Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

М. Б. Звягина

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКТОРЫ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Пусть Λ – ассоциативное кольцо с единицей, ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ – категория левых унитарных Λ-модулей. В работах [1, 2] мы обсуждали двойственность между некоторыми специальными малыми подкатегориями ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ при различных Λ. Встает естественный вопрос: как описать категорию, двойственную ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ в целом? Вообще говоря, такая категория известна благодаря двойственности Понтрягина: это категория компактных правых Λ-модулей. Но компактность – топологическое понятие, а наша цель – построить категорию, двойственную ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, *чисто алгебраическими средствами*. Тем самым мы покажем, каким образом тополого-алгебраическая структура компактной группы на множестве может быть заменена структурой чисто алгебраической.

Аппарат, используемый нами при построении категории, двойственной ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, заимствован из оригинальных доказательств теорем о непрерывных функторах. Сами эти теоремы в основном известны, но нигде систематически не изложены, так что мы приводим их здесь не только с целью развития вышеупомянутого аппарата, но также для систематизации.

За обозначениями отсылаем читателя к статьям [1,2]. Ссылаться на эти статьи мы будем специальным образом: так, “лемма [1] 2.2” означает лемму 2.2 из [1].

§1. Классификация непрерывных функторов одного аргумента

Предложение 1.1. *Пусть* $F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ *– ковариантный аддитивный функтор. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *F перестановочен с индуктивными пределами;*

(b) *F точен справа и коммутирует с прямыми суммами.*

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, грант 00-01-00116.

Ковариантные функторы, удовлетворяющие этим эквивалентным условиям, называются *непрерывными справа.*

Предложение 1.2. *Пусть $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – контравариантный аддитивный функтор. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *F переводит индуктивные пределы в проективные;*

(b) *F точен слева и переводит прямые суммы в прямые произведения.*

Контравариантные функторы, удовлетворяющие этим эквивалентным условиям, называются *непрерывными справа.*

Предложение 1.3. *Пусть $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – ковариантный аддитивный функтор. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *F коммутирует с проективными пределами;*

(b) *F точен слева и перестановочен с прямыми произведениями.*

Ковариантные функторы, удовлетворяющие этим эквивалентным условиям, называются *непрерывными слева.*

Предложение 1.4. *Пусть $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – контравариантный аддитивный функтор. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *F переводит проективные пределы в индуктивные;*

(b) *F точен справа и переводит прямые произведения в прямые суммы.*

Контравариантные функторы, удовлетворяющие этим эквивалентным условиям, называются *непрерывными слева.*

Поскольку предложения 1.1–1.4 можно найти, например, в [6], мы даем здесь лишь набросок доказательства предложения [1.1].

Доказательство. (a)$\Rightarrow$(b) Пусть F сохраняет индуктивные пределы. Будучи аддитивным, F сохраняет конечные прямые суммы; поскольку бесконечная прямая сумма есть индуктивный предел конечных, F коммутирует также и с бесконечными прямыми суммами.

Далее, если $0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$ – точная последовательность левых Λ-модулей, то X_3 – коядро морфизма $X_1 \to X_2$, и поэтому $F(X_3)$ – коядро морфизма $F(X_1) \to F(X_2)$, т.е. последовательность $F(X_1) \to F(X_2) \to F(X_3) \to 0$ точна.

(b)$\Rightarrow$(a) Пусть F точен справа и коммутирует с прямыми суммами. Пусть $\{X_i, f_{ij}\}_{i,j\in I}$ – некоторая индуктивная система левых Λ-модулей. Тогда мы имеем точную последовательность

$$\bigoplus_{i\in I} X_i^{(I)} \to \bigoplus_{i\in I} X_i \to \varinjlim X_i \to 0,$$

где отображение $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i^{(I)} \to \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ задается так:

$$x \in X_i^{(I)} \to \begin{cases} f_{ij}(x) - x, & \text{если } \ i < j, \\ 0 & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Поэтому последовательность $\bigoplus\limits_{i\in I} F(X_i)^{(I)} \to \bigoplus\limits_{i\in I} F(X_i) \to F(\varinjlim X_i) \to 0$ также точна, откуда получаем канонический изоморфизм $\varinjlim F(X_i) = F(\varinjlim X_i)$.

§2. Функторы, непрерывные справа

Теорема 2.1. *Пусть $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – аддитивный ковариантный функтор. Тогда существует функторный морфизм $F(\Lambda)\otimes_\Lambda \to F$, который является изоморфизмом в том и только в том случае, когда F непрерывен справа.*

Замечание. Если $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – точный справа ковариантный функтор, то $F(\Lambda)\otimes_\Lambda X \to F(X)$ является изоморфизмом для конечнопредставимых ${}_\Lambda X$. Поэтому для произвольного ковариантного F имеем канонический изоморфизм $F(\Lambda)\otimes_\Lambda X \to L_0F(X)$, если ${}_\Lambda X$ конечнопредставим. С другой стороны, если $F :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – ковариантный функтор, коммутирующий с прямыми суммами, то L_0F непрерывен справа, и поэтому $F(\Lambda)\otimes_\Lambda \to L_0F$ есть изоморфизм.

Следствие теоремы 2.1 (функторы нескольких аргументов). *Пусть $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ – ассоциативные кольца с единицами; $F :_{\Lambda_1} \mathfrak{M} \times \ldots \times_{\Lambda_n} \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ – функтор, аддитивный и ковариантный по каждому из аргументов. Тогда существует функторный морфизм $F(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)\otimes_{\Lambda_1} X_1 \otimes \ldots \otimes_{\Lambda_n} X_n \to F(X_1, \ldots, X_n)$, который является изоморфизмом в том и только в том случае, когда F непрерывен справа по каждому из аргументов.*

Теорема 2.2. *Пусть* $F\colon {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ *– аддитивный контравариантный функтор. Тогда существует функторный морфизм* $F \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,F(\Lambda))$, *который является изоморфизмом в том и только в том случае, когда* F *непрерывен справа.*

Замечание. Аналогично ковариантному случаю, означенный морфизм является изоморфизмом для всех конечнопредставимых ${}_\Lambda X$, если только F точен слева. Поэтому для всякого контравариантного F имеем изоморфизм $R^0F(X) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, F(\Lambda))$ при конечнопредставимых ${}_\Lambda X$. С другой стороны, если контравариантный F переводит прямые суммы в прямые произведения, то R^0F непрерывен справа, поэтому $R^0F = \mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,F(\Lambda))$.

Следствие теоремы 2.2 (функторы нескольких аргументов). *Пусть* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ *– ассоциативные кольца с единицами,* $F :_{\Lambda_1} \mathfrak{M} \times \dots \times_{\Lambda_n} \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ *– функтор, аддитивный и контравариантный по каждому из аргументов. Тогда существует функторный морфизм*

$$F(X_1, \dots, X_n) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n}\Big(X_1 \otimes_\mathbb{Z} \dots \otimes_\mathbb{Z} X_n, F(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)\Big),$$

который является изоморфизмом тогда и только тогда, когда F *непрерывен справа по каждому из аргументов (под* $\mathrm{Hom}_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n}$ *здесь понимается множество морфизмов в категории левых полимодулей* ${}_{\Lambda_1,\dots,\Lambda_n}Y$*).*

Мы не станем приводить здесь доказательства сформулированных теорем: они достаточно просты и могут быть прочитаны, например, в [4]. Основной интерес представляют теоремы о функторах, непрерывных слева, к которым мы и перейдем.

§3. Ковариантные функторы, непрерывные слева: формулировка и начало доказательства теоремы о представимости

Теорема 3.1. *Пусть* $F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ *– аддитивный ковариантный функтор. Тогда существует функторный морфизм* $F \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}),\ )$, *который является изоморфизмом в том и только в том случае, когда* F *непрерывен слева. (Под* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id})$ *мы понимаем абелеву группу функторных морфизмом* $F \to \mathrm{Id}$, *где* $\mathrm{Id} :_\Lambda \mathfrak{M} \to_\mathbb{Z} \mathfrak{M}$ *есть стирающий функтор).*

Эта теорема, как и теоремы предыдущего параграфа, известна; доказательство может быть прочитано в [4]. Мы приводим оригинальное доказательство, как уже говорилось, ради развития *аппарата*, который будет применен в дальнейшем, при построении категории, двойственной ${}_\Lambda\mathfrak{M}$.

Доказательство. Прежде всего наделим абелеву группу $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id})$ структурой левого Λ-модуля: для функторного морфизма $\varphi : F \to \mathrm{Id}$ и произвольного левого Λ-модуля X положим $\lambda\varphi : F(X) \to X$, $(\lambda\varphi)(y) = \lambda\varphi(y)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Тривиальная проверка показывает, что морфизм $\lambda\varphi$ является функторным морфизмом, $\lambda\varphi : F \to \mathrm{Id}$, причем $(\lambda\mu)\varphi = \lambda(\mu\varphi)$, так что Λ действует на $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id})$ как кольцо левых операторов.

Далее, определим гомоморфизм $F(X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}), X)$:

$$y \in F(X) \to f_y : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}) \to X, \quad f_y(\varphi) = \big(\varphi(X)\big)(y)$$

(где $\varphi(X) : F(X) \to X$ есть значение функторного морфизма φ на объекте X). Функторность построенного морфизма проверяется стандартным образом.

Если морфизм функторов $F \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}),\ )$ является изоморфизмом, то очевидным образом F непрерывен слева (ибо таков Hom_Λ по второму аргументу). Для доказательства обратного утверждения нам потребуется несколько специальных лемм.

§4. Ковариантные функторы, непрерывные слева: ключевые леммы и завершение доказательства теоремы о представимости

Лемма 4.1. *Пусть $F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ – ковариантный аддитивный функтор, коммутирующий с прямыми произведениями. Тогда при любом ${}_\Lambda V$ и непустом множестве I $F(V^{F(V)\times I})$ является моногенным левым $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I})$-модулем. В частности, $F(V^{F(V)})$ моногенен над $F({}_\Lambda V^{F(V)})$. Напомним, что символом $\Gamma({}_\Lambda X)$ мы обозначаем кольцо эндоморфизмов модуля ${}_\Lambda X$.*

Доказательство. Фиксируем $i_0 \in I$ и определим элемент $x_I^0 \in F(V)^{F(V)\times I}$ $(= F(V^{F(V)\times I})$ следующим образом:

$$x_I^0 = \{x_{y,i}^0\}_{y\in F(V), i\in I}, \quad x_{y,i}^0 = y\delta_{i,i_0} \quad (\delta \text{ – символ Кронекера}).$$

Мы утверждаем, что элемент x_I^0 порождает $F(V)^{F(V)\times I}$ над $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I})$. Действительно, пусть $x = \{x_{y,i}\}$ – произвольный элемент $F(V)^{F(V)\times I}$. Положим $\gamma_x : V^{F(V)\times I} \to V^{F(V)\times I}$,

$\gamma_x\{v_{y,i}\} = \{v_{x_{y,i},i_0}\}$. Очевидным образом $\gamma_x \in \Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I})$, причем $F(\gamma_x)\{z_{y,i}\} = \{z_{x_{y,i},i_0}\}$; иначе говоря, $\gamma_x\{z_{y,i}\} = \{z_{x_{y,i},i_0}\}$ (по определению действия кольца $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I})$ на $F(V^{F(V)\times I})$). Имеем $\gamma_x x_I^0 = \{x^0_{x_{y,i},i_0}\} = \{x_{y,i}\} = x$. Итак, произвольный $x \in F(V)^{F(V)\times I}$ представляется в виде $\gamma_x x_I^0$, так что x_I^0 действительно порождает $F(V)^{F(V)\times I}$ над $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I})$, и лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть по-прежнему $F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ – ковариантный функтор, перестановочный с прямыми произведениями; пусть, далее, ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль, и I_0 – ядро эпиморфизма левых $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)})$-модулей $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)}) \xrightarrow{\cdot x^0} F(V^{F(V)})$, построенного в лемме* 4.1 *(при одноэлементном I; $x^0 = \{y\}_{y\in F(V)}$). Для произвольного непустого множества J обозначим через I_J ядро эпиморфизма левых $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I_0\times J})$-модулей $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I_0\times J}) \xrightarrow{\cdot x^0_{I_0\times J}} F(V^{F(V)\times I_0\times J})$, где $x^0_{I_0\times J} = \{x^0\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\}$ (j_0 – фиксированный элемент множества J; через x^0 мы по-прежнему обозначаем $\{y\}_{y\in F(V)} \in F(V)^{F(V)}$). Тогда левый идеал I_J кольца $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)\times I_0\times J})$ конечнопорожден (точнее говоря, может быть порожден двумя элементами).*

Доказательство. Для краткости положим $Y = V^{F(V)}$, $\Gamma = \Gamma({}_\Lambda Y^{I_0\times J})$. Морфизм $\gamma \in \Gamma$ лежит в идеале I_J в том и только в том случае, когда $\gamma\{x^0\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\} = 0$. Покажем, что I_J порождается над Γ двумя морфизмами γ_1 и γ_2, $\gamma_1\{y_{i,j}\} = \{i(y_{0,j_0})\}$, $\gamma_2\{y_{i,j}\} = \{y_{i,j}(1-\delta_{i,0}\delta_{j,j_0})\}$ ($y_{i,j} \in Y$). Очевидно, что γ_1, $\gamma_2 \in I_J$; для произвольного $\gamma \in I_J$ рассмотрим морфизм $\gamma' = \gamma - \gamma\gamma_2 = \gamma(id - \gamma_2)$. Имеем $\gamma'\{y_{i,j}\} = \gamma\{y_{i,j}\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\}$. Построим морфизм δ_γ так, чтобы имело место равенство $\gamma' = \delta_\gamma\gamma_1$. Для этого определим $\rho_0 : Y \to Y^{I_0\times J}$, $\rho_0(y) = \{y\delta_{i,o}\delta_{j,j_0}\}$ и $\pi_{i,j} : Y^{I_0\times J} \to Y$, $\pi_{i,j}\{y_{k,l}\} = y_{i,j}$ (т.е. $\pi_{i,j}$ – каноническая проекция $Y^{I_0\times J}$ на сомножитель с номером (i,j)). Рассмотрим композицию $\pi_{i,j}\gamma\rho_0 : Y \to Y$. Имеем $\pi_{i,j}\gamma\rho_0(x^0) = \pi_{i,j}\gamma\{x^0\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\} = 0$, ибо $\gamma \in I_J$. Поэтому $\pi_{i,j}\gamma\rho_0 \in I_0$ для всякой пары $(i,j) \in I_0 \times J$. Мы положим $\delta_\gamma\{y_{i,j}\} = \{y_{\pi_{i,j}\gamma\rho_0,j_0}\}$. Проверим, что $\gamma' = \delta_\gamma\gamma_1$:

$$\delta_\gamma\gamma_2\{y_{i,j}\} = \delta_\gamma\{i(y_{o,j_0})\} = \{\pi_{i,j}\gamma\rho_0(y_{o,j_0})\} =$$
$$= \gamma\rho_0(y_{0,j_0}) = \gamma\{y_{i,j}\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\} = \gamma'\{y_{i,j}\}.$$

Итак, мы имеем $\gamma = \gamma' + \gamma\gamma_2 = \delta_\gamma\gamma_1 + \gamma\gamma_2$ при всяком $\gamma \in I_J$. Поэтому левый идеал I_J кольца Γ действительно порождается двумя элементами γ_1 и γ_2, и лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_\mathbb{Z}\mathfrak{M}$ – ковариантный функтор, коммутирующий с прямыми произведениями, и ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль. Тогда существует такое множество $I(F,V)$, что $F(V)^{I(F,V)\times J}$ – конечнопредставимый левый $\Gamma({}_\Lambda V^{I(F,V)\times J})$-модуль при произвольном непустом множестве J.*

Доказательство. Положим $I(F,V) = F(V) \times I_0$, где I_0 – левый идеал кольца $\Gamma({}_\Lambda V^{F(V)})$, описанный в лемме 4.2. Согласно леммам 4.1, 4.2 имеем резольвенту $\Gamma({}_\Lambda V^{I(F,V)\times J})$-модуля $F(V)^{I(F,V)\times J}$

$$\Gamma\left({}_\Lambda V^{I(F,V)\times J}\right)^2 \to \Gamma({}_\Lambda V^{I(F,V)\times J}) \to F(V)^{I(F,V)\times J} \to 0$$

при всяком непустом множестве J.

Следствие 2. *Пусть по-прежнему F ковариантен и коммутирует с прямыми произведениями. Для инъективного ${}_\Lambda V$ левый $\Gamma({}_\Lambda V^{(F,V)\times J})$-модуль $F(V)^{F(V)\times J}$ $V^{I(F,V)\times J}$-рефлексивен при любом непустом множестве J. Иными словами, существует такая прямая степень $V_0 = V^{I(F,V)}$ модуля ${}_\Lambda V$, что $F(V_0)^J$ есть V_0^J-рефлексивный левый $\Gamma({}_\Lambda V_0^J)$-модуль при произвольном непустом J.*

Доказательство. Достаточно сослаться на следствие из леммы [1] 2.1.

Лемма 4.3. *Пусть F ковариантен и коммутирует с прямыми произведениями. Для произвольного модуля ${}_\Lambda V$ и непустого множества I всякий гомоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V^I)$-модулей $F(V)^I \to V^I$ имеет вид φ^I при некотором $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V)}(F(V),V)$. Иными словами, существует мономорфизм $H_{V^I}(F(V^I)) \to H_V(F(V))$, $\varphi^I \to \varphi$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_I \in H_{V^I}(F(V)^I)$, тогда морфизм φ_I коммутирует со всеми морфизмами над Λ $V^I \xrightarrow{\gamma} V^I$, так что имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} F(V)^I & \xrightarrow{\varphi_I} & V^I \\ {\scriptstyle F(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ F(V)^I & \xrightarrow{\varphi_I} & V^I. \end{array}$$

Пусть для начала $\gamma = \gamma_i : V^I \to V^I$ – проекция на i-тый сомножитель, $\gamma_i\{v_j\} = \{v_i\delta_{i,j}\}$. Тогда $F(\gamma_i)\{y_j\} = \{y_i\delta_{i,j}\}(\{y_i\} \in F(V)^I)$.

Коммутативность нарисованной диаграммы при $\gamma = \gamma_i$ означает, что если $\varphi_I\{y_i\} = \{v_j\}$, то $\varphi_I\{\delta_{i,j}y_j\} = \{\delta_{i,j}v_j\}$ и, в частности, i-тая компонента элемента $\varphi_I(y)$ зависит только от i-той компоненты $y \in F(V)^I$, т.е. $\varphi_I = \prod\limits_{i\in I}\varphi_i$, $\varphi_i \in H_V(F(V))$. Далее, применяя эту же коммутативную диаграмму к морфизму $\gamma = \gamma_{i,j}$, меняющему i-тую и j-тую компоненты V^I местами ($i \neq j$), получим $\varphi_i = \varphi_j$ при любых i, $j \in I$, т.е. $\varphi_I = \varphi^I$ при некотором $\varphi \in H_V(F(V))$. Что и требовалось.

Лемма 4.4. *Пусть F – ковариантный функтор, коммутирующий с прямыми произведениями; ${}_\Lambda V$ – инъективный кообразующий и $V_0 = V^{I(F,V)}$-модуль, построенный в следствии 2 из лемм 4.1, 4.2. Тогда при всяком $\varphi \in H_{V_0}(F(V_0))$ $\varphi^I \in H_{V_0^I}(F(V_0^I))$ для любого непустого множества I. Иными словами, мономорфизм $H_{V_0^I}(F(V_0^I)) \to H_{V_0}(F(V_0))$, $\varphi^I \to \varphi$, построенный в предыдущей лемме, является изоморфизмом при любом непустом I.*

Доказательство. В силу следствия 2 из лемм 4.1, 4.2 $F(V_0^I)$ является V_0^I-рефлексивным левым $\Gamma({}_\Lambda V_0^I)$-модулем, так что имеет место изоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V_0^I)$-модулей

$$F(V_0^I) \xrightarrow{f(I)} \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{V_0^I}F(V_0^I), V_0^I).$$

С другой стороны, возводя в степень I изоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V_0)$-модулей $F(V_0) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{V_0}F(V_0), V_0)$, получим изоморфизм $F(V_0)^I \xrightarrow{g^I} \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{V_0}F(V_0), V_0^I)$. Обозначим через $\nu_{V_0,I}$ мономорфизм, построенный в лемме 4.3: $H_{V_0^I}F(V_0^I) \xrightarrow{\nu_{V_0,I}} H_{V_0}F(V_0)$, $\nu_{V_0,I}(\varphi^I) = \varphi$, и проверим коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
F(V_0)^I \arrow[r, "f(I)"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{V_0^I}F(V_0^I), V_0^I) \\
\mathrm{Hom}_\Lambda(H_{V_0}(F(V_0), V_0^I). \arrow[u, "(g^I)^{-1}"] \arrow[ur, "G_{V_0^I}(\nu_{V_0,I})"'] &
\end{tikzcd}$$

Действительно,

$$f(I)(g^I)^{-1}(\psi \to \{\psi(y_i)\}) = f(I)\{y_i\} = (\varphi^I \to \{\varphi(y_i)\});$$

$$G_{V_0^I}(\nu_{V_0,I})(\psi \to \{\psi(y_i)\}) = (\varphi^I \to (\psi \to \{\psi(y_i)\}) \circ \varphi^I = (\varphi^I \to \{\varphi(y_i)\}).$$

Таким образом, нарисованная диаграмма действительно коммутативна, и поэтому $G_{V_0^I}(\nu_{V_0,I})$ есть изоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V_0^I)$-модулей.

Далее, обозначив через C коядро мономорфизма левых Λ-модулей $\nu_{V_0,I}$, будем иметь точную (в силу инъективности V) последовательность $0 \to G_{V_0^I}(C) \to G_{V_0^I}(H_{V_0}F(V_0)) \xrightarrow{G_{V_0^I}\nu_{V_0,I}} G_{V_0^I}(H_{V_0^I}F(V_0^I)) \to 0$, и поскольку $G_{V_0^I}\nu_{V_0,I}$ – изоморфизм, получаем $G_{V_0^I}(C) = 0$ и, следовательно, $C = 0$ (т.к. V_0^I – кообразующий), т.е. $\nu_{V_0,I}$ – изоморфизм. Что и требовалось.

Лемма 4.5. *Пусть по-прежнему F коммутирует с прямыми произведениями, ${}_\Lambda V$ – инъективный кообразующий, и $V_0 = V^{I(F,V)}$ – модуль, построенный в следствии 2 из лемм 4.1, 4.2. Для произвольного непустого множества I гомоморфизм*

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(F(V_0^I), V_0^I), \quad \eta(\varphi) = \varphi(V_0^I),$$

является изоморфизмом левых Λ-модулей. При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(V_0^I) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(F(V_0^I), V_0^I), V_0^I) = G_{V_0^I}H_{V_0^I}F(V_0^I) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\Lambda(\eta, id)"'] \\
 & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}), V_0^I),
\end{tikzcd}$$

в которой косая стрелка есть значение функторного морфизма, построенного в §3, на объекте V_0^I.

Доказательство. Для начала заметим, что $\eta(\varphi) = \varphi(V_0^I) : F(V_0^I) \to V_0^I$ есть действительно гомоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V_0^I)$-модулей при всяком функторном морфизме $F \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Id}$. При этом η – гомоморфизм левых Λ-модулей. Покажем, что это изоморфизм.

Пусть $\psi^I \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(F(V_0^I), V_0^I)$, где $\psi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0)}(F(V_0), V_0)$. Морфизм $\varphi(V_0^J) = \psi^J : F(V_0^J) \to V_0^J$ является функторным для ограничений функторов F и Id на полную подкатегорию ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, объекты которой суть левые Λ-модули вида V_0^J. Действительно, диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
F(V_0^J) \arrow[r, "F(\gamma)"] \arrow[d, "\psi^J"'] & F(V_0^J) \arrow[d, "\psi^J"'] \\
V_0^J \arrow[r, "\gamma"] & V_0^J.
\end{tikzcd}$$

коммутативны при $\gamma \in \Gamma({}_\Lambda V_0^J)$, т.к. в силу леммы 4.4 $\psi^J \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^J)}(F(V_0^J), V_0^J)$ – а отсюда следует коммутативность диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} F(V_0^J) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(V_0) \\ {\scriptstyle \psi^J}\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\downarrow \\ V_0^J & \xrightarrow{\gamma} & V_0 \end{array}$$

при $\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(V_0^J, V_0)$, а тем самым и диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} F(V_0^J) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(V_0^K) \\ {\scriptstyle \psi^J}\downarrow & & {\scriptstyle \psi^K}\downarrow \\ V_0^J & \xrightarrow{\gamma} & V_0^K. \end{array}$$

при $\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(V_0^J, V_0^K)$ – а это и означает функторность морфизма $\varphi(V_0^J) = \psi^J$.

Итак, исходя из гомоморфизма $\psi^I \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(F(V_0^I), V_0^I)$ мы построили морфизм $\varphi = \nu_0(\psi^I)$ ограничений функторов F и Id на полную подкатегорию ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, имеющую объектами модули вида V_0^J. Поскольку всякий левый Λ-модуль обладает гомотопически единственной резольвентой из модулей вида V_0^J, а функтор F точен слева, этот морфизм допускает продолжение до функторного $\nu(\psi) : F \to \mathrm{Id}$. Очевидно, $\nu : \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(F(V_0^J), V_0^I) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id})$ есть гомоморфизм левых Λ-модулей, обратный к η, и таким образом η действительно является изоморфизмом.

Коммутативность диаграммы, изображенной в формулировке леммы, проверяется непосредственно – мы позволим себе опустить соответствующие выкладки и считать лемму доказанной.

Завершение доказательства теоремы 3.1. Пусть F – ковариантный функтор, непрерывный слева. Нам нужно доказать, что функторный морфизм $F \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}),\ )$, построенный в §3, является изоморфизмом. Лемма 4.5 показывает, что этот морфизм на объектах вида V_0^I распадается в композицию двух изоморфизмов и потому сам является изоморфизмом (под V_0 мы по-прежнему понимаем инъективный кообразующий левый Λ-модуль, построенный в следствии 2 из лемм 4.1, 4.2). Построив для произвольного ${}_\Lambda X$ резольвенту вида $0 \to X \to V_0^I \to V_0^J$ и применив 5-лемму к коммутативной диаграмме

$$
\begin{array}{ccccc}
0 \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & F(V_0^I) & \longrightarrow & F(V_0^J) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),V_0^I) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),V_0^J)
\end{array}
$$

(что возможно в силу точности слева функторов F и Hom_Λ $(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),\ ))$, получим изоморфизм $F(X)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}$ $(F,\mathrm{Id}),X)$, индуцированный на X морфизмом функторов $F \to$ $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),\ )$. Таким образом, этот функторный морфизм действительно является изоморфизмом, и теорема доказана.

Замечание. Если $F\ :_\Lambda \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – ковариантный функтор, коммутирующий с прямыми произведениями, то правый производный R^0F непрерывен слева и потому представим, $R^0F =$ $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F,\mathrm{Id}),\ )$.

§5. Непрерывные слева контравариантные функторы

Теорема 5.1. *Пусть $F\ :_\Lambda \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – непрерывный слева контравариантный аддитивный функтор. Тогда $F = 0$.*

Замечание 5.1. На категории, двойственной ${}_\Lambda\mathfrak{M}$, существуют ненулевые контравариантные функторы, непрерывные слева – это в точности функторы, двойственные $A\otimes_\Lambda$ при $A_\Lambda \neq 0$.

Замечание 5.2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $F(V) = 0$, где ${}_\Lambda V$ – некоторый (фиксированный!) инъективный кообразующий.

Доказательство. Поскольку F переводит прямые произведения в прямые суммы, из $F(V) = 0$ следует $F(V^I) = 0$ при любом непустом множестве I. Всякий ${}_\Lambda X$ вкладывается в V^I при некотором I, $0 \to X \to V^I$, и в силу точности F справа имеем точную последовательность $F(V^I) \to F(X) \to 0$, откуда $F(X) = 0$.

Замечание 5.3. Для доказательства теоремы при произвольном Λ достаточно доказать ее при $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Для произвольной абелевой группы ${}_{\mathbb{Z}}Y$ можно рассмотреть ковариантный функтор ${}_{\Lambda}\mathfrak{M}\to{}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$, $X\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(X),Y)$. Этот функтор непрерывен слева и поэтому, согласно теореме предыдущего параграфа, он представим некоторым левым Λ-модулем $G(Y)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(X),Y) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(G(Y),X)$. Стандартная проверка показывает, что $G(Y)$ зависит от Y контравариантным образом, причем $G :_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M} \to_{\Lambda} \mathfrak{M}$ есть функтор, непрерывный слева. Поэтому, если сформулированная теорема верна при $\Lambda = \mathbb{Z}$, то $G = 0$, откуда $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(X),\ ) = 0$ при всяком ${}_{\Lambda}X$ и тем самым $F = 0$, так что теорема верна при произвольном Λ.

Доказательство теоремы. Согласно вышеприведенным замечаниям, достаточно рассмотреть случай $\Lambda = \mathbb{Z}$ и доказать, что $F(V) = 0$ для некоторой инъективной кообразующей абелевой группы ${}_{\mathbb{Z}}V$. Фиксируем инъективную кообразующую ${}_{\mathbb{Z}}V$ и бесконечное множество I, и рассмотрим каноническое вложение $0 \to V^{(I)} \to V^{I}$. В силу точности F справа имеем эпиморфизм $F(V^{I}) \to F(V^{(I)}) \to 0$. Канонический морфизм $F(V)^{(I)} \to F(V^{I})$ является изоморфизмом (именно этот изоморфизм мы имеем в виду, когда говорим, что F переводит прямые произведения в прямые суммы). Поэтому композиция $F(V)^{(I)} \to F(V^{I}) \to F(V^{(I)})$ есть эпиморфизм. Но с другой стороны эта композиция является мономорфизмом как индуктивный предел мономорфизмов $F(V)^{n} \to F(V^{(I)})$. Отсюда видно, что $F(V^{I}) \to F(V^{(I)})$ – изоморфизм. Поскольку $V^{(I)}$ – инъективная абелева группа, точная последовательность $0 \to V^{(I)} \to V^{I} \to V^{I}/V^{(I)} \to 0$ расщепляется, поэтому $F(V^{I}/V^{(I)}) = 0$, откуда благодаря точности F справа и "диагональному" вложению $V \to V^{I}/V^{(I)}$, $v \in V \to \{v\}_{i\in I} \mod V^{(I)}$ следует, что $F(V) = 0$. Теорема доказана.

§6. Характеризация непрерывных функторов нескольких аргументов

Теорема 6.1. *Пусть $\Lambda_1,\dots,\Lambda_m$, $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$, $\Delta_1,\dots,\Delta_k$ – ассоциативные кольца с единицами, и $F :_{\Lambda_1}\mathfrak{M}\times\ldots\times_{\Lambda_m}\mathfrak{M}\times_{\Gamma_1}\mathfrak{M}\times\ldots\times_{\Gamma_n}\mathfrak{M}\times{}_{\Delta_1}\mathfrak{M}\times\ldots\times_{\Delta_k}\mathfrak{M}\to_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}$ – ненулевой аддитивный функтор $n+m+k$ аргументов, контравариантный и непрерывный справа по первым m аргументам, ковариантный и непрерывный справа по следующим n аргументам и, наконец, ковариантный и непрерывный слева по последним k аргументам. Тогда возможны три случая:*

1) $m = k = 0$, *и* $F(Y_1, \dots, Y_n) = F(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \otimes_{\Gamma_1} Y_1 \otimes \dots \otimes_{\Gamma_n} Y_n$;
2) $n = k = 0$, *и* $F(X_1, \dots, X_m) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m}(X_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \dots \otimes_{\mathbb{Z}} X_m, F(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m))$;
3) $n = 0$, $k = 1$ $(\Delta_1 = \Delta)$, *и*

$$F(X_1, \dots, X_m, Z) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m}\big(X_1 \otimes_{\Lambda_1} \dots \otimes_{\Lambda_m} X_m,$$
$$\mathrm{Hom}_{\Delta}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m),\ ), \mathrm{Id}), Z\big).$$

Доказательство. (1) Пусть $F :_{\Delta_1} \mathfrak{M} \times_{\Delta_2} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – функтор, ковариантный и непрерывный слева по обоим аргументам. Тогда $F = 0$.

В самом деле, такой функтор представим, скажем, по второму аргументу:

$$F(Z_1, Z_2) = \mathrm{Hom}_{\Delta_2}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F(Z_1,\ ), \mathrm{Id}), Z_2),$$

при этом $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F(Z_1,\ ), \mathrm{Id})$ обязан быть контравариантным функтором аргумента Z_1, непрерывным слева, и поэтому равен нулю (в силу теоремы 5.1), так что $F = 0$.

(2) Пусть $F :_{\Gamma} \mathfrak{M} \times_{\Delta} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – ковариантный функтор двух аргументов, непрерывный справа по первому аргументу и слева по второму. Тогда $F = 0$.

Действительно, в этом случае $F(Y, Z) = F(\Gamma, Z) \otimes_{\Delta} Y$, и если $F(\Gamma, Z) \neq 0$, то этот функтор не может быть непрерывным слева по аргументу Z, т.к. $\otimes_{\Delta} Y$ не коммутирует с прямыми произведениями, если Y не является конечнопорожденным. Поэтому $F(\Gamma, Z) = 0$, и тем самым $F = 0$.

(3) Пусть $F :_{\Lambda} \mathfrak{M} \otimes_{\Delta} \mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ – непрерывный справа функтор двух аргументов, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму. Тогда $F = 0$.

Действительно, $F(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, F(\Lambda, \Gamma) \otimes_{\Gamma} Y)$, и если $F(\Lambda, \Gamma) \neq 0$, то этот функтор не может быть непрерывным справа по аргументу Y (ибо $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(X,\ )$ не коммутирует с прямыми суммами при бесконечнопорожденных ${}_{\Lambda}X$). Поэтому $F(\Lambda, \Gamma) = 0$, и $F = 0$.

Суммируя (1), (2) и (3), получим утверждение теоремы.

§7. Переформулировка полученных результатов на языке категорий функторов

Обозначим через ${}_{\Lambda}RgCo$, ${}_{\Lambda}RgCt$, ${}_{\Lambda}LfCo$ и ${}_{\Lambda}LfCt$ соответственно категории непрерывных справа ковариантных, непрерывных справа контравариатных, непрерывных слева ковариантных и непрерывных слева контравариантных функторов ${}_\Lambda\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ и функторных морфизмов. Теоремы, доказанные в §§1–5, допускают следующую переформулировку:

(1) Категория ${}_\Lambda RgCo$ эквивалентна $\mathfrak{M}_\Lambda$;

(2) Категория ${}_\Lambda RgCt$ эквивалентна ${}_\Lambda\mathfrak{M}$;

(3) Категория ${}_\Lambda LfCo$ двойственна ${}_\Lambda\mathfrak{M}$;

(4) Категория ${}_\Lambda LfCt$ тривиальна.

Наиболее интересен (и наименее тривиален) результат о двойственности между ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и ${}_\Lambda LfCo$. В совокупности с двойственностью Понтрягина этот результат дает эквивалентность между ${}_\Lambda LfCo$ и категорией Comp_Λ компактных правых Λ-модулей. Выражаясь крайне нестрого, компактный правый Λ-модуль есть непрерывный слева ковариантный функтор ${}_\Lambda\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$. Таким образом, мы уже получили чисто алгебраическую категорию ${}_\Lambda LfCo$, двойственную ${}_\Lambda\mathfrak{M}$. Однако объекты этой категории описываются неконструктивно. Категория, которой будет посвящена оставшаяся часть работы, строится гораздо более конструктивно, нежели эквивалентная ей ${}_\Lambda LfCo$, хотя и неинвариантно: она зависит от выбора инъективного кообразующего ${}_\Lambda V$. Однако наличие в категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ *канонического* инъективного кообразующего $\mathrm{Cont}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ обеспечит нам построение категории, *канонически* двойственной ${}_\Lambda\mathfrak{M}$. Это построение покажет, как и было обещано, каким образом можно заменить тополого-алгебраическую структуру компактного Λ-модуля на множестве структурой чисто алгебраической.

§8. ${}_\Lambda V$-МУЛЬТИСТРУКТУРИРОВАННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Пусть ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль. Мы будем говорить, что абелева группа Y ${}_\Lambda V$-*мультиструктурирована*, если на группах вида Y^I заданы согласованные между собой структуры левых $\Gamma({}_\Lambda V^I)$-модулей. Это означает, что всякому непустому множеству I поставлен в соответствие кольцевой гомоморфизм $\alpha(I) : \Gamma({}_\Lambda V^I) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)$, причем коммутативны всевозможные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} \big(\Gamma({}_\Lambda V^I)^{(J)}\big)^J & \longrightarrow & \Gamma({}_\Lambda V^{I\times J}) \\ {\scriptstyle (\alpha(I)^{(J)})^J}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha(I\times J)}\Big\downarrow \\ \big(\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)^{(J)}\big)^J & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^{I\times J}) \end{array}$$

с естественными горизонтальными стрелками

$$\{\gamma_{k,j}\}_{k,j\in J} \to \Big(\{y_j\}_{j\in J} \to \Big\{\sum_{k\in J}\gamma_{k,j}(y_k)\Big\}_{j\in J}\Big),$$

$\gamma_{k,j} \in \Gamma({}_\Lambda V^I)$ и $y_j \in V^I$ для верхней строки,

$\gamma_{k,j} \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(Y^I)$ и $y_j \in Y^I$ – для нижней.

Под ${}_\Lambda V$-*мультиморфизмом* мы будем понимать такой гомоморфизм $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ ${}_\Lambda V$-мультиструктурированных абелевых групп, что при всяком непустом I $Y_1^I \xrightarrow{\varphi^I} Y_2^I$ есть гомоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V^I)$-модулей. Категорию ${}_\Lambda V$-мультиструктурированных абелевых групп и ${}_\Lambda V$-мультиморфизмов мы обозначим через ${}_\Lambda V$-Mult.

Пример. Если X – левый Λ-модуль, то функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \ )$ порождает ${}_\Lambda V$-мультиструктуру на абелевой группе $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, V)$ (индуцированную системой естественных изоморфизмов $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, V^I) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, V)^I$). В частности, имеем каноническую ${}_\Lambda V$-мультиструктуру на $V = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, V)$.

В следующем параграфе мы покажем, что в случае инъективного кообразующего ${}_\Lambda V$ приведенный пример является общим, т.е. всякая ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа изоморфна $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, V)$ при некотором ${}_\Lambda X$.

§9. Теорема о представимости ${}_\Lambda V$-мультиструктуры

Теорема 9.1. *Пусть Y – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа. Тогда существует ${}_\Lambda V$-мультиморфизм*

$$Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y, V), V),$$

который является изоморфизмом, если ${}_\Lambda V$ – инъективный кообразующий.

Доказательство. Поскольку доказательство этой теоремы в точности копирует доказательство теоремы 3.1 (вместе с используемым аппаратом), мы ограничимся построением ${}_\Lambda V$-мультиморфизма $Y \xrightarrow{\theta_Y} \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y,V),V)$ и формулировками лемм. θ_Y строится так: $(\theta_Y(y))(\psi) = \psi(y)$ для $y \in Y$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y,V)$.

Лемма 9.1. *Пусть ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль, Y – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа. Тогда при любом непустом множестве I $Y^{Y\times I}$ есть моногенный левый Λ-модуль, порождаемый элементом $x_I^0 = \left\{y\delta_{i,i_0}\right\}_{y\in Y, i\in I}$ при фиксированном $i_0 \in I$. В частности, Y^Y порождается над $\Gamma({}_\Lambda V^Y)$ элементом $x^0 = \{y\}_{y\in Y}$.*

Лемма 9.2. *Пусть по-прежнему ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль и Y – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа. Обозначим через I_0 ядро эпиморфизма левых $\Gamma({}_\Lambda V^Y)$-модулей, построенного в лемме 9.1, $\Gamma({}_\Lambda V^Y) \xrightarrow{\cdot x^0} Y^Y$, и через I_J – ядро эпиморфизма $\Gamma({}_\Lambda V^{Y\times I_0\times J})$-модулей $\Gamma({}_\Lambda V^{Y\times I_0\times J}) \xrightarrow{\cdot x^0_{I_0\times J}} Y^{Y\times I_0\times J}$, где $x^0_{I_0\times J} = \{x^0\delta_{i,0}\delta_{j,j_0}\}$, $x^0 = \{y\}_{y\in Y}$ (при произвольном непустом множестве J и фиксированном $j_0 \in J$). Тогда левый идеал I_J кольца $\Gamma({}_\Lambda V^{Y\times I_0\times J})$ конечнопорожден (точнее, порождается двумя элементами).*

Следствие 1. *Пусть Y – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа. Тогда существует такое множество $I(Y)$, что $Y^{I(Y)\times J}$ – конечнопредставимый левый $\Gamma({}_\Lambda V^{I(Y)\times J}$-модуль при произвольном непустом множестве J.*

Следствие 2. *Пусть ${}_\Lambda V$ инъективен, Y – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа, и $I(Y)$ – множество, построенное в следствии 1. Далее, положим $V_0 = V^{I(Y)}$ и $Y_0 = Y^{I(Y)}$. Тогда $\Gamma({}_\Lambda V_0^J)$-модуль Y_0^J V_0^J-рефлексивен при произвольном непустом множестве J.*

Лемма 9.3. *Пусть ${}_\Lambda V$ – произвольный модуль, и Y_1, Y_2 – ${}_\Lambda V$-мультиструктурированные абелевы группы. Для произвольного непустого I всякий гомоморфизм левых $\Gamma({}_\Lambda V^I)$-модулей $Y_1^I \to Y_2^I$ имеет вид φ^I при некотором $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V)}(Y_1,Y_2)$. В частности, положив $Y_2 = V$, имеем мономорфизм $H_{V^I}(Y^I) \to H_V(Y)$, $\varphi^I \to \varphi$.*

Лемма 9.4. *Пусть* ${}_\Lambda V$ *– инъективный кообразующий,* Y *–* ${}_\Lambda V$*-мультиструктурированная абелева группа и* $V_0 = V^{I(Y)}$ *– модуль, построенный в следствии 2 из лемм 9.1, 9.2, а* $Y_0 = Y^{I(Y)}$*. Тогда при всяком* $\varphi \in H_{V_0}(Y_0)$ *имеем* $\varphi^I \in H_{V_0^I}(Y_0^I)$ *для произвольного непустого множества* I*. Иными словами, мономорфизм* $H_{V_0^I}(Y^I) \to H_{V_0}(Y_0)$*, построенный в лемме 9.3, является изоморфизмом при любом непустом* I*.*

Лемма 9.5. *Пусть по-прежнему* ${}_\Lambda V$ *– инъективный кообразующий,* Y *–* ${}_\Lambda V$*-мультиструктурированная абелева группа,* Y_0 *и* V_0 *– модули, построенные в следствии 2 из лемм 9.1, 9.2. Тогда гомоморфизм* $\eta : \mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y, V) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V^I)}(Y_0^I, V_0^I)$, $\eta(\varphi) = \varphi^I$*, является изоморфизмом левых* Λ*-модулей, причем коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} Y_0^I & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{\Gamma({}_\Lambda V_0^I)}(Y_0^I, V_0^I), V_0^I) \\ & \theta_{Y_0}^I \searrow & \Big\downarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\eta, id) \\ & & \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y, V), V_0^I). \end{array}$$

Сформулировав эти пять лемм, которые доказываются дословно так же, как и леммы §4 (ибо в приведенных там доказательствах используется лишь тот факт, что функтор F, коммутирующий с прямыми произведениями, индуцирует на всякой абелевой группе $F(V)$ ${}_\Lambda V$-мультиструктуру), мы будем считать теорему 9.1 о представимости доказанной.

Замечание 9.1. Доказанная теорема дает эффективный способ построения ${}_\Lambda V$-мультиструктурированных групп для инъективных кообразующих ${}_\Lambda V$. В самом деле, если $Y = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, V)$, то применив функтор G_V к свободной резольвенте $\Lambda^{(J)} \to \Lambda^{(I)} \to X \to 0$ левого Λ-модуля X, будем иметь точную последовательность $0 \to Y \to V^I \xrightarrow{\theta} V^J$, где гомоморфизм θ задается матрицей с финитными столбцами $\{\lambda_{i,j}\} \in (\Lambda^{(I)})^J$, $\theta\{v_i\} = \Big\{ \sum\limits_{i \in I} \lambda_{ij} v_i \Big\}$. Таким образом, всякая ${}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа изоморфна ядру некоторого гомоморфизма θ указанного вида – со структурами $\Gamma({}_\Lambda V^K)$-модуля на Y^K, индуцированными гомоморфизмами левых $\Gamma({}_\Lambda V^K)$-модулей $(V^K)^I \xrightarrow{\theta^K} (V^K)^J$.

Гомоморфизмы $V^I \to V^J$, задаваемые матрицами $\{\lambda_{i,j}\} \in (\Lambda^{(I)})^J$, мы будем в дальнейшем называть ${}_\Lambda V$*-непрерывными*. Итак, абелева группа Y допускает ${}_\Lambda V$-мультиструктуру в том и только в том случае, когда она изоморфна ядру ${}_\Lambda V$-непрерывного гомоморфизма. Поскольку свободная резольвента ${}_\Lambda X\colon \Lambda^{(J)} \to \Lambda^{(I)} \to 0$ определена с точностью до гомотопической эквивалентности, ${}_\Lambda V$-непрерывная резольвента $0 \to V^{(I)} \to V^{(J)}$ определена с точностью до *${}_\Lambda V$-непрерывной гомотопической эквивалентности* (т.е. гомотопической эквивалентности комплексов в категории, объекты которой суть модули вида V^I, а морфизмы ${}_\Lambda V$-непрерывны). Таким образом, задание ${}_\Lambda V$-мультиструктуры на Y равносильно указанию ${}_\Lambda V$-непрерывно гомотопического класса ${}_\Lambda V$-непрерывных резольвент $Y\colon 0 \to V^I \to V^J$.

§10. Основной результат двойственности

Теорема 10.1. *Пусть ${}_\Lambda V$ – инъективный кообразующий. Тогда категория ${}_\Lambda V$-Mult двойственна категории ${}_\Lambda\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Требуемая двойственность осуществляется функторами

$$ {}_\Lambda\mathfrak{M} \rightleftarrows {}_\Lambda V\text{-Mult}, \quad {}_\Lambda X \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X,V), \quad \mathrm{Hom}_{V\text{-Mult}}(Y,V) \leftarrow Y. $$

Результаты §9 показывают, что эти функторы являются взаимно обратными.

Замечание. При *каноническом* инъективном кообразующем $V = \mathrm{Cont}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ мы получаем *каноническую* двойственность между ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и ${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$-Mult.

Приведем заодно функторы, осуществляющие двойственность Понтрягина, двойственность между ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и ${}_\Lambda LfCo$ и эквивалентность категорий ${}_\Lambda LfCo$ и ${}_\Lambda V$-Mult.

Сужение двойственности Понтрягина на категорию ${}_\Lambda\mathfrak{M}$: ${}_\Lambda\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathrm{Comp}_\Lambda$, ${}_\Lambda X \to$(компактный правый Λ-модуль $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, \mathrm{Cont}(\Lambda))$) и (компактный правый Y_Λ) $\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_{\mathbb{Z}}}(Y, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_\Lambda}(Y, \mathrm{Cont}(\Lambda))$ (в последней формуле $\mathrm{Cont}(\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ наделяется структурой компактного правого Λ-модуля, обеспечиваемой классической двойственностью Понтрягина).

Двойственность между ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ и ${}_\Lambda LfCo$:

$$ {}_\Lambda Y \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Y,\ ) \quad \text{и} \quad (F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(F, \mathrm{Id}). $$

Эквивалентность между ${}_\Lambda LfCo$ и ${}_\Lambda V$-Mult:

$(F : {}_\Lambda\mathfrak{M} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathfrak{M}) \to ({}_\Lambda V$-мультиструктурированная абелева группа $F(V)$ со структурами левых $\Gamma({}_\Lambda V^I)$-модулей на

$F(V)^I = F(V^I)$, индуцированными функтором F) и (${}_\Lambda V$-мультиструктура Y) $\to$(функтор $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda V\text{-Mult}}(Y,V),\ )$: ${}_\Lambda\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$).

§11. Замена топологической структуры на алгебраическую

Из результатов §10 следует, что задание структуры компактного правого Λ-модуля на абелевой группе Y равносильно заданию непрерывного слева ковариантного функтора ${}_\Lambda\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$, принимающего значение Y на модуле ${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$ или, эквивалентно, ${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиструктурированию Y.

Именно, если Y_Λ – компактный правый Λ-модуль и $\gamma \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Cont}(\Lambda)^I, \mathrm{Cont}(\Lambda)^I)$, то морфизм $\gamma : Y^I \to Y^I$ должен коммутировать со всеми степенями непрерывных морфизмов компактных правых Λ-модулей $Y^I \xrightarrow{\varphi^I} U^I$ $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}\Lambda}(Y,U)$) (ибо при равносильных топологической и чисто алгебраической структурах понятия “непрерывный гомоморфизм компактных правых Λ-модулей” и “${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиморфизм” должны совпадать). Поэтому непрерывное вложение $Y \xrightarrow{\eta} \mathrm{Cont}(\Lambda)^{Y^*}$, $\eta(y) = \{x(y)\}$ ($Y^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_\Lambda}(Y, \mathrm{Cont}(\Lambda))$) должно обеспечивать нам коммутативность диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \xrightarrow{\eta^I} & \mathrm{Cont}(\Lambda)^{Y^*\times I} \\ {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow \\ Y^I & \xrightarrow{\eta^I} & \mathrm{Cont}(\Lambda)^{Y^*\times I} \end{array}$$

(мы естественным образом полагаем

$$\gamma : \mathrm{Cont}(\Lambda)^{Y^*\times I} \to \mathrm{Cont}(\Lambda)^{Y^*\times I} =$$
$$=\gamma^{Y^*} : (\mathrm{Cont}(\Lambda)^I)^{Y^*} \to (\mathrm{Cont}(\Lambda)^I)^{Y^*}).$$

Отсюда видим, что $\gamma\eta^I(Y^I) \subset \eta^I(Y^I)$, и формула $\gamma\{y_i\}_{i\in I} = (\eta^I)^{-1}\gamma\eta^I\{y_i\}_{i\in I}$ дает искомую $\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиструктуру на Y.

Обратно, если абелева группа Y_Λ $\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиструктурирована, то объявив базой окрестностей нуля в Y множества вида $f^{-1}(U)$, где $f \in \mathrm{Hom}_{{}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)\text{-Mult}}(Y, \mathrm{Cont}(\Lambda))$, U – базисная окрестность нуля в $\mathrm{Cont}(\Lambda)$, получим структуру компактного правого Λ-модуля на Y. Отсюда имеем

Предложение 11.1. *Структура компактного правого Λ-модуля эквивалентна ${}_\Lambda\mathrm{Comp}(\Lambda)$-мультиструктуре.*

В частности, структура компактной абелевой группы эквивалентна ${}_\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктуре.

Предложение 11.2. (a) *Структура связного компактного правого Λ-модуля на Y эквивалентна такой ${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиструктуре, что $\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)\text{-Mult}}(Y, \mathrm{Cont}(\Lambda))$ есть левый Λ-модуль, не имеющий элементов конечного порядка.*

(b) *Структура вполне несвязного компактного правого Λ-модуля на Y эквивалентна такой ${}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)$-мультиструктуре, что $\mathrm{Hom}_{{}_\Lambda\mathrm{Cont}(\Lambda)\text{-Mult}}(Y, \mathrm{Cont}(\Lambda))$ состоит из элементов конечного порядка.*

Это предложение и подобные ему, описывающие чисто алгебраически топологические свойства компактных групп, являются следствиями теоремы двойственности Понтрягина (см. [5], гл. 6, §38).

§12. Рациональный остов и пополнение

Можно задать структуру компакта на абелевой группе Y более экономным способом, чем это было сделано в предыдущем параграфе. Именно, если абелева группа Y допускает структуру компакта, то она тем самым допускает и структуру левого $\Gamma({}_\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модуля, поскольку $Y = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, где $X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_\mathbb{Z}}(Y, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$. При этом абелева группа $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ канонически изоморфна IY, где I – правый идеал кольца $\Gamma({}_\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, состоящий из гомоморфизмов абелевых групп $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с образами, лежащими в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Поскольку обе пары функторов ${}_\mathbb{Z}\text{-Mult} \rightleftarrows_\mathbb{Z} \mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}$ и ${}_\mathbb{Z}\mathfrak{M} \rightleftarrows_\mathbb{Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-Mult}$, ${}_\mathbb{Z}X \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и ${}_\mathbb{Z}X \to \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ соответственно осуществляют эквивалентности категорий, сквозные функторы ${}_\mathbb{Z}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-Mult} \rightleftarrows_\mathbb{Z} \mathbb{R}/\mathbb{Z}\text{-Mult}$ также дают эквивалентность категорий. Поэтому задание структуры компакта на левом $\Gamma({}_\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модуле Y равносильно заданию $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-мультиструктуры на IY.

Мы будем называть абелеву группу IY *рациональным остовом* левого $\Gamma({}_\mathbb{Z}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модуля Y. Если на Y задана структура компакта, то соответствующее топологическое пространство есть *пополнение* рационального остова Y (в индуцированной топологии).

Обратно, если группа Y_1 ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-мультиструктурирована, то можно задать на ней топологию, объявив базой окрестностей нуля множества вида $f^{-1}(U)$, где $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(Y_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, U – базисная окрестность нуля в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Пополнение $\widehat{Y}_1$ топологической группы Y_1 компактно, причем Y_1 есть рациональный остов $\widehat{Y}_1$. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-мультиструктурированная группа, соответствующая $\widehat{Y}_1$, есть $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(Y_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}\big)$.

Рациональный остов компактной абелевой группы есть ее плотная подгруппа, которая может совпадать со всем компактом: такое совпадение имеет место, например, для компактных групп $\mathbb{Z}_p$ и вообще для всех вполне несвязных компактных абелевых групп (и только для них). В самом деле, Y вполне несвязна тогда и только тогда, когда $Y = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$, где X – группа кручения. Соответственно, в этом и только в этом случае $IY = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = Y$.

Суммируя все сказанное в этом параграфе, получаем

Предложение 12.1. (a) *Структура компакта на левом $\Gamma({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z})$-модуле эквивалентна ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-мультиструктуре на его рациональном остове;*

(b) *всякая ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-мультиструктурированная абелева группа Y_1 есть рациональный остов своего пополнения $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\text{-Mult}}(Y_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}\big)$;*

(c) *рациональный остов компактной абелевой группы Y есть ее плотная подгруппа, совпадающая с Y в том и только в том случае, когда Y вполне несвязна.*

§13. Эффективный способ построения множества с алгебраической структурой, эквивалентной структуре компактной абелевой группы

Предложение 13.1. (a) *Абелева группа допускает структуру компакта в том и только в том случае, когда она изоморфна ядру ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывного гомоморфизма. Задание компактной топологии на абелевой группе Y равносильно в этом случае указанию $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывно-гомотопического класса резольвент Y, т.е. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывных гомоморфизмов $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^J$ с ядром, изоморфным Y;*

(b) *непрерывные гомоморфизмы компактных абелевых групп* *индуцируются в точности ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывными морфизмами их ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-резольвент;*

(c) *рациональный остов компактной абелевой группы Y есть прообраз $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I$ при вложении $0 \to Y \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I$, являющемся ядром резольвенты Y;*

(d) *абелева группа допускает структуру рационального остова некоторого компакта в том и только в том случае, когда она изоморфна ядру ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-непрерывного гомоморфизма. Задание топологии рационального остова компакта на абелевой группе Y_1 равносильно указанию $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-непрерывно-гомотопического класса ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-резольвент Y_1, т.е. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-непрерывных морфизмов $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^J$ с ядром, изоморфным Y_1.*

Все утверждения следуют из совокупности результатов §§10–12 и из замечания 9.1 – и в специальном доказательстве не нуждаются.

Предложение 13.2. (a) *Компактная абелева группа Y связна тогда и только тогда, когда для произвольной диаграммы ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывных морфизмов* $\begin{tikzcd} (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^J \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$, *где горизонтальная стрелка есть ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\mathbb{Z}$-непрерывная резольвента Y, расслоенная сумма $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^J \coprod\limits_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ равна либо $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, либо нулю;*

(b) *компактная абелева группа Y вполне несвязна в том и только в том случае, когда при тех же условиях указанная расслоенная сумма всегда отлична от нуля;*

(c) *рациональный остов Y_1 компактной абелевой группы имеет связное пополнение тогда и только тогда, когда для произвольной диаграммы ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-непрерывных морфизмов вида* $\begin{tikzcd} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I \arrow[r] \arrow[d] & (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^J \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$, *имеющей в качестве горизонтальной стрелки ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-резольвенту Y_1, расслоенная сумма $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^J \coprod\limits_{(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ равна либо $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, либо нулю;*

(d) *рациональный остов Y_1 компактной абелевой группы имеет несвязное пополнение – и тем самым является сам вполне несвязной абелевой группой – в том и только в том случае, когда при* *тех же условиях указанная расслоенная сумма всегда отлична от нуля.*

Доказательство. Мы докажем только утверждение (а) – остальные доказываются совершенно аналогично. Из теоремы двойственности Понтрягина известно, что Y является связной компактной абелевой группой тогда и только тогда, когда $Y = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ для абелевой группы X, не имеющей кручения (см. [5]). Возьмем свободную резольвенту $0 \leftarrow X \leftarrow \mathbb{Z}^{(I)} \leftarrow \mathbb{Z}^{(J)}$ абелевой группы X. Условие отсутствия кручения в X равносильно следующему: всякая моногенная подгруппа $\mathbb{Z}^{(I)}$ либо лежит в ядре эпиморфизма $\mathbb{Z}^{(I)} \to X$ (т.е. приходит из $\mathbb{Z}^{(J)}$), либо имеет с этим ядром нулевое пересечение. На языке диаграмм это означает, что для всякой диаграммы абелевых групп

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{(I)} & \mathbb{Z}^{(J)} \arrow[l] \\ \mathbb{Z} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

расслоенное произведение $\mathbb{Z}^{(J)} \prod\limits_{\mathbb{Z}^{(I)}} \mathbb{Z}$ равно либо $\mathbb{Z}$, либо нулю.

Поскольку функтор $G_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ точен и переводит конечные прямые произведения в конечные прямые суммы, он переводит конечные проективные пределы в конечные индуктивные (см. доказательство предложений §1). В частности, $G_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(J)} \prod\limits_{\mathbb{Z}^{(I)}} \mathbb{Z}) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^J \coprod\limits_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^I} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Поэтому применение функтора $G_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ к приведенному здесь резольвентному условию отсутствия кручения в X дает в точности условие связности Y, сформулированное в (а).

Автор глубоко признателен А. В. Яковлеву и А. А. Суслину за интерес к работе и внимательное чтение рукописи, А. Ф. Иванову за постоянное внимание и содержательные беседы, а также Б. Б. Лурье за дружескую поддержку.

Литература

1. М. Б. Звягина, *Теорема о локальной двойственности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 66–73.
2. М. Б. Звягина, *Локальная двойственность для модулей над нетеровыми коммутативными кольцами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 169–188.
3. С. Маклейн, *Гомология.* Мир, М. (1966).
4. C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors.* — Proc AMS **11** (1960), 5–8.

5. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы.* Наука, М. (1973).
6. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т. 1, Мир, М. (1977).

Zwiagina M. B. Continuous functors and duality.

Let Λ be an associative ring with unity and let ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ be a category of left unitary Λ-modules. The complete characterization of continuous additive co- and contravariant functors ${}_\Lambda\mathfrak{M} \to_{\mathbb{Z}} \mathfrak{M}$ is given. Such functors are either representable, or equivalent to a tenzor product, or the trivial functor. The class of categories, which are dual to ${}_\Lambda\mathfrak{M}$ and therefore equivalent to the category of compact right Λ-modules, is constructed by purely algebraic means. The canonical category is extracted from this class. The purely algebraic structure is constructed that is equivalent to the topology-algebraic structure of compact right Λ-module. Algebraic equivalents of connectivity and of complete inconnectivity are given.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 июня 2001 г.