Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд

ПОПОЛНЕНИЕ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ НЕТЕРОВЫМИ СПРАВА КОЛЬЦАМИ

В данной работе с помощью левых идеалов полуцепного кольца R на произвольном правом R-модуле вводится линейная топология. В случае нётеровости справа кольца R редуцированные чисто-инъективные модули могут быть описаны как полные в этой топологии модули (см. теорему 2.3). Над таким кольцом R с помощью пополнения модулей строится чисто-инъективная оболочка произвольного правого R-модуля.

Везде R обозначает полуцепное кольцо, J – радикал Джекобсона кольца R. Если не оговорено противное, под модулем понимается правый R-модуль. В работе используются определения, данные в статьях [1, 2].

§1. Определение и свойства R-топологии

Обозначение. Пусть V – конечно порождённый левый R-модуль. Обозначим через $\mathrm{Gen}(V)$ длину R-модуля V/JV.

Замечание. $\mathrm{Gen}(V)$ совпадает с количеством элементов в любом минимальном семействе локальных образующих модуля V [3, лемма 25.1.11].

Предложение 1.1. *Для конечно порождённого левого идеала I кольца R равносильны следующие условия:*

(1) *I является существенным левым идеалом R;*
(2) $\mathrm{Gen}(I) = \mathrm{Gen}(R)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Ввиду [3, теорема 25.3.3] найдётся такой полный набор ортогональных примитивных идемпотентов $\{e_k\}_{k=1}^n$, что $I = \bigoplus\limits_{k=1}^{n}(I \cap Re_k)$, при этом все модули $I \cap Re_k$ являются цепными конечно порождёнными, а потому – локальными модулями. Поскольку I – существенный левый идеал, то $I \cap Re_k \neq 0$ при $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Следовательно, $\mathrm{Gen}(I) = n = \mathrm{Gen}(R)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что $I \cap L = 0$ для некоторого ненулевого левого идеала L в R. Пусть $a \in L \setminus 0$, определим $L_1 = Ra$. Тогда $\mathrm{Gen}(I + L_1) = \mathrm{Gen}(I \oplus L_1) = \mathrm{Gen}(I) + \mathrm{Gen}(L_1) > \mathrm{Gen}(I) = \mathrm{Gen}(R)$. Но $I + L_1 \subset R$, поэтому согласно [3, лемма 25.1.13] $\mathrm{Gen}(I + L_1) \leqslant \mathrm{Gen}(R)$. Следовательно, $L = 0$. •

Следствие 1.1.1. *Любой существенный левый идеал I кольца R содержит некоторый конечно порождённый существенный левый идеал L. Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов кольца R, то найдётся такой левый идеал L вида $\bigoplus_{k=1}^{n} Rx_k$, где $x_k \in Re_k \setminus 0$ при любом $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов, то для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдутся ненулевые $x_k \in I \cap Re_k$. Определим $L = \sum_{k=1}^{n} Rx_k \subset I$. Тогда $L = \bigoplus_{k=1}^{n} Rx_k$ – существенный левый идеал кольца $R = \bigoplus_{k=1}^{n} Re_k$. •

Определение. Пусть M – правый R-модуль. Назовём R-топологией модуля M линейную топологию с базой окрестностей нуля $\mathbb{B} = \{MI \mid I$ – существенный левый идеал $R\}$.

Замечание. Семейство множеств $\mathbb{B}$ действительно удовлетворяет аксиомам базы окрестностей нуля, так как для любых существенных левых идеалов I_1, I_2 в R пересечение $I_1 \cap I_2$ – тоже существенный левый идеал, а $(MI_1) \cap (MI_2) \supset M(I_1 \cap I_2)$.

Предложение 1.2. *Пусть M – правый R-модуль.*

(1) *Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов, то система множеств $\mathbb{B}_1 = \{MI \mid I = \bigoplus_{k=1}^{n} Rx_k$, где $x_k \in Re_k \setminus 0\}$, является базой окрестностей нуля R-топологии модуля M;*

(2) *в R-топологии модуля M непрерывно умножение на любой элемент $r \in R$.*

Доказательство. (1) В силу следствия 1.1.1 любое множество $MI \in \mathbb{B}$ содержит некоторое множество из $\mathbb{B}_1$.

(2) Пусть $MI \in \mathbb{B}$, $r \in R$. Тогда левый идеал $(I : r) = \{s \in R \mid sr \in I\}$ существенен в R, и $\{m \in M \mid mr \in MI\} \supset M(I : r)$. •

Следствие 1.2.1. *Для произвольного R-модуля M множество $M^1 = \bigcap\limits_{MI \in \mathbb{B}} MI$ является его подмодулем.*

Доказательство. Отметим, что $M^1 = \{m \in M \mid \{m\} \longrightarrow 0\}$, где $\{m\}$ обозначает последовательность элементов M, тождественно равную m. Пусть $m \in M^1$, $r \in R$, тогда в силу непрерывности умножения на r в M $\{mr\} \longrightarrow 0$, т.е. $mr \in M^1$. •

Замечание 1.2.2. Используя предложение 1.2, легко видеть, что элемент $m \in M$ принадлежит M^1 тогда и только тогда, когда для любого примитивного идемпотента $e \in R$ и любого элемента $r \in Re \setminus 0$ имеем $me \in Mr$. При этом достаточно рассматривать лишь идемпотенты e из наперёд заданного полного набора ортогональных примитивных идемпотентов кольца R.

Замечание 1.2.3. Если R – полуцепное hnp-кольцо, $J = \mathrm{Rad}(R)$, а M – R-модуль, то система множеств $\{MJ^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ является базой окрестностей нуля R-топологии на M, так как в этом случае все ненулевые левые идеалы, содержащиеся собственным образом в Re, где e – примитивный идемпотент, имеют вид $J^n e$. Поэтому наше определение R-топологии для модулей над таким кольцом R согласуется с данным в [4].

Предложение 1.3. *Если R – полуцепное кольцо, а E – такой неразложимый R-модуль, что все фактор-модули модуля E инъективны, то $E^1 = E$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{S} = \{e_k\}_{k=1}^n$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов в R. Благодаря замечанию 1.2.2, достаточно доказать, что для любых $g \in \mathbb{S}$ и $r \in Rg \setminus 0$ имеем $Er = Eg$. Можем считать, что $r \in fR$ для некоторого идемпотента $f \in \mathbb{S}$.

Пусть $y \in Eg$, $y \neq 0$. Докажем, что существует R-гомоморфизм $\phi : rR \longrightarrow E$ такой, что $\phi(r) = y$. Модули rR и yR являются фактор-модулями gR, поэтому требуемый гомоморфизм существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}_{gR}(r) \subset \mathrm{Ann}_{gR}(y)$ (здесь $\mathrm{Ann}_{gR}(s) = \{x \in gR \mid sx = 0\}$). Предположим, что это не так. Тогда в силу цепности модуля gR $\mathrm{Ann}_{gR}(y)$ содержится собственным образом в $\mathrm{Ann}_{gR}(r)$. Поэтому $rR \simeq yR/P$ для некоторого $P \subset yR$, $P \neq 0$, и модуль rR вкладывается в E/P. Так как fR – цепной модуль, то fR является существенным расширением модуля rR; поскольку E/P инъективен, то fR тоже вкладывается в E/P. Следовательно, $fR \simeq E_0/P$ для некоторого подмодуля E_0 в E. Но fR – проективный модуль, поэтому модуль P является прямым слагаемым E_0. Последний модуль неразложим, так как E – неразложимый инъективный, а потому однородный модуль. Итак, $P = 0$, и получено противоречие. Следовательно, $y \in Er$ в силу инъективности модуля E. •

Следствие 1.3.1. *Пусть Y – модуль над полуцепным нётеровым справа кольцом R. Все фактор-модули модуля Y инъективны тогда и только тогда, когда $Y^1 = Y$. Если, кроме того, кольцо R неразложимо и неартиново, то $Y^1 = Y$ тогда и только тогда, когда Y – допустимый инъективный R-модуль.*

Доказательство. Пусть Y – такой R-модуль, что $Y^1 = Y$, а U – фактор-модуль Y. Тогда для любого существенного левого идеала I кольца R имеем $YI = Y$, поэтому $UI = U$, следовательно, $U^1 = U$. Заметим, что любой R-модуль C, удовлетворяющий условию $C^1 = C$, инъективен. Действительно, в этом случае $Cg = Cs$ для любого примитивного идемпотента g в R и любого $s \in Rg \setminus 0$. Легко видеть, что тогда модуль C инъективен относительно всех вложений вида $I \hookrightarrow P$, где P – неразложимый проективный модуль, и согласно [5, лемма 1.6] C – инъективный модуль.

Докажем обратное утверждение. Пусть Y – инъективный R-модуль. Поскольку кольцо R нётерово справа, Y является прямой суммой некоторого семейства $\{E_l\}_{l \in L}$ неразложимых модулей. Ясно, что если любой фактор-модуль модуля Y инъективен, то этому условию удовлетворяет любой модуль E_l, где $l \in L$. Применяя предложение 1.3, получаем, что $(E_l)^1 = E_l$ при $l \in L$. Так как $Y^1 = \bigoplus_{l \in L} (E_l)^1$, то $Y^1 = Y$.

Наконец, последнее утверждение следствия вытекает из [2, следствие 1.1.2]. •

Следствие 1.3.2. *Пусть R – полуцепное нётерово справа кольцо, A – подмодуль R-модуля M. Если $C = M/A$ – допустимый инъективный модуль, то A всюду плотен в M относительно R-топологии на M. Если, кроме того, кольцо R неразложимо и неартиново, то верно и обратное.*

Доказательство. Согласно следствию 1.3.1 для любого существенного левого идеала I в R $CI = C$, т.е. $A + MI = M$. Поэтому замыкание A в M $\mathrm{Cl}_M(A) = \bigcap_I (A + MI) = M$. Последнее утверждение также вытекает из следствия 1.3.1. •

Далее везде предполагается, что R – полуцепное нётерово справа неразложимое неартиново кольцо.

Определение. R-модуль M называется редуцированным, если он не содержит ненулевых инъективных подмодулей.

Лемма 1.4. *Если модуль M хаусдорфов в своей R-топологии, то он редуцирован.*

Доказательство. Так как модуль M хаусдорфов, то $M^1 = 0$. Предположим, что M содержит ненулевой инъективный подмодуль Y. Если Y – допустимый модуль, то по следствию 1.3.1 $Y = Y^1 \subset M^1 = 0$. Пусть E – ненулевое конечно порождённое прямое слагаемое модуля Y, тогда, как следует из доказательства [1, предложение 3.2], модуль E артинов. Рассмотрим простой подмодуль mR, лежащий в E, при этом можем считать, что $m \in Ef$, где f – некоторый примитивный идемпотент в R. Пусть $r \in Rf \setminus 0$, тогда $fJ = \mathrm{Ann}_{fR}(m) \supset \mathrm{Ann}_{fR}(r)$. Следовательно, в силу инъективности E $m \in Er$ для любого $r \in Rf \setminus 0$. Используя замечание 1.2.2, получаем, что $m \in E^1 \subset M^1 = 0$, и снова получили противоречие. •

Предложение 1.5. *Пусть M – редуцированный R-модуль. Если M чисто-проективен или чисто-инъективен, то M хаусдорфов в своей R-топологии.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{S} = \{e_k\}_{k=1}^n$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов в R, $e \in \mathbb{S}$. Согласно замечанию 1.2.2 для любого ненулевого элемента $r \in Re$ имеем включение $M^1 e \subset Mr$.

Рассмотрим сначала циклический цепной модуль M. Предположим, что существует ненулевой элемент $m \in M^1 e$. Так как модуль M не инъективен, то найдётся $z \in \mathrm{E}_R(M) \setminus M$, и в силу цепности модуля $\mathrm{E}_R(M)$ (см. [6, теорема 1.1]) получаем, что $M \subsetneqq zR$. По [2, лемма 3.1] существует $s \in Re \setminus 0$ такой, что $m \notin Ms$. Но тогда $m \notin M^1$, что противоречит предположению. Таким образом, $M^1 e = 0$ для любого $e \in \mathbb{S}$, следовательно, $M^1 = 0$.

Пусть $M = \bigoplus_{l \in L} C_l$ – чисто-проективный R-модуль, где все модули C_l – циклические цепные. Тогда по доказанному выше при любом $l \in L$ $(C_l)^1 = 0$, поэтому $M^1 = \bigoplus\limits_{l \in L} (C_l)^1 = 0$.

Рассмотрим M – неразложимый чисто-инъективный R-модуль, $m \in M^1 e$. Поскольку модуль M редуцирован, то по [1, теорема 5.3] существует базисный подмодуль B модуля M, содержащий m. Тогда B – неинъективный циклический цепной модуль, и в силу доказанного ранее $B^1 = 0$. Кроме того, B чист в M, поэтому $m \in M^1 \cap B = B^1 = 0$.

Пусть M – чисто-инъективный R-модуль, $B = \bigoplus\limits_{l \in L} C_l$ – его базисный подмодуль, где все модули C_l – циклические цепные. В этом случае существует вложение $M = \mathrm{PE}_R(B)$ в $\prod\limits_{l \in L} \mathrm{PE}_R(C_l)$ (см.[2, лемма 2.1.1 и следствие 1.5.1]). Так как модули C_l не инъективны, то ввиду [1, следствия 2.1.1 и 2.1.2, предложение 5.1] модули $U_l = \mathrm{PE}_R(C_l)$ тоже не инъективны, и потому хаусдорфовы. Поскольку $(\prod\limits_{l \in L} U_l) I \subset \prod\limits_{l \in L} U_l I$ для любого левого идеала I, то $(\prod\limits_{l \in L} U_l)^1 \subset \prod\limits_{l \in L} (U_l)^1$. Следовательно, $M^1 \subset (\prod\limits_{l \in L} U_l)^1 = 0$, и модуль M хаусдорфов. •

Замечание 1.5.1. Как следует из доказательства предложения 1.5, для любого редуцированного чисто-проективного модуля B модуль $\mathrm{PE}_R(B)$ хаусдорфов в своей R-топологии и, следовательно, редуцирован.

Предложение 1.6. *R-топология произвольного R-модуля M обладает счётной базой окрестностей нуля $\mathbb{B}_0 = \{MI_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – некоторое семейство конечно порождённых левых идеалов.*

Доказательство. Выберем $\mathbb{S}$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов в R. Для любого $g \in \mathbb{S}$ рассмотрим линейно упорядоченное множество $\Omega(g)$, которое состоит из всех ненулевых левых идеалов, содержащихся в Rg.

Лемма 1.6.1. *Множество $\Omega(g)$ либо конечно, либо изоморфно, как частично упорядоченное множество, множеству $\mathbb{Z} \cup K(g)$, где $K(g)$ – конечная цепь, причём для любых $z \in \mathbb{Z}$ и $k \in K(g)$ $z < k$, либо антиизоморфно $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathbb{S}_1 = \{e \in \mathbb{S} \mid eR$ – неартинов модуль$\}$. Действуя согласно [6, теорема 2.11], представим кольцо

R в виде $\begin{pmatrix} H & X \\ 0 & T \end{pmatrix}$, где $1_H = \sum\limits_{e\in\mathbb{S}_1} e$, $1_T = \sum\limits_{e\in\mathbb{S}\setminus\mathbb{S}_1} e$, H – полуцепное hnp-кольцо, T – полуцепное артиново кольцо, а X как H-модуль делим и свободен от кручения.

Если $g \in \mathbb{S}_1$, то $I \in \Omega(g)$ тогда и только тогда, когда $I = \left(\begin{smallmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где Y – ненулевой левый идеал кольца H, содержащийся в Hg. Так как тогда $Y = \mathrm{Rad}^k(H)g$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, то в этом случае $\Omega(g)$ антиизоморфно $\mathbb{N}$.

Пусть $g \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{S}_1$, тогда любой левый идеал I, содержащийся в Rg, имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & W \\ 0 & L \end{smallmatrix}\right)$, где L – левый идеал кольца T, лежащий в Tg, W – H-подмодуль левого H-модуля Xg, причём $W \supset XL$. Докажем, что если $L \neq 0$, то $W = Xg$. Действительно, в этом случае $I_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & XL \\ 0 & L \end{smallmatrix}\right)$ и $I_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Xg \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ – левые идеалы кольца R, содержащиеся в цепном модуле Rg, при этом $I_1 \not\subset I_0$. Следовательно, $I_0 \subset I_1$, поэтому $Xg = XL = W$. Итак, все элементы $\Omega(g)$ делятся на два вида: $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & Xg \\ 0 & L \end{smallmatrix}\right)$, причём любой левый идеал первого вида содержится в любом левом идеале второго вида. Так как кольцо T – полуцепное артиново, то левых идеалов второго вида лишь конечное число. Поэтому если $Xg = 0$, то $\Omega(g)$ конечно и линейно упорядочено.

Пусть $Xg \neq 0$. Убедимся, что множество ненулевых собственных подмодулей левого H-модуля Xg изоморфно, как частично упорядоченное множество, множеству $\mathbb{Z}$. Так как ${}_HX = \bigoplus\limits_{e\in\mathbb{S}\setminus\mathbb{S}_1} Xe$, то Xg тоже делим и свободен от кручения как H-модуль, при этом Xg – цепной модуль, все собственные подмодули которого конечно порождены. Пусть A – ненулевой конечно порождённый подмодуль модуля Xg, тогда A – неразложимый проективный H-модуль. Поэтому все ненулевые подмодули A имеют вид $\mathrm{Rad}^k(H)A$, где $k \in \mathbb{N}_0$, и множество всех таких подмодулей антиизоморфно $\mathbb{N}$. Поскольку Xg/A инъективен, как фактормодуль делимого, а потому инъективного H-модуля Xg, то Xg/A не является конечно порождённым модулем. Кроме того, любой собственный подмодуль Xg/A имеет конечную длину: если C – собственный подмодуль Xg, содержащий A, то C конечно порождён, поэтому $A = \mathrm{Rad}^n(H)C$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$ и $\mathrm{Rad}^n(H)(C/A) = 0$. Следовательно, в силу цепности модуля Xg/A отображение, сопоставляющее собственному подмодулю Xg/A

его длину, является биекцией с $\mathbb{N}$, сохраняющей порядок. •

Возвращаясь к доказательству предложения 1.6, построим с помощью леммы 1.6.1 для каждого $g \in \mathbb{S}$ такую систему левых идеалов $\mathbb{V}(g) = \{V_{g,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $V_{g,n} \subset Rg$, $V_{g,n} \subset V_{g,m}$ при $n > m$, причём любой ненулевой левый идеал $I \subset Rg$ содержит одно из множеств $V_{g,n}$. Определим $\mathbb{V}(g) = \Omega(g)$, если $\Omega(g)$ антиизоморфно, как упорядоченное множество, множеству $\mathbb{N}$. Если $\Omega(g)$ конечно и $I(g)$ – минимальный элемент $\Omega(g)$, то положим для всех $n \in \mathbb{N}$ $V_{g,n} = I(g)$. Если же существует изоморфизм $\varphi : \Omega(g) \to \mathbb{Z} \cup K(g)$, определим $\mathbb{V} = \varphi^{-1}(-\mathbb{N})$. Легко видеть, что любой элемент $\mathbb{V}(g)$ является конечно порождённым левым идеалом. Рассуждая аналогично следствию 1.1.1, получаем, что система множеств $\{MI_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $I_n = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}} V_{g,n}$, составляет базу окрестностей нуля R-топологии модуля M, причём при $n > m$ $I_n \subset I_m$. •

Лемма 1.7. *Пусть M – чисто-инъективный R-модуль. Тогда в R-топологии любая последовательность Коши элементов из M имеет в M предел.*

Доказательство. (Ср. [7, с. 711, следствие 7]). Используем базу окрестностей нуля $\mathbb{B}_0$ R-топологии на M, построенную в предложении 1.6. Пусть $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность Коши в M, тогда существует последовательность $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $z_m \in z_{k_n} + MI_n$ при $m \geqslant k_n$. Следовательно, пересечение любого конечного числа множеств $z_{k_n} + MI_n$ непусто. Заметим, что поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ I_n – конечно порождённый левый идеал, то множество $z_{k_n} + MI_n$ совпадает с множеством всех решений некоторого линейного уравнения с правой частью z_{k_n}. Применяя [7, предложение 8], получаем, что пересечение всех этих множеств непусто. Пусть $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (z_{k_n} + MI_n)$, тогда $z_{k_n} - a \in MI_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, и при $m \geqslant k_n$ имеем $z_m - a \in MI_n$, поэтому последовательность z_n сходится к a в R-топологии на M. •

§2. Пополнение модулей и чисто-инъективная оболочка

Для R-модуля M через $\mathrm{C}(M)$ обозначим пополнение M как абелевой группы в R-топологии. Согласно [8, теорема 13.6], $\mathrm{C}(M)$ может быть построено как фактор-группа C_1/C_0, где C_1

состоит из всех последовательностей Коши в R-топологии на M, а C_0 – из всех сходящихся к нулю последовательностей Коши в M. Пусть $\mathbb{B}_0 = \{MI_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – база окрестностей нуля R-топологии на M, построенная в предложении 1.6. Тогда по [8, предложение 13.7] $\mathrm{C}(M)$ изоморфно как абелева группа обратному пределу обратного спектра $\{M/MI_n; \pi_n^m\}$ $(n, m \in \mathbb{N})$, где π_n^m – канонические проекции. Заметим, что $\mathrm{C}(M)$ – группа, полная в линейной топологии с базой окрестностей нуля $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где U_n состоит из классов тех последовательностей Коши в M, все члены которых лежат в MI_n.

Пусть $i = i_M : M \longrightarrow \mathrm{C}(M)$ – каноническое отображение, сопоставляющее элементу $m \in M$ класс последовательности Коши, тождественно равной m. Ясно, что $\operatorname{Ker} i = M^1$.

Лемма 2.1. *На* $\mathrm{C}(M)$ *можно так определить структуру правого* R*-модуля, что* $i(M)$ *будет чистым подмодулем в* $\mathrm{C}(M)$.

Доказательство. Определим на $\mathrm{C}(M)$ действие элемента $r \in R$. Пусть $a \in \mathrm{C}(M)$, и $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – представитель класса a. Тогда в силу непрерывности умножения на r в R (см. предложение 1.2) $\{m_i r\}_{i\in\mathbb{N}}$ – снова последовательность Коши в M. Положим ar равным классу последовательности $\{m_i r\}_{i\in\mathbb{N}}$ в $\mathrm{C}(M)$. Легко видеть, что это определение корректно и превращает $\mathrm{C}(M)$ в R-модуль, при этом i становится R-гомоморфизмом.

Проверим, что $i(M)$ чист в $\mathrm{C}(M)$.

Лемма 2.1.1. *Пусть* C *–* R*-модуль,* M *– его подмодуль. Если для любого* $r \in Re$*, где* e *– произвольный примитивный идемпотент в* R*, имеем* $M \cap Cr = Mr$*, то* M *чист в* C.

Доказательство. Ясно, что чистота M в C равносильна следующему условию: для любого правого идеала L в R, для любого $c \in C$ такого, что $cL \subset M$, найдётся $a \in C$ такой, что $aL = 0$ и $a - c \in M$. При этом можно предполагать, что L – цепной модуль, и тогда $L = rR$ для некоторого элемента $r \in Re$, где e – примитивный идемпотент в R. Легко видеть, что из равенства $M \cap Cr = Mr$ следует, что для L выполнено указанное выше условие. •

Если $i(x) \in \mathrm{C}(M)r$, где $r \in Re \backslash 0$, а e – примитивный идемпотент в R, то существует последовательность Коши $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ элементов из M такая, что $\{m_i r\} = \{x\}$ в $\mathrm{C}(M)$. Иначе говоря, $\{m_i r\}$ сходится к x в R-топологии на M. Дополним e до полного набора ортогональных примитивных идемпотентов $\{e_k\}_{k=1}^n$, где $e_1 = e$. Если задан набор элементов $\{r_k\}_{k=1}^n$, где $r_1 = r$, $r_k \in Re_k \setminus 0$ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$), и $I = \sum\limits_{k=1}^{n} Rr_k$, то $MI \in \mathbb{B}$, поэтому для почти всех i $m_i r - x \in MI$. Следовательно, $m_i r - xe \in Mr$, а для любого $k \in \{2, \ldots, n\}$ $xe_k \in Mr_k$. Получаем, что $xe \in Mr$, а при $k \in \{2, \ldots, n\}$ имеем: $xe_k \in M^1$. Итак, $i(x) = i(xe) \in i(M)r$. •

В дальнейшем на $\mathrm{C}(M)$ всегда рассматривается R-модульная структура, введённая в лемме 2.1.

Определение. R-модуль M называется полным, если в R-топологии на M любая последовательность Коши имеет предел, и M хаусдорфов в этой топологии.

Рассматривая далее чисто-инъективную оболочку $\mathrm{PE}_R(M)$ R-модуля M, считаем, что $M \subset \mathrm{PE}_R(M)$, а $j = j_M : M \hookrightarrow \mathrm{PE}_R(M)$ – соответствующее чистое вложение.

Предложение 2.2. *Пусть M – R-модуль, хаусдорфов в своей R-топологии, $U = \mathrm{PE}_R(M)$. Тогда модуль U полон в своей R-топологии, и M всюду плотен в U относительно R-топологии на U.*

Доказательство. По [2, лемма 1.4] модуль U/M допустим и инъективен, поэтому из следствия 1.3.2 вытекает, что M всюду плотен в U. Пусть B – базисный подмодуль модуля M, тогда согласно [2, следствие 1.5.1] $U = \mathrm{PE}_R(B) \oplus E$, где E – допустимый инъективный модуль. По следствию 1.3.1 имеем $E = E^1$, поэтому в силу чистоты M в U $M \cap E = M \cap E^1 \subset M \cap U^1 = M^1 = 0$. Докажем, что M – чистый подмодуль модуля U/E. Пусть $\tau : M \oplus E \to U$ – соответствующее вложение. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\lambda_1} & M \oplus E & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\lambda_2} & U & \longrightarrow & U/M & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

в которой λ_1, λ_2 – соответствующие вложения модуля M. В силу инъективности модуля E мономорфизм ρ расщепляется, следовательно, $M \oplus E$ – чистый подмодуль модуля U. Поэтому M

чист в U/E, и согласно определению чисто-инъективной оболочки $E = 0$. Так как модуль B редуцирован по лемме 1.4, то согласно замечанию 1.5.1 $U = \mathrm{PE}_R(B)$ – хаусдорфов модуль, и по лемме 1.7 модуль U полон. •

Теорема 2.3. *R-модуль M полон тогда и только тогда, когда M – редуцированный чисто-инъективный модуль.*

Доказательство. Если M – редуцированный чисто-инъективный модуль, то по предложению 1.5 и лемме 1.7 M полон. Пусть M – полный модуль, $U = \mathrm{PE}_R(M)$. Так как M чист в U, то R-топология на M совпадает с топологией, индуцированной на M R-топологией модуля U. Отсюда в силу полноты M следует, что любая последовательность Коши элементов M в R-топологии на U имеет в M предел. Используя предложение 2.2, получаем, что $U = M$. Осталось заметить, что согласно лемме 1.4 модуль M редуцирован. •

Теорема 2.4. *Пусть M – R-модуль, хаусдорфов в своей R-топологии, $i : M \longrightarrow \mathrm{C}(M)$ – каноническое вложение. Тогда существует изоморфизм $\varphi : \mathrm{C}(M) \longrightarrow \mathrm{PE}_R(M)$ такой, что $\varphi \circ i = j_M$.*

Доказательство. Введём обозначение $U = \mathrm{PE}_R(M)$. Пусть $c \in \mathrm{C}(M)$, и $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность Коши, являющаяся представителем класса c. Положим $\varphi(c) = \lim_i m_i$ в R-топологии на U. В силу полноты модуля U этот предел существует и единственен. Если $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – другой представитель класса c, то $m_i - n_i \longrightarrow 0$ в M, поэтому $\lim_i m_i = \lim_i n_i$ в U. Таким образом, определение отображения φ корректно. Ясно, что φ является гомоморфизмом групп.

Кроме того, в силу непрерывности умножения на $r \in R$ в U (см. предложение 1.2) $\varphi(cr) = \lim_i m_i r = (\lim_i m_i)r = (\varphi(c))r$ для любого $c \in \mathrm{C}(M)$, поэтому φ – R-гомоморфизм. Так как ограничение на M R-топологии модуля U совпадает с R-топологией модуля M, то из того, что $\varphi(c) = 0$, т.е. $m_i \longrightarrow 0$ в R-топологии на U, следует, что $m_i \longrightarrow 0$ в R-топологии на M, следовательно, $c = 0$, и φ – мономорфизм. Поскольку M всюду плотен в U, то отображение φ эпиморфно. Действительно, если $x \in U$, и последовательность элементов $\{m_i\}$ из M сходится к x в R-топологии на U, то $\{m_i\}$ – последовательность Коши в R-топологии на M, и при c, равном классу $\{m_i\}$ в $\mathrm{C}(M)$, $\varphi(c) = x$. Осталось заметить, что при $c \in i(M)$ $\varphi(c) = \lim_i c = c$, поэтому $\varphi \circ i = j$. •

Следствие 2.4.1. *Пусть M – R-модуль, тогда $\mathrm{C}(M) \simeq \mathrm{C}(M/M^1)$ – редуцированный чисто-инъективный модуль, а $i(M)$ всюду плотен в $\mathrm{C}(M)$ относительно R-топологии на $\mathrm{C}(M)$.*

Доказательство. Легко видеть, что в силу описания пополнения как обратного предела обратного спектра $\{M/MI_n; \pi_n^m\}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ и определения умножения на элементы R имеем $\mathrm{C}(M) \simeq \mathrm{C}(M/M^1)$. Так как модуль M/M^1 хаусдорфов в своей R-топологии, то осталось применить теорему 2.4 и предложение 2.2. •

Следствие 2.4.2. *Существует взаимно-однозначное соответствие между типами изоморфизма редуцированных чисто-проективных и редуцированных чисто-инъективных R-модулей: редуцированному чисто-проективному модулю B соответствует его пополнение в R-топологии $\mathrm{C}(B)$, а редуцированному чисто-инъективному модулю M – его базисный подмодуль B.*

Доказательство. Согласно предложению 1.5 любой редуцированный чисто-проективный модуль хаусдорфов в своей R-топологии, поэтому по теореме 2.4 $\mathrm{C}(B)$ совпадает с $\mathrm{PE}_R(B)$. Последний модуль редуцирован в силу замечания 1.5.1. Корректность обратного отображения следует из [1, теорема 3.4] и [2, теорема 2.4]. Эти отображения взаимно обратны ввиду [2, следствие 1.4.1] и [1, предложение 3.5]. •

Для любого R-гомоморфизма $\alpha : U \longrightarrow V$ можно определить R-гомоморфизм $\hat{\alpha} : \mathrm{C}(U) \longrightarrow \mathrm{C}(V)$, положив $\hat{\alpha}(\overline{\{u_k\}}) = \overline{\{\alpha(u_k)\}}$, где $\overline{\{u_k\}}_{k\in\mathbb{N}}$ обозначает класс в $\mathrm{C}(U)$ соответствующей последовательности Коши. Так как $\alpha(UI) \subset VI$ для любого существенного левого идеала I в R, легко видеть, что данное определение корректно. Кроме того, ясно, что $\hat{\alpha} \circ i_U = i_V \circ \alpha$.

Для построенного таким образом функтора пополнения имеет место следующий результат, аналогичный доказанному в [4, предложение 2.8] для ограниченных hnp-колец.

Предложение 2.5. *Пусть $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\tau} Y \xrightarrow{\sigma} Z \longrightarrow 0$ – чистая точная последовательность R-модулей. Тогда последовательность $0 \longrightarrow \mathrm{C}(X) \xrightarrow{\hat{\tau}} \mathrm{C}(Y) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \mathrm{C}(Z) \longrightarrow 0$ точна и расщепляется.*

Доказательство. Пусть $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность левых идеалов кольца R, построенная в доказательстве предложения

1.6. Так как мономорфизм τ чист, то для любого $n \in \mathbb{N}$ точна индуцированная последовательность абелевых групп $0 \to X/XI_n \to Y/YI_n \to Z/ZI_n \to 0$, следовательно, используя [8, предложение 13.7, теорема 12.3], получаем, что последовательность пополнений точна в первом и втором членах.

Докажем теперь, что мономорфизм $\hat{\tau}$ чист. Так как τ – чистый мономорфизм, то легко видеть, что индуцированный гомоморфизм $\overline{\tau} : X/X^1 \to Y/Y^1$ – также чистый мономорфизм. Поэтому можем далее предполагать, что $X^1 = Y^1 = 0$. Обозначим $i = i_X$. Ввиду леммы 2.1 мономорфизм $\phi = i_Y \circ \tau$ чист. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{i} & \mathrm{C}(X) & \longrightarrow & \mathrm{C}(X)/i(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\tau}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \\
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{C}(Y) & \longrightarrow & \mathrm{C}(Y)/\phi(X) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Поскольку по следствию 2.4.1 $i(X)$ всюду плотен в $\mathrm{C}(X)$, то по следствию 1.3.2 модуль $\mathrm{C}(X)/i(X)$ инъективен. Поэтому мономорфизм ρ расщепляется, и, следовательно, мономорфизм $\hat{\tau}$ также чист.

Так как по теореме 2.4 модуль $\mathrm{C}(X)$ чисто-инъективен, то $\mathrm{C}(Y) \simeq \mathrm{C}(X) \oplus \mathrm{Im}(\hat{\sigma})$, поэтому $\mathrm{Im}(\hat{\sigma})$ – полный модуль, содержащий $\mathrm{Im}(i_Z)$. Ясно, что в силу плотности $\mathrm{Im}(i_Z)$ в $\mathrm{C}(Z)$ $\hat{\sigma}$ – эпиморфизм. •

С помощью следующего утверждения вопрос о построении чисто-инъективной оболочки произвольного модуля M сводится к случаю, когда модуль M не имеет ненулевых конечно порождённых инъективных подмодулей.

Предложение 2.6. *Любой R-модуль M допускает разложение $M = E \oplus M_1$, где E – инъективный модуль, равный прямой сумме конечно порождённых модулей, а модуль M_1 допустим.*

Доказательство. Доказательство проводится стандартно с использованием леммы Цорна (ср. доказательство теоремы 3.4 в [1]). •

Предложение 2.7. *Если R-модуль M допустим, то $\mathrm{E}_R(M^1)$ – допустимый модуль.*

Доказательство. Пусть C – циклическое цепное прямое слагаемое модуля $\mathrm{E}_R(M^1)$. Если $C \neq 0$, то в силу существенности M^1 в $\mathrm{E}_R(M^1)$ имеем $A = C \cap M^1 \neq 0$. Пусть $A = zR$, где $z \in Af$ для некоторого примитивного идемпотента f в R. По [2, лемма 3.1] найдётся такой элемент $s \in Rf \setminus 0$, что для любого собственного подмодуля C_1 в C имеем $z \notin C_1 s$. Поскольку Rs – цепной модуль, можно считать, что $s \in eRf$, где e – некоторый примитивный идемпотент в R. Так как $z \in M^1 f$, то существует элемент $m \in Me$ такой, что $z = ms$. Тогда mR – цепной модуль, следовательно, модуль mR вкладывается в $\mathrm{E}_R(A) = C$, причём это вложение тождественно на A. В силу выбора s получаем, что $mR \simeq C$. Так как модуль C инъективен, то $C = 0$. •

Теорема 2.8. *Пусть M – допустимый R-модуль. Тогда $\mathrm{PE}_R(M) \simeq \mathrm{C}(M) \oplus \mathrm{E}_R(M^1)$, где $\mathrm{C}(M) \simeq \mathrm{PE}_R(M/M^1)$ – пополнение модуля M в его R–топологии.*

Доказательство. Пусть $i : M \longrightarrow \mathrm{C}(M)$ – канонический гомоморфизм, $\sigma : M \longrightarrow \mathrm{E}_R(M^1)$ – продолжение на M вложения M^1 в $\mathrm{E}_R(M^1)$. Определим мономорфизм $\tau : M \longrightarrow U = \mathrm{C}(M) \oplus \mathrm{E}_R(M^1)$, полагая для $m \in M$ $\tau(m) = (i(m), \sigma(m))$. Докажем, что $\tau(M)$ – чистый подмодуль в U. Если $\tau(m) \in Ur$, где $r \in Re \setminus 0$ для некоторого примитивного идемпотента e, то $i(m) \in \mathrm{C}(M)r$. Согласно лемме 2.1 найдётся $m_1 \in M$ такой, что $i(m) = i(m_1)r$. Тогда $i(m) = i(m)e = i(me) = i(m_1 r)$, т.е. $me - m_1 r \in M^1 e \subset Mr$. Пусть $me - m_1 r = m_2 r$, где $m_2 \in M$, тогда $\sigma(m) = \sigma(m)e = \sigma(me) = \sigma(m_1 + m_2)r$. Следовательно, $\tau(m) = \tau(m_1 + m_2)r \in \tau(M)r$, и, таким образом, согласно лемме 2.1.1 $\tau(M)$ чист в U.

Докажем, что $\overline{U} = U/\tau(M)$ – допустимый инъективный модуль. Пусть e – примитивный идемпотент в R, $(c, y) \in Ue$, $r \in Re \setminus 0$. Так как по следствию 2.4.1 $i(M)$ всюду плотен в $\mathrm{C}(M)$ в R-топологии, то $\mathrm{C}(M)e = \mathrm{C}(M)r + i(M)e$. Поэтому $c = c_1 r + i(m)$ для некоторых элементов $c_1 \in \mathrm{C}(M)$, $m \in Me$. Поскольку по предложению 2.7 $\mathrm{E}_R(M^1)$ – допустимый модуль, используя следствие 1.3.1, получаем, что $\mathrm{E}_R(M^1)e = \mathrm{E}_R(M^1)r$. Следовательно, $y - \sigma(m) = y_1 r$ для некоторого $y_1 \in \mathrm{E}_R(M^1)$, и $(c, y) = (c_1, y_1)r + \tau(m)$. Поэтому $Ue = Ur + \tau(M)e$, т.е. $\overline{U}e = \overline{U}r$, таким образом, $\overline{U}^1 = \overline{U}$, и осталось применить следствие 1.3.1.

Заметим, что по теореме 2.4 и следствию 2.4.1 $\mathrm{C}(M) \simeq \mathrm{C}(M/M^1) \simeq \mathrm{PE}_R(M/M^1)$, кроме того, по предложению 2.2 этот модуль хаусдорфов в своей R-топологии. Так как $\tau : M \longrightarrow U$ – чистое вложение, а модуль U чисто-инъективен, то $U = \mathrm{PE}_R(M) \oplus Y$ для некоторого подмодуля Y в U, причём $\tau(M) \subset \mathrm{PE}_R(M)$. Отождествим далее M и $\tau(M)$. Так как $U/M = (\mathrm{PE}_R(M)/M) \oplus Y$ – допустимый инъективный модуль, то Y – тоже допустимый инъективный модуль, поэтому по следствию 1.3.1 $Y^1 = Y$. Следовательно, $Y \subset U^1 = (\mathrm{C}(M))^1 \oplus (\mathrm{E}_R(M^1))^1 = \mathrm{E}_R(M^1)$ в силу предложения 2.7 и следствия 1.3.1. Но $Y \cap \mathrm{PE}_R(M) = 0$, поэтому $Y \cap M^1 = 0$, следовательно, $Y = 0$ и $U = \mathrm{PE}_R(M)$. •

Замечание 2.8.1. Утверждение теоремы 2.8 неверно, если M – инъективный цепной циклический R-модуль. Действительно, в этом случае имеем $\mathrm{PE}_R(M) = M$ – неразложимый модуль, в то же время по следствию 1.3.1 $M \neq M^1$, поэтому $\mathrm{C}(M) \neq 0$, и по лемме 1.4 $M^1 \neq 0$, поэтому $\mathrm{E}_R(M^1) \neq 0$.

Замечание 2.8.2. Пусть M – R-модуль третьего типа, тогда $\mathrm{C}(M)$ можно описать как фактор-модуль модуля M, имеющий наибольшую длину среди всех неинъективных фактор-модулей M. Действительно, в силу теоремы 2.4, следствия 2.4.1 и [1, следствие 2.1.1] для такого модуля M $\mathrm{C}(M) = M/M^1$. Кроме того, для любого подмодуля A в M такого, что $A \subsetneqq M^1$, имеем $(M/A)^1 = M^1/A \neq 0$, поэтому по предложению 1.5 модуль M/A инъективен, а по лемме 1.4 модуль M/M^1 не инъективен.

Замечание 2.8.3. Теорема 2.8 распространяет на полуцепные нётеровы справа кольца аналогичный результат, полученный в [4, предложение 2.7] для ограниченных hnp-колец и, в частности, для полуцепных двусторонне нётеровых колец.

Литература

1. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* I. — Записки научн.семинаров ПОМИ **272** (2000), 129–143.
2. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* II. — Записки научн.семинаров ПОМИ **281** (2001).
3. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 2, Мир, М., 1979, с. 464.
4. А. И. Генералов, *Индуктивно замкнутые собственные классы над ограниченными hnp-кольцами.* — Алгебра и логика 25, No. 4 (1986), 384–404.
5. M. H. Wright, *Serial rings with right Krull dimension one,* II. — J. Algebra **117**, No. 1 (1988), 99–116.

6. S. Singh, *Serial right noetherian rings.* — Canadian J. Math. **36**, No. 1 (1984), 22–37.
7. R. B. Warfield, *Purity and algebraic compactness for modules.* — Pacific J. Math. **28**, No. 3 (1969), 699–719.
8. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы.* т. 1, Мир, М., 1974, 335.

Generalov A. I., Zilberbord I. M. Completion of modules over right noetherian serial rings.

We define a linear topology on arbitrary right module over right noetherian serial ring R that allows to describe reduced pure-injective R-modules as modules which are complete in this topology. Using the operation of completion we describe pure-injective envelope of any right R-module.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 7 апреля 2001 г.