная подгруппа H_0 такая, что $H_0 \cap A = 1$ и факторгруппа G/H_0 есть расширение одного из видов $(1-3)$, либо прямое произведение каких-либо групп вида $(1-3)$ с объединенной факторгруппой F_0. Если группа F имеет более двух образующих, то существует аналогичная подгруппа H_0, такая что G/H_0 – есть расширение, полученное подъемом расширения циклической группы второго порядка с помощью циклической группы порядка 2.

Доказательство. Пусть сначала F – группа с двумя образующими σ и τ, причем они выбраны так, что их действие на группе

A определяется формулами $a^\tau = a^5$, $a^\tau = a^{-1}$. Обозначим через F_1 подгруппу в F, состоящую из элементов, действующих тривиально на ядро A, тогда F_1 – нормальный делитель в F и $F/F_1 = F_0$, причем при гомоморфизме $F \to F_0$ элементы σ и τ отображаются в σ_0 и τ_0 соответственно.

Рассмотрим 2-группу P класса нильпотентности 3 с двумя образующими p_1 и p_2 и дополнительными соотношениями $p_1^4 = 1$, $p_2^4 = 1$, $[p_1, p_2]^2 = 1$ (ясно, что $[p_1, p_2, p_1]$ и $[p_1, p_2, p_2]$ имеют второй порядок). Заметим, что порядок этой группы равен 128. Определим гомоморфизм $\delta : P \to F_0$, положив

$$\delta(p_1) = \sigma_0, \quad \delta(p_2) = \tau_0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что P является факторгруппой группы F, ибо в противном случае можно вместо групп G и F рассматривать прямые произведения с объединенной факторгруппой F_0, т.е. группы $G \underset{F_0}{\times} P$ и $F \underset{F_0}{\times} P$ соответственно. Ясно, что условия леммы для новых групп будут сохранены.

Пусть $\overline{\sigma}$ – прообраз σ в группе G и G_σ – подгруппа индекса 2 в G, не содержащая $\overline{\sigma}$. Тогда G_σ – полупрямое расширение ядра A с помощью F_σ, где $F_\sigma = \varphi(G_\sigma)$. Пусть $\overline{F}_\sigma$ – подгруппа в G, изоморфная F_σ, не пересекающаяся с A. Группа $\overline{F}_\sigma$ имеет три образующие $\overline{\tau}$, $\overline{[\sigma, \tau]}$ и $\overline{\sigma^2}$, являющиеся прообразами элементов τ, $[\sigma, \tau]$ и σ^2 из группы F_σ. Аналогично, подгруппа G_τ индекса 2 в G, не содержащая $\overline{\tau}$, является полупрямым расширением A с помощью F_τ и в группе G_τ существует подгруппа $\overline{F}_\tau$, порожденная элементами $\overline{\overline{\sigma}}$, $\overline{\overline{[\sigma, \tau]}}$ и $\overline{\overline{\tau}}^2$, которые являются прообразами в G_τ элементов σ, $[\sigma, \tau]$ и τ^2.

Рассмотрим в $\overline{F}_\sigma$ подгруппу $\overline{F}_1$ индекса 2, состоящую из элементов, действующих тривиально на ядро A. $\overline{F}_1$ порождается элементами $\overline{\sigma^2}$, $\overline{\tau}^2$, $\overline{[\sigma, \tau]}$, $\big[\overline{[\sigma, \tau]}, \overline{\tau}\big]$, $\big[\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}\big]$. Элемент $\overline{\sigma}$ действует на группе G сопряжением, следовательно, переводит $\overline{F}_1$ в некоторую сопряженную подгруппу. Так как $\overline{F}_1$ перестановочно с A, то коммутант группы $\overline{F}_1$ замкнут относительно действия $\overline{\sigma}$.

Покажем, что элементы $(\overline{\sigma^2})^2$, $\overline{\tau}$, $\overline{[\sigma, \tau]}^2$, $[\overline{\sigma, \tau}], \overline{\tau}]$ и $[\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}]$ под действием $\overline{\sigma}$ остаются в $\overline{F}_1$. $\overline{\sigma^2}$ отличается от $\overline{\sigma}^{\,2}$ на некоторую степень элемента a, следовательно $(\overline{\sigma^2})^2$ инвариантен относительно действия $\overline{\sigma}$. Покажем, что $(\overline{\tau}^2)^{\overline{\sigma}} \in \overline{F}_1$. Действительно,

$$\left(\overline{\tau}^2\right)^\sigma = \overline{\tau}^2\left[\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}\right] = \overline{\tau}^2\left[\overline{\tau}, \overline{\sigma}\right]\left[\overline{\tau}, \overline{\sigma}, \overline{\tau}\right]\left[\overline{\tau}, \overline{\sigma}\right] =$$

$$= \overline{\tau}^2\, \overline{[\tau,\sigma]}\, a^i \left[\, \overline{[\tau,\sigma]}\, a^i, \overline{\tau}\right] \overline{[\tau,\sigma]}\, a^i =$$

$$= \overline{\tau}^2\, \overline{[\tau,\sigma]}\, a^i \left[\, \overline{[\tau,\sigma]}, \overline{\tau}\right] a^{-2i}\, \overline{[\tau,\sigma]}\, a^i = \overline{[\tau,\sigma]} \left[\, \overline{[\tau,\sigma]}, \overline{\tau}\right] \overline{[\tau,\sigma]} \in \overline{F}_1.$$

Далее,

$$\left[\,\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}\,\right]^{\overline{\sigma}} = \left[\,\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}^{\overline{\sigma}}\,\right] = \left[\,\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}\,[\overline{\tau},\overline{\sigma}]\right] =$$

$$= \left[\,\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}\,[\overline{\tau},\overline{\sigma}]a^{-i}\right] = \left[\,\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}\,[\overline{\tau},\overline{\sigma}]^{-1}\right] \in \overline{F}_1.$$

Элемент $\overline{[\sigma,\tau]}^2$ отличается от соответствующего элемента в группе G_τ на степень элемента a^2, следовательно, под действием сопряжения $\overline{\sigma}$ он остается в $\overline{F}_1$. Рассмотрим теперь $[\overline{[\sigma,\tau]}, \overline{\tau}]^{\overline{\sigma}}$. Так как $[\overline{[\sigma,\tau]}, \overline{\tau}] \equiv [\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}]\overline{[\sigma,\tau]}^{-2} \operatorname{mod} \overline{F}'_1$, где $\overline{F}'_1$ – коммутант группы $\overline{F}_1$, то достаточно показать, что $[\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}]^{\overline{\sigma}} \in \overline{F}_1$. Заметим, что $[\overline{\tau}^2, \overline{\sigma^2}] = [\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}][\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}, \overline{\sigma}][\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}]$. Мы уже доказали, что $[\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}] \in \overline{F}_1$, следовательно $[\overline{\tau}^2, \overline{\sigma}, \overline{\sigma}] \in \overline{F}_1$.

Таким образом, мы показали, что подгруппа $\overline{H}_0$, порожденная элементами $\overline{\sigma^2}$, $\overline{\tau}^2$, $[\overline{\sigma^2}, \overline{\tau}]$, $[\overline{\sigma}, \overline{\tau}]^2$, $[\overline{[\sigma,\tau]}, \overline{\tau}]$ является нормальным делителем в группе G. Следовательно, по Предложению 1.13.3 книги [3] класс когомологий $f \in H^2(F, A)$, определяющий расширение G, получается подъемом класса $\overline{f} \in H^2(F/H_0, A)$, где H_0 – образ $\overline{H}_0$ в F. Заметим, что F/H_0 – это группа порядка 16 класса нильпотентности 2 с двумя образующими σ_2, τ_2 и соотношениями $\sigma_2^4 = 1$, $\tau_2^2 = 1$, $[\sigma_2, \tau_2]^2 = 1$ (σ_2, τ_2 – образы элементов σ и τ соответственно при гомоморфизме $F \to F/H_0$).

Если в исходной группе $[\overline{\sigma}, \overline{\tau}]^{\overline{\sigma}} \notin \overline{F}_1$, то рассмотрим прямое произведение G_3 групп G и группы вида (1) с объединенной факторгруппой F_0. В группе G_3 при сохранении прежних обозначений условие $\overline{[\sigma,\tau]}^{\overline{\sigma}} \in \overline{F}_1$ уже выполнено. Заметим, что расширение G_3 соответствует подъему класса $\overline{f} + \underline{f_1}$, где f_1 – класс когомологий, соответствующий расширению $\overline{H}_1$. Тогда класс $f + f_1$ получается подъемом некоторого класса $\overline{f}_2 \in H^2(F_4, A)$, где F_4 – абелева факторгруппа порядка 8 группы F, порожденная элементами σ_4 и τ_4 (образами σ и τ соответственно), причем $\sigma_4^4 = 1$, $\tau_4^2 = 1$.

Группа $H^2(F_4, A)$ является абелевой группой с двумя образующими порядка 2, причем в качестве ее образующих можно взять классы, соответствующие расширениям вида (2) и (3). Таким образом, мы закончили рассмотрение случая, когда F имеет две образующие.

Пусть теперь группа F имеет более двух образующих. Как и выше, образующие σ и τ действуют на ядре по формулам $a^\sigma = a^5$, $a^\tau = a^{-1}$. Выберем образующую ω группы F, действующую на A тривиально. Пусть $\overline{\omega}$ – прообраз ω в G и G_ω – подгруппа индекса 2 в G, не содержащая $\overline{\omega}$. Тогда G_ω – полупрямое расширение A с помощью F_ω, где $F_\omega = \varphi(G_\omega)$. Следовательно, в группе G_ω существует подгруппа $\overline{F}_\omega$ изоморфная F_ω и не пересекающаяся с ядром A. Обозначим через $\overline{H}_0$ подгруппу в $\overline{F}_\omega$, состоящую из элементов перестановочных с элементами группы A. Покажем, что $\overline{H}_0$ – нормальный делитель в G. Пусть $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ – образующие группы $\overline{F}_\omega$, являющиеся прообразами σ и τ соответственно, и $G_{1\omega}$ – подгруппа индекса 4 в G, не содержащая $\overline{\sigma}$ и $\overline{\tau}$, кроме того, положим $F_{1\omega} = \varphi(G_{1\omega})$.

Заметим, что $\overline{\sigma}$, $\overline{\tau}$ и $\overline{\omega}$ действуют на группе G сопряжением и нам достаточно показать, что $\overline{H}_0$ замкнуто относительно действия указанных элементов. Кроме того, $\overline{H}_0^{\overline{\sigma}} = \overline{H}_0$ и $\overline{H}_0^{\overline{\tau}} = \overline{H}_0$, так как $\overline{H}_0$ – нормальный делитель в группе $\overline{F}_\omega$. Остается показать, что $\overline{H}_0^{\overline{\omega}} = \overline{H}_0$. Предположим противное, и пусть существует $h \in \overline{H}_0$ такой, что $[h, \overline{\omega}] \in \overline{H}_0$. Так как $\overline{\omega}$ действует на a тривиально, то группа $G_{1\omega}$ не является полупрямым расширением A с помощью $F_{1\omega}$, что противоречит условию леммы.

Положим $G_3 = G/\overline{H}_0$ и $G_3/A = F_3$. Заметим, что F_3 – элементарная абелева 2-группа с тремя образующими σ_3, τ_3, ω_3, являющимися образами элементов σ, τ, ω соответственно. Таким образом, мы показали, что класс когомологий $f \in H^2(F, A)$, соответствующий расширению G, является подъемом класса $f_3 \in H^2(F_3, A)$, соответствующего расширению G_3.

Вычислим группу $H^2(F_3, A)$. Заметим, что $H^n(\{\sigma_3\}, A) = 0$ для всех n, следовательно, точна последовательность Хохшильда–Серра

$$0 \to H^2\Big(F_3/\{\sigma_3\}, A^{\{\sigma_3\}}\Big) \to H^2(F_3, A) \to H^2\big(\{\sigma_3\}, A\big) = 0.$$

Таким образом, $H^2(F_3, A) \approx H^2\big(F_3/\{\sigma_3\}, A^{\{\sigma_3\}}\big)$. Группа $F_3/\{\sigma_3\}$ – элементарная абелева 2-группа с образующими τ_3, ω_3, а группа $A^{\{\sigma_3\}}$ – циклическая группа порядка 4. Расширение G_3 можно задать образующими a, $\overline{\sigma}_3$, $\overline{\tau}_3$, $\overline{\omega}_3$ и соотношениями

$$a^8 = 1, \quad \overline{\sigma}_3^2 = 1, \quad \overline{\tau}_3^2 = a^{4i}, \quad \overline{\omega}_3^2 = a^{4j}, \quad [a, \overline{\sigma}_3] = a^4, \quad [a, \overline{\tau}_3] = a^{-2},$$
$$[a, \overline{\omega}_3] = 1, \quad [\overline{\sigma}_3, \overline{\omega}_3] = 1, \quad [\overline{\sigma}_3, \overline{\tau}_3] = 1, \quad [\overline{\omega}_3, \overline{\tau}_3] = 1,$$

где i и j – целые числа, не являющиеся четными одновременно.

Заметим, что $f_3 \in H^2(F_3, A)$, соответствующее расширению G_3, является подъемом класса $f_4 \in H^2(F_4, A)$, где F_4 – циклическая группа порядка 2, порожденная $\overline{\tau}_3^i\,\overline{\omega}_3^j$, и класс f_4 соответствует циклической группе порядка 4. Лемма доказана.

Примеры.

1. Пусть G – 2-группа с образующими σ, τ, a и соотношениями

$$a^8 = 1, \quad \sigma^{16} = 1, \quad \tau^{16} = 1, \quad [\sigma, \tau]^8 = 1, \quad [\sigma, \tau, \sigma] = a^4,$$

$$[\sigma, \tau, \tau]^4 = 1, \quad [\sigma, \tau, \tau, \tau] = [\sigma, \tau, \tau]^2, \quad [a, \sigma] = a^4, \quad [a, \tau] = a^{-2}$$

Заметим, что G – группа порядка 2^{16}, причем подгруппа A, порожденная элементом a является нормальным делителем в G. Пусть $F = G/A$. Таким образом задано групповое расширение

$$1 \to A \to G \to F \to 1,$$

которое, очевидно, не является полупрямым. Рассмотрим подгруппу G_σ, порожденную σ^2, $[\sigma, \tau]$, τ, a, которая является подгруппой индекса 2 в G, содержащей ядро A. Можно проверить, что G_σ – полупрямое произведение подгруппы A и подгруппы $\overline{F}_\sigma$, порожденной $\sigma^2 a^2$, $[\sigma, \tau]$, τ^2.

Подгруппа G_τ, порожденная σ, $[\sigma, \tau]$, τ^2, a является полупрямым произведением подгруппы A и подгруппы $\overline{F}_\tau$, порожденной σ, $[\sigma, \tau]a$, τ^2. Подгруппа $G_{\sigma\tau}$, порожденная $\sigma\tau$, $[\sigma, \tau]$, σ^2, a является полупрямым произведением подгруппы A и подгруппы, порожденной $\sigma\tau$, $[\sigma, \tau]a^2$, τ^2. Таким образом, мы показали, что любое собственное подрасширение расширения G, содержащее ядро A, распадается. Ясно, что класс $f \in H^2(F, A)$ соответствующий расширению G, получается подъемом класса, соответствующего расширению вида (1).

2. Пусть $\overline{G}_2$ – расширение вида (2) и H – 2-группа с образующими h_1, h_2 и соотношениями $h_1^8 = 1$, $h_2^2 = 1$, $[h_1, h_2] = h_1^4$. Положим $G = \overline{G}_2 \underset{F_0}{\times} H$ – прямое произведение групп $\overline{G}_2$ и H с объединенной факторгруппой F_0, причем гомомрфизм $\gamma : H \to F_0$ определим по формулам $\gamma(h_1) = \sigma_0$, $\gamma(h_2) = \tau_0$. Тогда любое собственное подрасширение группы G, содержащее ядро A, будет полупрямым.

3. Пусть $\overline{G}_3$ – расширение вида (3) и H – 2-группа с образующими h_1, h_2 и соотношениями $h_1^2 = 1$, $h_2^4 = 1$, $[h_1, h_2] = h_2^2$. Тогда $G = \overline{G}_3 \underset{F_0}{\times} H$ обладает аналогичным свойством, т.е. любое собственное подрасширение группы G, содержащее ядро A, будет полупрямым.

Докажем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть универсально разрешимая задача погружения связана с расширением конечных групп*

$$1 \to A \to G \to F \to 1,$$

где A – циклическая группа порядка 8 и F действует на ядро A как полная группа автоморфизмов. Тогда групповое расширение G является полупрямым.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Рассмотрим минимальный контрпример, т.е. такую задачу, для которой любая сопутствующая задача является полупрямой. Таким образом, мы рассматриваем универсально разрешимую задачу погружения, связанную с точной последовательностью групп

$$1 \to A \to G \to F \to 1,$$

причем G не является полупрямым расширением, но расширения, полученные заменой F на ее собственную подгруппу, являются полупрямыми.

Пусть число образующих группы F больше 2. Тогда по лемме класс когомологий $f \in H^2(F, A)$, соответствующий расширению G, получается подъемом нетривиального класса $\overline{f} \in H^2(\overline{F}, A_0)$, где A_0 – подгруппа ядра порядка 2, а $\overline{F}$ – факторгруппа порядка 2 группы F. Таким образом, мы должны построить квадратичное расширение K_0/k, которое погружается в расширение K/k с группой Галуа F, но задача погружения $(K_0/k, G_0, A_0)$ неразрешима, где G_0 – циклическая группа порядка 4.

Пусть k – локальное поле, являющееся расширением нечетной степени поля 2-адических чисел $\mathbb{Q}_2$ и $K_0 = k(\sqrt{3})$. Условие разрешимости задачи погружения $(K_0/k, G_0, A_0)$ состоит в распадении алгебры кватернионов $[3, -1]$ над полем k. Так как k – поле нечетной степени над $\mathbb{Q}_2$, то эта алгебра не распадается.

Условие погружения поля K_0 в поле K с группой Галуа F в случае, когда поле k имеет достаточно высокую степень над $\mathbb{Q}_2$, состоит в выполнении условия согласности (см. [3], гл. IV, §2), причем достаточно рассматривать сопутствующие брауэровские задачи, порядок ядра которых равен 2 (поле k содержит первообразный корень из 1 только второй степени). Заметим, что все такие задачи являются распадающимися.

Пусть теперь F – 2-группа с двумя образующими. По лемме класс $f \in H^2(F, A)$, соответствующий расширению G, является подъемом класса $\overline{f} \in H^2(\overline{F}, A)$, где $\overline{f}$ соответствует либо одному из расширений вида (1)–(3), либо получается из них с помощью операции прямого произведения с объединенной факторгруппой F_0, т.е. $\overline{f} = i\overline{f}_1 + j\overline{f}_2 + k\overline{f}_3$, где $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ – классы, соответствующие расширениям (1)–(3) (здесь, строго говоря, нужно поднять расширения вида (2) и (3) до факторгруппы как у расширения вида (1)), числа i, j, k принимают значения 0,1, причем одновременно они не могут равняться нулю.

Напомним, что классы $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$ являются образующими группы $H^2(H_1, A)$ (напомним, что H_1 – факторгруппа расширения вида (1), кроме того, группа $H^2(H_1, A)$ имеет еще одну образующую $\overline{f}_4$, соответствующую следующему расширению. Пусть $\overline{H}_4$ – группа с двумя образующими $\overline{h}_{41}$, $\overline{h}_{42}$ и соотношениями $\overline{h}_{41}^{32} = 1$, $\overline{h}_{42}^2 = 1$, $[\,\overline{h}_{42}, \overline{h}_{41}\,] = \overline{h}_{41}^{-2}$. Если D – группа диэдра с образующими d_1 и d_2 и соотношениями $d_1^4 = 1$, $d_2^2 = 1$, $[d_2, d_1] = d_1^2$, то существуют гомоморфизмы $\delta_4 : H_4 \to D$ и $\delta_2 : \overline{H}_1 \to D$, определенные формулами

$$\delta_1(h_{41}) = d_1, \quad \delta_1(h_{42}) = d_2; \quad \delta_2(\overline{h}_{11}) = d_1, \quad \delta_2(\overline{h}_{12}) = d_2, \quad \delta_2(a) = 1.$$

Тогда прямое произведение $\overline{H}_4$ групп $\overline{H}_1$ и H_4 с объединенной факторгруппой D соответствует классу $\overline{f}_4$.

Построим теперь расширение K_0/k с группой Галуа H_1 в два этапа. Рассмотрим поле $k_0 = \mathbb{Q}_2(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1}, \sqrt{2+\sqrt{2}})$. Заметим, что $k_0/\mathbb{Q}_2$ – нормальное расширение с группой Галуа H_1, причем автоморфизм h_{11} действует тривиально на радикал $\sqrt{-1}$, а автоморфизм h_{12} действует тривиально на радикал $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Согласно строению группы Галуа максимального 2-расширения поля $\mathbb{Q}_2$ (см. [4], гл. II, §5) поле k_0 погружается как в расширение с группой $\overline{H}_1$, так и в расширение с группой H_4.

Пусть k – неразветвленное расширение поля $\mathbb{Q}_2$ и m_0 – локальная единица в поле k такая, что $k(\sqrt{m_0})/K$ – неразветвленное расширение. Положим $K_0 = k\Big(\sqrt[4]{2m_1^2}, \sqrt{-1}, \sqrt{(2+\sqrt{2})m_2}\Big)$, где m_1, m_2 – единицы поля k, причем m_1 – степень единицы m_0. Мы пока не будем фиксировать значения элементов m_1 и m_2. Напомним, что мы должны выбрать m_1 и m_2 так, чтобы расширение K_0/k погружалось бы в расширение K/k с группой Галуа F, кроме того, задача погружения $(K_0/k, \overline{G}, A)$ является неразрешимой.

Заметим, что если степень поля k над $\mathbb{Q}_2$ достаточно высока, то для погружения K_0 в K достаточно выполнения условия согласности (см. [3], гл. IV, §2), причем так как поле K содержит первообразные корни степени 8, но не содержит первообразных корней степени 16, то условие согласности сводится к разрешимости сопутствующих брауэровских задач, соответствующих $\overline{F}$-операторным характерам, порядок ядра которых делит 8. Таким образом, групповые расширения таких задач соответствуют классам когомологий из группы $H^2(\overline{F}, A)$. Кроме того, в рассматриваемых брауэровских задачах нет расширения, соответствующего классу $\overline{f}$, так как в противном случае класс $\overline{f}$ при подъеме в группу $H^2(F, A)$ был бы распадающимся.

Заметим, что брауэровская задача, групповое расширение которой соответствует классу $\overline{f}_4$, распадается по выбору m_1. Следовательно, остается рассмотреть брауэровские задачи, групповое расширение которых порождается классами $\overline{f}_1$, $\overline{f}_2$, $\overline{f}_3$. Если брауэровская задача соответствует классу $\overline{f}_3$, то будем считать, что степень $[k:\mathbb{Q}_2]$ равна $2q$, где q – нечетное число. В этом случае условие погружения такой задачи выполнено, так как оно состоит в распадении над полем k алгебры кватернионов $[-1,-1]$. Если рассматриваемые брауэровские задачи не содержат такой задачи, что положим степень $[k:\mathbb{Q}_2]$ равной нечетному числу q.

Условия разрешимости задач погружения с групповыми расширениями, соответствующими классам $\overline{f}_1$ и $\overline{f}_2$, состоят в распадении над полем k алгебр $[2, m_1]$ и $[2,5]\cdot[-1, m_2]$ соответственно. Непосредственно проверяется, что единицы m_1 и m_2 можно выбрать так, чтобы все брауэровские задачи были бы разрешимы, а задача, соответствующая классу $\overline{f}$ была бы неразрешимой, причем в качестве m_2 можно взять ± 1. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичная теорема верна, если A – циклическая группа порядка 4 или группа F действует на A как неполная группа автоморфизмов.

Литература

1. Б. Б. Лурье, *Об универсально разрешимых задачах погружения.* — Труды МИАН **183** (1990), 121–126.
2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Универсально разрешимые задачи с циклическим ядром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 189–197.
3. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, М. (1990).
4. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа.* Мир, М. (1968).

Ishkhanov V. V. and Lur'e B. B. The universally solvable embedding problem with cyclic kernel of degree 8.

It is proved that the universally solvable embedding problem with cyclic kernel of degree 8 is semidirect.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 сентября 2001