Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

А. И. Генералов, И. М. Зильберборд

БАЗИСНЫЕ ПОДМОДУЛИ МОДУЛЕЙ НАД ПОЛУЦЕПНЫМИ НЕТЕРОВЫМИ СПРАВА КОЛЬЦАМИ. II

Данная работа является продолжением статьи [1] и использует принятые в ней основные определения и обозначения. В частности, везде R обозначает полуцепное нётерово справа кольцо, J – радикал Джекобсона R, а N – ниль-радикал R; рассматриваются только правые модули. Расширения модулей называются чистыми, если они чисты по Кону.

В §1 изучаются свойства базисных подмодулей и их связь с чисто-инъективными оболочками. Основной результат работы, – теорема единственности для базисных подмодулей R-модулей, – доказывается в §2. Кроме того, в §3 обсуждается классификация неразложимых чисто-инъективных R-модулей, полученная в [2].

§1. Некоторые свойства базисных подмодулей

Определение. Будем говорить, что R-модуль E допустим, если он не содержит ненулевых конечно порождённых инъективных подмодулей.

Напомним понятие базисного подмодуля, введённое в [1].

Определение. Подмодуль B R-модуля M называется базисным, если:

(1) B – чистый подмодуль M;
(2) B – прямая сумма некоторого семейства конечно порождённых модулей;
(3) M/B – допустимый инъективный модуль.

В [1, теорема 3.4] доказано, что любой R-модуль обладает базисным подмодулем.

Предложение 1.1. *Любой фактор-модуль допустимого инъективного R-модуля E является допустимым инъективным модулем.*

Доказательство. Пусть $\pi : E \longrightarrow X$ – некоторый эпиморфизм, xR – цепной подмодуль в X. Можно считать, что найдётся примитивный идемпотент $g \in R$ такой, что $x = xg$. Пусть $y \in \pi^{-1}(x)g$, тогда yR – цепной подмодуль E, причём xR – фактор-модуль модуля yR. Так как E инъективен, то $\mathrm{E}_R(yR)$ вкладывается в E. Заметим, что $\mathrm{E}_R(yR)$ – неразложимый инъективный, а потому цепной модуль [3, теорема 1.1]. Рассмотрим $X_1 = \pi(\mathrm{E}_R(yR))$ – это фактор-модуль модуля $\mathrm{E}_R(yR)$. Следовательно, X_1 – цепной модуль, причём X_1 не конечно порождён. Действительно, $\mathrm{E}_R(yR)$ не является конечно порождённым модулем в силу допустимости E, а X_1 – фактор-модуль модуля $\mathrm{E}_R(yR)$ по некоторому собственному, а потому конечно порождённому подмодулю [3, лемма 2.2]. Согласно этой же лемме X_1 – неразложимый инъективный модуль. Поскольку X_1 содержит модуль xR, то $X_1 \simeq \mathrm{E}_R(xR)$.

Проверим теперь, что X инъективен относительно всех вложений $I \hookrightarrow P$, где I – подмодуль неразложимого проективного модуля P. Так как P – циклический цепной модуль, то и I будет циклическим цепным. Пусть $\beta : I \longrightarrow X$ – гомоморфизм, тогда $\operatorname{Im}\beta$ – циклический цепной подмодуль X, и по доказанному выше $\mathrm{E}_R(\operatorname{Im}\beta)$ вкладывается в X. Поэтому β можно продолжить до гомоморфизма $\bar{\beta} : P \longrightarrow \mathrm{E}_R(\operatorname{Im}\beta)$ и, следовательно, до гомоморфизма, действующего из P в X. Согласно [4, лемма 1.6] X – инъективный модуль.

Убедимся, что X – допустимый модуль. Действительно, если бы X имел ненулевое конечно порождённое прямое слагаемое, то по теореме Дрозда-Уорфилда [5; 6, следствие 3.4] X имел бы ненулевое цепное слагаемое xR. Тогда xR являлся бы инъективным модулем, но по доказанному выше модуль $\mathrm{E}_R(xR)$ не может быть конечно порождённым. •

Замечание 1.1.1. Предложение 1.1 даёт новое (по сравнению с [1, предложение 3.2]) доказательство того, что из отсутствия ненулевых инъективных конечно порождённых R-модулей следует наследственность справа кольца R.

Следствие 1.1.2. *Если кольцо R неразложимо и неартиново, то R-модуль E является допустимым инъективным тогда и только тогда, когда любой фактор-модуль модуля E инъективен.*

Доказательство. Благодаря предложению 1.1, нужно показать только достаточность второго условия. Если E_1 – инъективный цепной конечно порождённый модуль, то простой модуль $S_1 = E_1/\mathrm{Rad}(E_1)$ не инъективен, поскольку либо S_1 вложим в некоторый модуль второго типа, либо существует такой простой модуль S третьего типа, что $\mathrm{Ext}_R(S, S_1) \neq 0$ (см.[1, 7]). Если модуль E содержит такой подмодуль E_1, то $E = E_1 \oplus E_0$ для некоторого подмодуля E_0 в E, и фактор-модуль $E/\mathrm{Rad}(E_1) = S_1 \oplus E_0$ не инъективен. •

Предложение 1.2. *Пусть B – базисный подмодуль R-модуля M. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $B + MJ^n = M$.*

Доказательство. Рассмотрим модуль $M' = M/(B + MJ^n)$. Заметим, что M' – фактор-модуль допустимого инъективного модуля M/B. По предложению 1.1 M' не имеет ненулевых конечно порождённых прямых слагаемых. Но $M'J^n = 0$, поэтому M' – модуль над полуцепным кольцом R/J^n, которое является артиновым по [3, лемма 2.1]. Следовательно, по [8, теорема 25.4.2] M' должен быть прямой суммой конечно порождённых модулей. Итак, $M' = 0$. •

Следствие 1.2.1. *В условиях предложения 1.2 имеет место изоморфизм R-модулей $M/MJ^n \simeq B/BJ^n$.*

Доказательство. По предложению 1.2 $M/MJ^n = (MJ^n + B)/MJ^n \simeq B/(B \cap MJ^n)$. Последний модуль равен B/BJ^n, так как в силу чистоты B в M $B \cap MJ^n = BJ^n$ (см., например, [9, предложение 3]). •

Предложение 1.3. *Если I – идеал кольца S, конечно порождённый как правый идеал, а B – чистый подмодуль S-модуля M, то любой циклический конечно представимый S-модуль проективен относительно точной последовательности*

$$0 \longrightarrow (B + \mathrm{Ann}_M I)/\mathrm{Ann}_M I \longrightarrow M/\mathrm{Ann}_M I \longrightarrow M/(B + \mathrm{Ann}_M I) \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

Если, кроме того, S – такое кольцо, что любой конечно представимый S-модуль – прямое слагаемое прямой суммы семейства циклических конечно представимых S-модулей (например, если S – полуцепное кольцо), то последовательность $(*)$ является чистой.

Доказательство. Заметим сначала, что для точной последовательности S-модулей $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ условие проективности относительно неё модуля S/L равносильно следующему: для любого элемента $m \in M_2$ такого, что $mL \subset M_1$, найдётся элемент $n \in M_2$, для которого $nL = 0$ и $m - n \in M_1$.

Пусть теперь модуль S/L конечно представим (т.е. L конечно порождён). Далее $\overline{m}$ будет обозначать класс в $M/\mathrm{Ann}_M I$ элемента $m \in M$. Пусть m – такой элемент M, что $\overline{m}L \subset (B + \mathrm{Ann}_M I)/\mathrm{Ann}_M I$, т.е. $mL \subset B + \mathrm{Ann}_M I$. Тогда $mLI \subset B$. Так как I – идеал S, конечно порождённый как правый идеал, то LI – конечно порождённый правый идеал, поэтому модуль S/LI конечно представим. Поскольку B чист в M, то S/LI проективен относительно точной последовательности $0 \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow M/B \longrightarrow 0$. Следовательно, существует элемент $n \in M$ такой, что $m - n \in B$, причём $nLI = 0$, т.е. $nL \subset \mathrm{Ann}_M I$. Тогда $\overline{n}$ – искомый: $\overline{m} - \overline{n} \in (B + \mathrm{Ann}_M I)/\mathrm{Ann}_M I$ и $\overline{n}L = 0$.

Если S удовлетворяет описанным в условии дополнительным требованиям, то из доказанного следует, что относительно последовательности $(*)$ проективен любой конечно представимый S-модуль. Пусть теперь S – полуцепное кольцо, $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов S. По теореме Дрозда-Уорфилда [5; 6, следствие 3.4] любой неразложимый конечно представимый S-модуль Q изоморфен модулю e_iS/e_irS (при некоторых $r \in S$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), который является прямым слагаемым циклического конечно представимого модуля $S/e_irS = (\bigoplus\limits_{j \neq i} e_jS) \bigoplus (e_iS/e_irS)$. •

Следствие 1.3.1. *Если B – базисный подмодуль R-модуля M, I – идеал кольца R, то $B_1 = (B + \mathrm{Ann}_M I)/\mathrm{Ann}_M I$ – базисный подмодуль модуля $M_1 = M/\mathrm{Ann}_M I$.*

Доказательство. Пусть $B = \bigoplus\limits_{l \in L} C_l$, где $\{C_l\}_{l \in L}$ – семейство конечно порождённых модулей. Тогда

$$B_1 \simeq B/\mathrm{Ann}_B I \simeq \bigoplus_{l \in L} (C_l/\mathrm{Ann}_{C_l} I)$$

– снова прямая сумма семейства конечно порождённых модулей. Модуль M_1/B_1 изоморфен $M/(B + \mathrm{Ann}_M I)$ – фактор-модулю модуля M/B, поэтому согласно предложению 1.1 M_1/B_1 – допустимый инъективный модуль. Чистота B_1 в M_1 следует из предложения 1.3. •

Следствие 1.3.2. *Пусть $\{I_k\}_{k\in K}$ – семейство идеалов кольца R, M – такой R-модуль, что множество $U = \bigcup\limits_{k\in K} \mathrm{Ann}_M(I_k)$ является его подмодулем, A – чистый подмодуль M. Тогда $(A+U)/U$ – чистый подмодуль модуля M/U.*

Доказательство. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 1.3, легко убедиться в том, что достаточно проверить проективность произвольного модуля вида R/L, где L – правый идеал R, относительно точной последовательности

$$0 \longrightarrow (A+U)/U \longrightarrow M/U \longrightarrow M/(A+U) \longrightarrow 0.$$

Поскольку любой неразложимый конечно порождённый R-модуль является прямым слагаемым модуля вида R/rR, то можем считать, что $L = rR$ для некоторого $r \in R$. Пусть $\overline{m}$ обозначает класс в M/U элемента $m \in M$. Если $\overline{m}L \subset (A+U)/U$, то $mL \subset A+U = \bigcup\limits_{k\in K} (A+\mathrm{Ann}_M(I_k))$. Следовательно, $mr \in A+\mathrm{Ann}_M(I_k)$ для некоторого $k \in K$. Тогда $mL = mrR \subset A+\mathrm{Ann}_M(I_k)$. Согласно предложению 1.3 найдётся элемент $n \in M$ такой, что $m-n \in A+\mathrm{Ann}_M(I_k)$, причём $nL \subset \mathrm{Ann}_M(I_k) \subset U$. Итак, $\overline{m}-\overline{n} \in (A+U)/U$ и $\overline{n}L = 0$. •

Лемма 1.4. *Пусть A – R-модуль, $M = \mathrm{PE}_R(A)$. Тогда M/A – допустимый инъективный модуль.*

Доказательство. Докажем, что если P – чистый конечно порождённый подмодуль модуля M/A, то $P = 0$. Пусть $P = P_1/A$, где P_1 – некоторый подмодуль M, строго содержащий A. Тогда A чист в P_1, и модуль P_1/A конечно порождён, поэтому A выделяется прямым слагаемым в P_1. Пусть $P_1 = A \oplus Q$, где Q – подмодуль M. Так как P_1 чист в M, то P_1/Q чист в M/Q, т.е. получено противоречие с определением чисто-инъективной оболочки. Итак, $P = 0$, и любой базисный подмодуль модуля M/A равен 0, поэтому M/A допустим и инъективен. •

Следствие 1.4.1. *Любой чисто-проективный R-модуль является базисным подмодулем своей чисто-инъективной оболочки.*

Доказательство. Достаточно заметить, что, как доказано в [14], любой чисто-проективный R-модуль – прямая сумма некоторого семейства конечно порожденных модулей.

Предложение 1.5. *Если B – базисный подмодуль модуля M, то B является базисным подмодулем* $\mathrm{PE}_R(M)$.

Доказательство. Обозначим $W = \mathrm{PE}_R(M)$. Ясно, что B – чистый подмодуль W. Проверим, что W/B – допустимый инъективный модуль. Для этого заметим, что имеется точная последовательность $0 \longrightarrow M/B \longrightarrow W/B \longrightarrow W/M \longrightarrow 0$. Так как модуль M/B инъективен, то $W/B \simeq M/B \oplus W/M$. По лемме 1.4 W/M – допустимый инъективный модуль; таков же модуль M/B. Остаётся заметить, что прямая сумма двух допустимых модулей – снова допустимый модуль ввиду [8, 18.17], поскольку любой неразложимый конечно порождённый R-модуль имеет локальное кольцо эндоморфизмов. •

Следствие 1.5.1. *Если B – базисный подмодуль модуля M, то найдётся допустимый инъективный модуль E такой, что* $\mathrm{PE}_R(M) = \mathrm{PE}_R(B) \oplus E$.

Доказательство. Согласно предложению 1.5 B – базисный подмодуль модуля $\mathrm{PE}_R(M)$, поэтому можно применить [1, предложение 3.5]. •

§2. Теорема единственности для базисных подмодулей

Предложение 2.1. *Пусть $\{C_k\}_{k \in K}$ – семейство модулей второго типа. Тогда модуль $W = \mathrm{PE}_R(\bigoplus_{k \in K} C_k)$ не имеет подмодулей первого типа, а подмодули модуля W второго типа лежат на тех же окружностях, что и модули C_k $(k \in K)$.*

Доказательство. Обозначим $V_k = \mathrm{PE}_R(C_k)$. Построим сначала чистое вложение модуля W в $\prod_{k \in K} V_k$.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\{C_k\}_{k \in K}$ – семейство R-модулей, $V_k = \mathrm{PE}_R(C_k)$ $(k \in K)$, $W = \mathrm{PE}_R(\bigoplus_{k \in K} C_k)$. Тогда модуль W вкладывается в качестве прямого слагаемого в $\prod_{k \in K} V_k$.*

Доказательство. Пусть τ – каноническое вложение $\bigoplus_{k \in K} C_k$ в $\prod_{k \in K} C_k$, тогда по [10, с.101] τ является чистым гомоморфизмом. Определим $i_k : C_k \longrightarrow V_k$ для $k \in K$ как чистое вложение модуля C_k в свою чисто-инъективную оболочку. Заметим, что

$\prod\limits_{k\in K} i_k : \prod\limits_{k\in K} C_k \hookrightarrow \prod\limits_{k\in K} V_k$ – чистое вложение [10, предложение 1.2], и композиция этого гомоморфизма с τ даёт чистое вложение $\bigoplus\limits_{k\in K} C_k$ в $\prod\limits_{k\in K} V_k$. Поскольку $\prod\limits_{k\in K} V_k$ – чисто-инъективный модуль, то W вкладывается в $\prod\limits_{k\in K} V_k$ в качестве прямого слагаемого. •

Пусть X – ненулевой цепной циклический подмодуль в W, имеющий неартиново проективное накрытие. Рассмотрим вложение $\alpha : X \hookrightarrow \prod\limits_{k\in K} V_k$. Пусть $\pi_k : \prod\limits_{k\in K} V_k \longrightarrow V_k$ $(k \in K)$ – канонические проекции. Если $\pi_k \cdot \alpha \neq 0$, то ввиду [1, предложение 5.2] $\mathrm{Im}(\pi_k \cdot \alpha)$ – модуль второго типа, и тогда сам X – модуль второго типа, а $\mathrm{Ker}(\pi_k \cdot \alpha)$ – артинов модуль. Так как $\bigcap\limits_{k\in K} \mathrm{Ker}(\pi_k \cdot \alpha) = 0$, а X – цепной модуль, то из этого следует, что $\mathrm{Ker}(\pi_l \cdot \alpha) = 0$ для некоторого $l \in K$. Осталось вновь применить [1, предложение 5.2]. •

Предложение 2.2. *Пусть M – произвольный R-модуль, $B = \bigoplus\limits_{k\in K} C_k$ – базисный подмодуль M, где все C_k – неразложимые конечно порождённые модули, A – модуль первого или третьего типа. Тогда мощность множества $\mathcal{X}_A = \{k \in K \mid C_k \simeq A\}$ не зависит от выбора B.*

Доказательство. Пусть $l(X)$ обозначает (композиционную) длину R-модуля X. Заметим, что если $l(A) = l$, то для разложения $B/BJ^{l+1} = \bigoplus\limits_{k\in K} C_k/C_kJ^{l+1}$ множество $\{k \in K \mid C_k/C_kJ^{l+1} \simeq A\}$ совпадает с $\mathcal{X}_A$. Действительно, если C_k – модуль второго типа или артинов с $l(C_k) > l$, то $C_kJ^m \neq 0$ при $m \in \{1, 2, \dots, l\}$, и потому $l(C_k/C_kJ^{l+1}) = l + 1$, а для случая, когда $l(C_k) \leqslant l$, имеем $C_kJ^{l+1} = 0$ и, следовательно, $C_k/C_kJ^{l+1} \simeq C_k$. Далее, по следствию 1.2.1 $B/BJ^{l+1} \simeq M/MJ^{l+1}$, и остаётся применить теорему Крулля–Шмидта к M/MJ^{l+1}, рассматриваемому как модуль над артиновым полуцепным кольцом R/J^{l+1}. •

Предложение 2.3. *Пусть M – R-модуль, $s \in \mathbb{N}$ таково, что $MN^s = 0$, $B = \bigoplus\limits_{k\in K} C_k$ – базисный подмодуль M, где все C_k – неразложимые конечно порождённые модули, Q – модуль второго типа, лежащий на s-ой окружности. Тогда мощность множества $\{k \in K \mid C_k \simeq Q\}$ не зависит от выбора B.*

Доказательство. Введём обозначения:

$$\begin{aligned} M_1 &= M/\mathrm{Ann}_M N^{s-1}, \\ B_1 &= (B + \mathrm{Ann}_M N^{s-1})/\mathrm{Ann}_M N^{s-1}, \\ B_2 &= B/\mathrm{Ann}_B N^{s-1} \simeq \bigoplus_{k \in K} (C_k/\mathrm{Ann}_{C_k} N^{s-1}). \end{aligned}$$

Тогда $B_1 \simeq B_2$ и

$$B_2 J \simeq \bigoplus_{k \in K} (C_k/\mathrm{Ann}_{C_k} N^{s-1}) J.$$

Пусть $L = \{k \in K \mid C_k N^{s-1} \neq 0\}$. Так как все модули C_k являются цепными, то при $k \in L$ имеем $(C_k/\mathrm{Ann}_{C_k} N^{s-1})J = C_k J/\mathrm{Ann}_{C_k} N^{s-1}$. Поэтому

$$B_2 J \simeq \bigoplus_{k \in L} C_k J/\mathrm{Ann}_{C_k} N^{s-1}.$$

Следовательно, модуль $B_1/B_1 J \simeq B_2/B_2 J \simeq \bigoplus\limits_{k \in L} C_k/C_k J$. Отметим, что $C_k/C_k J \simeq Q/QJ$ тогда и только тогда, когда модули C_k и Q имеют одинаковое проективное накрытие, а при $k \in L$ последнее имеет место, только если $Q \simeq C_k$, так как в M нет подмодулей второго типа, лежащих на окружностях с большими, чем s, номерами.

Из этого следует, что кратность вхождения простого модуля Q/QJ в полупростой модуль $B_1/B_1 J$ совпадает с мощностью множества $\{k \in K \mid C_k \simeq Q\}$. Остаётся заметить, что по следствию 1.3.1 B_1 – базисный подмодуль модуля M_1, поэтому согласно следствию 1.2.1 $B_1/B_1 J \simeq M_1/M_1 J$. •

Теорема 2.4. *Все базисные подмодули произвольного R-модуля M изоморфны друг другу.*

Доказательство. Согласно предложению 1.5 можем сразу предположить, что модуль M чисто-инъективен. Благодаря предложению 2.2, ограничимся изучением неартиновых неразложимых прямых слагаемых базисных подмодулей модуля M. Итак, пусть Q – модуль второго типа, лежащий на s-ой окружности. Фиксируем s и для произвольного R-модуля X введём обозначение $\mathrm{U}(X) = \mathrm{Ann}_X N^s$.

Лемма 2.4.1. *Для любого инъективного R-модуля E найдутся инъективный подмодуль Y и семейство конечно порождённых артиновых подмодулей $\{D_i\}_{i\in I}$ такие, что*

$$\mathrm{U}(E) = (\bigoplus_{i\in I} D_i) \oplus Y.$$

Доказательство. Так как кольцо R нётерово справа, то $E = \bigoplus\limits_{l\in L} E_l$, где все модули E_l неразложимы. Из [3, теорема 1.1] следует, что любой из модулей E_l – цепной, а все его собственные подмодули конечно порождены. Докажем, что если $\mathrm{U}(E_l) \neq E_l$, то $\mathrm{U}(E_l)$ – артинов модуль. Пусть, напротив, $\mathrm{U}(E_l)$ – модуль второго типа, $y \in E_l \setminus \mathrm{U}(E_l)$. Тогда $\mathrm{U}(E_l) \subset yR$, поэтому yR – модуль второго типа, лежащий на одной с $\mathrm{U}(E_l)$ окружности. Следовательно, существует также вложение yR в $\mathrm{U}(E_l)$, поэтому $yN^s = 0$ и $y \in \mathrm{U}(E_l)$, что противоречит предположению. Пусть $L_1 = \{l \in L \mid \mathrm{U}(E_l) = E_l\}$, $I = L \setminus L_1$. Тогда модули $Y = \bigoplus\limits_{l\in L_1} E_l$ и $D_i = \mathrm{U}(E_i)$, $i \in I$ удовлетворяют описанным в условии требованиям, поскольку $\mathrm{U}(E) = \bigoplus\limits_{l\in L} \mathrm{U}(E_l)$. •

Лемма 2.4.2. *Пусть R-модуль B является прямой суммой некоторого семейства модулей второго типа, лежащих на окружностях с большими, чем s, номерами. Тогда модуль $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B))$ – прямая сумма модулей третьего типа.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{S}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов в R, $\mathbb{S}_1 = \{g \in \mathbb{S} \mid gR$ – неартинов модуль$\}$, $e = \sum\limits_{g\in\mathbb{S}_1} g$, $f = 1-e$. По предложению 2.1 все подмодули второго типа в $W = \mathrm{PE}_R(B)$ лежат на окружностях с большими, чем s, номерами, т.е. они не аннулируются N^s. Кроме того, W не содержит подмодулей первого типа. Поэтому $\mathrm{U}(W)e = 0$, следовательно, $\mathrm{U}(W)$ – модуль над полуцепным артиновым кольцом $T = fRf$ (см.[3, теорема 2.11] или [11]). Как следует из [8, теорема 25.4.2], $\mathrm{U}(W)$ – прямая сумма неразложимых конечно порождённых T-модулей, т.е. R-модулей третьего типа. •

Лемма 2.4.3. *Пусть X_1 – прямая сумма семейства модулей первого типа, X_2 – прямая сумма семейства модулей третьего типа.*

Тогда $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_1 \oplus X_2)) = \mathrm{PE}_R(X_1) \oplus X_3$, *где* X_3 *– некоторый модуль, являющийся прямой суммой семейства модулей третьего типа.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_1)) = \mathrm{PE}_R(X_1)$. Действительно, любой модуль первого типа аннулируется N, поэтому $X_1 N = 0$, и, следовательно, модуль $\mathrm{PE}_R(X_1) = \mathrm{PE}_{R/N}(X_1)$ тоже аннулируется N.

Рассмотрим модуль $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_2))$. Так как X_2 – модуль над кольцом $T = fRf$, то по [1, следствие 2.1.1] X_2 – чисто-инъективный R-модуль. Кроме того, $X_3 = \mathrm{U}(X_2)$ – подмодуль X_2, поэтому X_3 – снова T-модуль. Согласно [8, теорема 25.4.2] модуль X_3 – прямая сумма неразложимых конечно порождённых T-модулей. В итоге получаем, что $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_1 \oplus X_2)) = \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_1)) \oplus \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X_2)) = \mathrm{PE}_R(X_1) \oplus X_3$. •

Продолжим теперь доказательство теоремы 2.4. Рассмотрим $B = \bigoplus_{k \in K} C_k$ – базисный подмодуль модуля M, где все C_k – цепные конечно порождённые модули. Пусть $B^{(1)}$ – сумма всех неартиновых слагаемых C_k, не аннулируемых N^s, $B^{(2)}$ – сумма остальных неартиновых модулей C_k, X – сумма всех артиновых модулей C_k.

Докажем, что существует базисный подмодуль модуля $\mathrm{U}(M)$, имеющий вид $B^{(2)} \oplus A$, где A – прямая сумма конечно порождённых артиновых модулей.

По следствию 1.5.1 $M = \mathrm{PE}_R(B) \oplus E$, где E – некоторый допустимый инъективный модуль. Так как $B = B^{(1)} \oplus B^{(2)} \oplus X$, то $\mathrm{U}(M) = \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B^{(1)})) \oplus \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B^{(2)})) \oplus \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X)) \oplus \mathrm{U}(E)$.

Согласно лемме 2.4.1 $\mathrm{U}(E) = (\bigoplus_{i \in I} D_i) \oplus Y$, где модуль Y допустим и инъективен, а все модули D_i $(i \in I)$ конечно порождены и артиновы. Следовательно, модуль $\bigoplus_{i \in I} D_i$ базисен в $\mathrm{U}(E)$.

По лемме 2.4.2 модуль $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B^{(1)}))$ – прямая сумма конечно порождённых артиновых модулей.

Так как $B^{(2)} N^s = 0$, то $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B^{(2)})) = \mathrm{PE}_R(B^{(2)})$, а по следствию 1.4.1 модуль $B^{(2)}$ базисен в $\mathrm{PE}_R(B^{(2)})$.

Определим $K_1 = \{k \in K \mid C_k$ – модуль первого типа$\}$, $K_2 = \{k \in K \mid C_k$ – модуль третьего типа$\}$, $X_1 = \bigoplus_{k \in K_1} C_k$, $X_2 = \bigoplus_{k \in K_2} C_k$. По лемме 2.4.3 $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X)) = \mathrm{PE}_R(X_1) \oplus X_3$, где модуль X_3 – прямая сумма модулей третьего типа. Применяя снова следствие 1.4.1, получаем, что модуль $X_1 \oplus X_3$ базисен в $\mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(X))$.

Теперь можно в качестве искомого базисного подмодуля модуля $\mathrm{U}(M)$ взять модуль $B' = B^{(2)} \oplus A$, где

$$A = (\bigoplus_{i \in I} D_i) \oplus \mathrm{U}(\mathrm{PE}_R(B^{(1)})) \oplus X_1 \oplus X_3.$$

Итак, для любого базисного подмодуля B в M существует такой базисный подмодуль B' модуля $\mathrm{U}(M)$, что в разложениях B' и B в прямую сумму неразложимых конечно порождённых модулей совпадают суммы всех прямых слагаемых, изоморфных модулям второго типа с s-ой окружности. Осталось применить к модулю $\mathrm{U}(M)$ предложение 2.3. •

Следствие 2.4.4. *Если для некоторых чисто-проективных R-модулей B_1, B_2 имеем $\mathrm{PE}_R(B_1) \simeq \mathrm{PE}_R(B_2)$, то $B_1 \simeq B_2$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 1.4.1 и теоремы 2.4. •

Следствие 2.4.5. *Отображение $\phi : B \mapsto \mathrm{PE}_R(B)$ является взаимно однозначным соответствием между множествами типов изоморфизма R-модулей второго типа и неразложимых неинъективных неартиновых чисто-инъективных R-модулей.*

Доказательство. По [1, предложение 5.1] ϕ корректно определено и является сюръекцией. Следствие 2.4.4 показывает, что ϕ – инъекция. •

§3. Соответствие между парами идеалов и неразложимыми чисто-инъективными модулями

Лемма 3.1. *Пусть B – циклический цепной R-модуль, e – примитивный идемпотент кольца R, $x \in Be \setminus 0$. Тогда найдётся такой элемент $s \in Re$, что $x \in Bs$, но для любого собственного подмодуля D модуля B имеем $x \notin Ds$.*

Доказательство. Пусть $B = zR$, причём $z \in Bg$ для некоторого примитивного идемпотента g в R, а $x = zt$, где $t \in Re$. Тогда $x = zs$, где $s = gt \in gRe$. Покажем, что элемент s – искомый. Допустим, что D – подмодуль B и $x = y_1 s$, где $y_1 \in D$. Тогда $x = y_1(gs) = ys$, где $y = y_1 g \in Dg$.

Заметим, что если $x = bs$, где $b \in Bg$, то $\mathrm{Ann}_{gR}(b) = s\mathrm{Ann}_{eR}(x)$. Действительно, пусть $u \in gR$ и $bu = 0$. Тогда s и u принадлежат цепному модулю gR, поэтому для некоторого $v \in R$ $s = uv$ или $u = sv$. Но в первом случае $x = bs = (bu)v = 0$, что противоречит условию. Во втором случае $bu = (bs)v = xv = 0$, т.е. $v \in \mathrm{Ann}_R(x)$. Так как $s \in Re$, то можно выбрать $v \in eR \cap \mathrm{Ann}_R(x) = \mathrm{Ann}_{eR}(x)$. Обратное включение очевидно.

Таким образом, $zR \simeq yR \simeq gR/s\mathrm{Ann}_{eR}(x)$. Если модуль B артинов, то сразу получаем, что $yR = D = B$. Предположим, что B – модуль второго типа. Если $z - y \in yR$, то $z \in yR$, поэтому снова $D = B$. В противном случае $yR \subset (z-y)R \subset zR$. Поскольку $(z-y)R$ содержит модуль yR второго типа, то $(z-y)R$ является модулем второго типа, лежащим на одной окружности с модулем yR. Но модули yR и $(z-y)R$ имеют одно и то же проективное накрытие gR, следовательно, они изоморфны. Поэтому $\mathrm{Ann}_R(z-y) = \mathrm{Ann}_R(y)$. Так как $(z-y)s = 0$, то $x = ys = 0$, что противоречит условию. •

Лемма 3.2. *Пусть e, g – примитивные идемпотенты кольца R, $r \in gRe$, $s \in Re$, и рассмотрим циклический модуль $B = yR$, где $y \in Bg$. Если $x = yr \neq 0$, то $x \in Bs$ тогда и только тогда, когда $r \in Rs$.*

Доказательство. Предположим, что $x = bs$, где $s \in Re$, $b \in B$. Пусть $b = yt$ $(t \in gR)$. Рассмотрим элементы $r - ts$, ts, лежащие в цепном левом модуле Re. Допустим, что $ts = k(r - ts)$ для $k \in R$. Так как $ts, r \in gR$, то можно считать, что $k \in gRg$. Заметим, что поскольку $\mathrm{Ann}_{gR}(y)$ – правый идеал R, лежащий в gR, то $\mathrm{Ann}_{gR}(y) = gL$, где L – идеал R, равный некоторой степени $N = \mathrm{Nil}(R)$ или $J = \mathrm{Rad}(R)$. Так как $r - ts \in gL$, то $k(r-ts) = g(k(r-ts)) \in gL$, т.е. $ts \in \mathrm{Ann}_{gR}(y)$. Но это противоречит тому, что $x = y(ts) \neq 0$. Если $r - ts = k(ts)$ для некоторого $k \in R$, то $r = (kt+t)s \in Rs$.

Наконец, если $r \in Rs$, то ясно, что $x = yr \in Bs$. •

Для e-пары (I, K), где e – примитивный идемпотент в R, I – правый идеал R, содержащийся собственным образом в eR, K – левый идеал R, содержащийся собственным образом в Re, рассмотрим следующее условие (см. [2]):

$$\forall r \in eR \setminus I,\ \forall s \in Re \setminus K\ sr \neq 0. \qquad (**)$$

Лемма 3.3. *Пусть e – примитивный идемпотент в R, (I, K) – e-пара, $X = eR/I$, $x = \overline{e} \in X$, $E = \mathrm{E}_R(X)$. Условие $(**)$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого $s \in Re \setminus K$ $x \in Es$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Ann}_{eR}(x) = I$, то условие $(**)$ означает, что для любого $r \in eR$ такого, что $xr \neq 0$, для любого $s \in Re \setminus K$ имеем $sr \neq 0$. Иначе говоря, если $s \in Re \setminus K$ и $sr = 0$ для некоторого $r \in R$, то $xr = 0$. Для данного элемента s это равносильно существованию такого R-гомоморфизма $\varphi : sR \longrightarrow xR$, что $\varphi(s) = x$. В силу инъективности модуля E этот гомоморфизм продолжается до гомоморфизма $\phi : R \longrightarrow E$, что даёт делимость x на s в модуле E. •

Пусть $\mathbb{S}$ – полный набор ортогональных примитивных идемпотентов в R. В дальнейших рассуждениях зафиксируем $\mathbb{S}$ и будем рассматривать только идемпотенты из $\mathbb{S}$.

Пусть M – R-модуль, $g \in \mathbb{S}$ – примитивный идемпотент в R, $y \in Mg \setminus 0$. Введём обозначение $D_M(y) = \{s \in Rg \mid y \notin Ms\}$. Заметим, что $D_M(y)$ – левый идеал кольца R, содержащийся собственным образом в Rg.

Предложение 3.4. *Пусть $e \in \mathbb{S}$, (I, K) – e-пара, удовлетворяющая условию $(**)$, $X = eR/I$, $x = \overline{e} \in X$. Тогда найдётся цепной модуль $W = W(I, K)$ такой, что существует вложение $i : X \longrightarrow W$, для которого $D_W(i(x)) = K$. Кроме того, если $K \neq 0$, то модуль $W(I, K)$ может быть выбран конечно порождённым, а именно: найдётся такой элемент $r \in R$, что $K = \mathrm{Rad}(Rr)$ и $r \in gRe$ для некоторого $g \in \mathbb{S}$, и тогда $W = gR/rI$.*

Доказательство. Если $K = 0$, то согласно лемме 3.3 в качестве W можно взять $\mathrm{E}_R(X)$.

Пусть $K \neq 0$. Заметим сначала, что найдется наименьший среди левых идеалов $X \subset Re$ таких, что $K \subsetneqq X$. Это следует из описания полуцепных нётеровых справа колец в [3, теорема 2.11] (см. также [12, лемма 1.6.1]). Пусть L – такой наименьший идеал, а $r \in L \setminus K$. Тогда $L = Rr$, причём можно считать, что $r \in gRe$ для некоторого $g \in \mathbb{S}$. Определим $W = gR/rI$, $y = \overline{g} \in W$, $x = yr \in We$. Если $x = 0$, то $r \in \mathrm{Ann}_{gR}(y) = rI$, т.е $r = re = ri$ для некоторого $i \in I$. Но тогда $e \in I + \mathrm{Ann}_{eR}(r)$ – сумме двух правых идеалов, содержащихся собственным образом в цепном модуле eR, что невозможно.

Ввиду леммы 3.2 и цепности модуля Re $s \in D_W(x)$ тогда и только тогда, когда $Rs \subsetneqq Rr$, т.е. когда $Rs \subset \mathrm{Rad}(Rr) = K$. Итак, $D_W(x) = K$, следовательно, $r \notin K$. Ясно, что $\mathrm{Ann}_{eR}(x) = \{t \in eR \mid rt \in rI\} = I + \mathrm{Ann}_{eR}(r)$. Так как e-пара (I, K) удовлетворяет условию $(**)$, а $r \in Re \setminus K$, то $rs \neq 0$ для всех $s \in eR \setminus I$, и, следовательно, $\mathrm{Ann}_{eR}(x) = I$, т.е. модуль W – искомый. •

Предложение 3.5. *Для данной e-пары (I, K), удовлетворяющей условию $(**)$, цепной модуль $W = W(I, K)$ такой, что существует вложение $i : X \longrightarrow W$, для которого $D_W(i(x)) = K$, единственен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Если инъективный цепной модуль W обладает требуемым вложением, то $W \simeq \mathrm{E}_R(X)$. Если цепные циклические модули W_1, W_2 удовлетворяют указанному условию, то в силу цепности модуля $E = \mathrm{E}_R(X)$ есть вложение одного из модулей W_1, W_2 в другой, тождественное на xR. Пусть $W_1 \subset W_2$, тогда, применяя лемму 3.1, получаем, что $W_1 = W_2$. Если же требуемым вложением обладают цепной инъективный модуль $W_1 = E$ и цепной циклический неинъективный модуль $W_2 = W$, то можем считать W собственным подмодулем E. Пусть $z \in E \setminus W$, тогда $K = D_W(x) \supset D_{zR}(x) \supset D_E(x) = K$, поэтому $D_W(x) = D_{zR}(x)$. Применяя лемму 3.1, получаем, что $W = zR$, что противоречит выбору z. •

Определение. Пусть $e, f \in \mathbb{S}$. Согласно [2, теорема 1; 13, факт 1.4.7] будем говорить, что e-пара (I_1, K_1) эквивалентна f-паре (I_2, K_2), если $I_1 = uI_2$, $K_1u = K_2$, $u \neq 0$ или $vI_1 = I_2$, $K_1 = K_2v$, $v \neq 0$ для некоторых элементов $u \in eRf$, $v \in fRe$. Введём обозначение $\langle I, K\rangle$ для класса эквивалентности g-пары (I, K), где $g \in \mathbb{S}$.

Пусть M – неразложимый чисто-инъективный R-модуль, $e, f \in \mathbb{S}$, $x \in Me\backslash 0$, $y \in Mf\backslash 0$, $I_1 = \mathrm{Ann}_{eR}(x)$, $K_1 = D_M(x)$, $I_2 = \mathrm{Ann}_{fR}(y)$, $K_2 = D_M(y)$. Проверим, что построенные таким образом e-пара (I_1, K_1) и f-пара (I_2, K_2) эквивалентны. Если M инъективен, тогда M – цепной модуль. Будем считать, что $x = yv$ для некоторого $v \in fRe\backslash 0$. Используя лемму 3.1, можно доказать, что $vI_1 = I_2$, $K_1 = K_2v$. Пусть M не инъективен, а B_x, B_y – базисные подмодули M, содержащие соответственно x и y (см.[1, теорема 5.3]). Тогда существует изоморфизм $\tau : B_x \longrightarrow B_y$. Рассмотрим элементы y, $\tau(x)$, лежащие в цепном модуле B_y. Будем считать, что $\tau(x) = yv$ для некоторого $v \in fRe\backslash 0$. Используя снова лемму 3.1 и чистоту B_x, B_y в M, можно доказать, что $vI_1 = I_2$, $K_1 = K_2 v$. Тем самым доказано, что отображение $\alpha : M \mapsto \langle I, K\rangle$, где $x \in Mg \setminus 0$, $g \in \mathbb{S}$, $I = \mathrm{Ann}_{gR}(x)$, $K = D_M(x)$, корректно определено. Определим обратное отображение: $\beta(\langle I, K\rangle) = \mathrm{PE}_R(W(I, K))$ (см. предложение 3.4). Корректность его задания может быть проверена с помощью предложения 3.5.

Теорема 3.6. *Отображение $\alpha : M \mapsto \langle I, K\rangle$, где $I = \mathrm{Ann}_{gR}(x)$, $K = D_M(x)$, x – произвольный элемент $Mg \setminus 0$ для некоторого $g \in \mathbb{S}$, является биекцией между множеством типов изоморфизма неразложимых ненулевых чисто-инъективных R-модулей и фактор-множеством множества e-пар ($e \in \mathbb{S}$) с условием (**), факторизуемого по описанному выше отношению эквивалентности.*

Замечание 3.6.1. Теорема 3.6 доказана в [13, предложение 1.5.3] с использованием теории моделей для модулей. С помощью понятия базисного подмодуля и предыдущих результатов этого параграфа можно дать другое доказательство этой теоремы, проверив, что отображения α и β взаимно обратны. Кроме того, можно доказать, что e-пара (I_1, K_1) эквивалентна f-паре (I_2, K_2) (где $e, f \in \mathbb{S}$) тогда и только тогда, когда найдутся цепной модуль W и элементы $x_1 \in We, x_2 \in Wf$ такие, что $x_2 = x_1 u$ или $x_1 = x_2 v$, а $I_1 = \mathrm{Ann}_{eR}(x_1)$, $I_2 = \mathrm{Ann}_{fR}(x_2)$, $K_1 = D_W(x_1)$, $K_2 = D_W(x_2)$.

Литература

1. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Базисные подмодули модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* I. — Записки научн.семинаров ПОМИ **272** (2000), 129–143.
2. G. E. Puninski, *Pure-injective modules over a right noetherian serial rings.* — Commun. Algebra **23**, No. 4 (1995), 1579–1592.
3. S. Singh, *Serial right noetherian rings.* — Canad. J. Math. **36**, No. 1 (1984), 22–37.
4. M. H. Wright, *Serial rings with right Krull dimension one,* II. — J. Algebra **117**, No. 1 (1988), 99–116.
5. Ю. А. Дрозд, *Об обобщенно однорядных кольцах.* — Матем. заметки **18**, No. 5 (1975), 705–710.
6. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules.* — J. Algebra **37**, No. 2 (1975), 187–222.
7. А. И. Генералов, *Собственные классы коротких точных последовательностей над нетеровыми полуцепными кольцами.* в кн.: Кольца и модули. Предел.теоремы теор.вер., вып. I, Ленинград, 1986, 87–102.
8. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* т. 2, Мир, М., 1979, 464.

9. R. B. Warfield, *Purity and algebraic compactness for modules.* — Pacific J. Math. **28,** No. 3 (1969), 699–719.
10. Е. Г. Скляренко, *Относительная гомологическая алгебра в категории модулей.* — Успехи матем. наук **33,** вып. **3** (1978), 85–120.
11. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* Киев, Препринт ИМ-75-1, Ин-т мат. АН УССР, 1975.
12. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Пополнение модулей над полуцепными нетеровыми справа кольцами.* — Записки научн. семинаров ПОМИ **281** (2001).
13. Г. Е. Пунинский, *Теоретико–модельные методы в теории колец и модулей (докт.дисс.).* М., 1995, 185.
14. И. М. Зильберборд, *Индуктивные чистоты над полуценными нетеровыми справа кольцами.* Рукопись деп. в ВИНИТИ, 1449–B2001 от 18.06.01.

Generalov A. I., Zilberbord I. M. Basic submodules over right noetherian serial rings. II.

In the preceding paper the authors published the theorem of existence for basic submodules of right modules over right noetherian serial rings. The goal of the present paper is to prove the theorem of uniqueness for basic submodules over such rings.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 7 апреля 2001 г.