Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

А. И. Генералов

QF-СОБСТВЕННЫЕ КЛАССЫ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ СТАБИЛЬНЫЕ КАТЕГОРИИ

Введение

Известная теорема Рикарда [1] утверждает, что для произвольной конечномерной QF-алгебры A над полем стабильная категория A-модулей является фактор-категорией ограниченной производной категории алгебры A. Имеется понятие относительной стабильной категории (см. [2]), и в недавней работе [3] оно было применено для случая групповой алгебры конечной группы. С другой стороны, в [4] была предложена конструкция относительной производной категории (см. также [5, 6]). Естественный вопрос, – имеет ли место относительный вариант теоремы Рикарда, – получает в настоящей работе положительный ответ.

Напомним также, что из приведенной выше теоремы Рикарда вытекает весьма полезное следствие: если для некоторых QF-алгебр их ограниченные производные категории треугольно эквивалентны (т.е. эквивалентны как триангулированные категории), то и их стабильные категории также треугольно эквивалентны. При некоторых дополнительных условиях, накладываемых на исходные абелевы категории, нам удается получить и относительный вариант только что упомянутого результата. Отметим также, что наши доказательства, будучи примененными к абсолютному случаю, представляются на наш взгляд более простыми по сравнению с [1].

1. Относительная стабильная категория.

В этом разделе мы подробно опишем конструкцию относительной стабильной категории, а также структуру триангулированной категории на ней. В отличие от работы [2], где это делается в контексте точных категорий в смысле Квиллена [7], мы будем использовать понятие собственного класса. По поводу определения этого понятия и его простейших свойств мы отсылаем читателя к работам [8, 9] (см. также [10], где для этого понятия используется термин “чистота”).

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория, ω – собственный класс коротких точных последовательностей в $\mathcal{A}$. Через $\omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C,A)$ обозначаем группу (классов конгруентности) ω-собственных коротких точных последовательностей. Она является подгруппой в группе $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C,A)$ (определяемой, как обычно, с помощью сложения Бэра; см. [11]). Если

$$E : A \overset{\alpha}{\rightarrowtail} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} C \tag{1.1}$$

– ω-собственная короткая точная последовательность, то $\mathrm{cl}E \in \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C,A)$ обозначает класс конгруентных коротких точных последовательностей, содержащий E; кроме того, морфизм α (соответственно σ) из (1.1) называется *ω-собственным мономорфизмом* (соответственно *ω-собственным эпиморфизмом*). Пусть $\mathcal{J}_\omega$ (соответственно $\mathcal{P}_\omega$) – полная подкатегория в $\mathcal{A}$, состоящая из ω-инъективных (соответственно ω-проективных) объектов.

Справедлив следующий относительный вариант леммы Шанюэля.

Предложение 1.1. *Пусть ω – собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$, и пусть даны две ω-собственные короткие точные последовательности*

$$U \rightarrowtail P \twoheadrightarrow X, \quad U' \rightarrowtail P' \twoheadrightarrow X,$$

в которых $P, P' \in \mathcal{P}_\omega$. Тогда $P \oplus U' \simeq P' \oplus U$.

Доказательство можно получить с помощью незначительных изменений в доказательстве [13, предложение I.6.3].

Мы будем без специальных оговорок использовать также дуальный вариант предложения 1.1.

Биуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta} & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ A' & \xrightarrow{\beta'} & B' \end{array}$$

называется *ω-собственным*, если соответствующая ему короткая точная последовательность $A \overset{(\alpha,\beta)^T}{\rightarrowtail} A' \oplus B \overset{(\beta',-\alpha')}{\twoheadrightarrow} B'$ является ω-собственной.

Для удобства ссылок приведем следующий результат из [14, лемма 3.5].

Предложение 1.2. *Пусть ω – собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$, и пусть в $\mathcal{A}$ дана коммутативная диаграмма вида*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C'. \end{array} \tag{1.2}$$

Объемлющий квадрат этой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\beta\alpha} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A' & \xrightarrow{\beta'\alpha'} & C' \end{array}$$

является ω-собственным, если и только если ω-собственными являются левый и правый квадраты диаграммы (1.2).

□

Напомним, что собственный класс ω называется *проективным*, если для любого объекта $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ существует ω-собственный эпиморфизм $\sigma : P \to X$, где $P \in \mathcal{P}_\omega$. Дуально вводится понятие *инъективного* собственного класса.

Собственный класс ω в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется *квазифробениусовым* (или, для краткости, *QF-собственным* классом), если ω проективен и инъективен, а $\mathcal{P}_\omega = \mathcal{J}_\omega$.

Примером QF-собственного класса служит класс всех коротких точных последовательностей в категории A-Mod левых A-модулей, где A – конечномерная QF-алгебра над полем; здесь можно также вместо категории всех A-модулей рассмотреть ее полную подкатегорию A-mod, состоящую из конечномерных модулей.

Обобщение этого примера предложено в [3]. Пусть k – коммутативное кольцо, G – конечная группа, $\mathfrak{X}$ – некоторое (непустое) семейство подгрупп группы G. Короткая точная последовательность E в kG-Mod вида (1.1) называется *$\mathfrak{X}$-расщепляемой*, если для любой подгруппы $H \in \mathfrak{X}$ существует kH-гомоморфизм $\pi : B \to A$ такой, что $\pi\alpha = \mathrm{id}_A$. Из [3, с. 72] следует, что класс всех $\mathfrak{X}$-расщепляемых коротких точных последовательностей является QF-собственным классом.

Пусть ω – QF-собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$. Называем объекты X, $X' \in \mathrm{Ob}\mathcal{A}$ *ω-стабильно эквивалентными* и пишем $X \sim_\omega X'$, если существуют объекты $P, P' \in \mathcal{P}_\omega$ такие, что $X \oplus P \simeq X' \oplus P'$. Класс ω-стабильной эквивалентности, содержащий X, обозначаем через $[X]$; однако, мы будем часто отождествлять объект X с его классом $[X]$.

Построим *ω-стабильную категорию* $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ категории $\mathcal{A}$. Ее объекты – это классы ω-стабильной эквивалентности объектов категории $\mathcal{A}$, а группы морфизмов определяются следующим образом:

$$\underline{\mathcal{A}}_\omega([X],[Y]) = \mathcal{A}(X,Y)/\mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(X,Y),$$

где $\mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(X,Y)$ – подгруппа в $\mathcal{A}(X,Y)$, состоящая из морфизмов, проходящих через некоторые ω-проективные объекты. Для морфизма $f: X \to Y$ в категории $\mathcal{A}$ через $[f]$ обозначаем его класс в $\underline{\mathcal{A}}_\omega([X],[Y])$. При этом, если $Y' \sim_\omega Y$, то $[f]$ может быть также представлен некоторым морфизмом $f': X \to Y'$ (в $\mathcal{A}$). Это следует из того, что если $P \in \mathcal{P}_\omega$, то, как легко проверить, вложение в качестве прямого слагаемого $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}: Y \to Y \oplus P$ индуцирует изоморфизм

$$\bar{i}: \mathcal{A}(X,Y)/\mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(X,Y) \to \mathcal{A}(X,Y\oplus P)/\mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(X,Y\oplus P).$$

Аналогичная замена допустима и для представителей класса $[X]$. Это позволяет определить композицию в $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ следующим образом: для морфизмов $[X] \xrightarrow{[f]} [Y] \xrightarrow{[g]} [Z]$ выберем представителей f и g, для которых в категории $\mathcal{A}$ определена композиция, и положим $[g]\cdot[f] = [gf]$. Легко проверяется, что $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ – аддитивная категория.

Полезно также заметить, что для $[f]: [X] \to [Y]$ всегда можно выбрать представитель, который является ω-собственным мономорфизмом. Действительно, если $f: X \to Y$ – некоторый представитель в $\mathcal{A}$ морфизма $[f]$, то рассмотрим ω-собственный мономорфизм $i: X \to P$, где $P \in \mathcal{P}_\omega$, и остается заметить, что $\begin{pmatrix} f \\ i \end{pmatrix}: X \to Y \oplus P$ – ω-собственный мономорфизм ввиду соотношения $i = (0,1)(f,i)^T$ (а также ввиду свойства $\mathrm{P}\overline{2}$ собственного класса; см. [8, 9]). Аналогично морфизм $[f]$ имеет представитель в $\mathcal{A}$, который является ω-собственным эпиморфизмом.

Для объекта $X \in \mathcal{A}$ рассмотрим ω-собственную короткую точную последовательность $E: U \rightarrowtail P \twoheadrightarrow X$, в которой $P \in \mathcal{J}_\omega = \mathcal{P}_\omega$. Из предложения 1.1 следует, что класс $[U]$ объекта U не зависит от выбора последовательности E; более того, ясно, что на самом деле $[U]$ определяется классом $[X]$. Определим $\Omega_\omega[X] = [U]$; упрощая обозначения, будем часто писать также $U = \Omega_\omega X$.

Пусть $f: X \to X'$ – морфизм в категории $\mathcal{A}$. Рассмотрим две ω-собственные короткие точные последовательности

$$U \overset{\alpha}{\rightarrowtail} P \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} X, \quad U' \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} P' \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} X',$$

в которых P, $P' \in \mathcal{P}_\omega$. Тогда существует коммутативная диаграмма, представляющая морфизм этих коротких точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccc} U & \overset{\alpha}{\rightarrowtail} & P & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ U' & \overset{\alpha'}{\rightarrowtail} & P' & \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} & X'. \end{array}$$

Непосредственно проверяется, что если $f \in \mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(X, X')$, то $f' \in \mathrm{P}_\omega\mathcal{A}(U, U')$. Это позволяет определить $\Omega_\omega[f] = [f']$, и получаем функтор $\Omega_\omega: \underline{\mathcal{A}}_\omega \to \underline{\mathcal{A}}_\omega$.

С помощью дуальных рассуждений строится функтор $\Omega_\omega^{-1}: \underline{\mathcal{A}}_\omega \to \underline{\mathcal{A}}_\omega$, при этом, как легко видеть, Ω_ω^{-1} является обратным к функтору Ω_ω, и, следовательно, Ω_ω (как и Ω_ω^{-1}) – автоморфизм категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$.

Предложение 1.3. *Имеют место изоморфизмы, естественные по X и Y:*

а) $\eta = \eta_{X,Y}: \underline{\mathcal{A}}_\omega([X], \Omega_\omega^{-1}[Y]) \xrightarrow{\simeq} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Y)$;

б) $\varepsilon = \varepsilon_{X,Y}: \underline{\mathcal{A}}_\omega(\Omega_\omega[X], [Y]) \xrightarrow{\simeq} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Y)$.

Доказательство. а) Рассмотрим ω-собственную последовательность $E: Y \overset{\alpha}{\rightarrowtail} P \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} \Omega_\omega^{-1}Y$, где $P \in \mathcal{J}_\omega = \mathcal{P}_\omega$. Она индуцирует “относительную” длинную точную гомологическую последовательность (см., например, [10]), и, в частности, точна последовательность:

$$\mathcal{A}(X, P) \xrightarrow{\sigma_*} \mathcal{A}(X, \Omega_\omega^{-1}Y) \xrightarrow{\delta} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, Y) \xrightarrow{\alpha_*} \xrightarrow{\alpha_*} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X, P) = 0. \qquad (1.3)$$

Напомним, что связывающий гомоморфизм δ из (1.3) описывается следующим образом: для $f \in \mathcal{A}(X, \Omega_\omega^{-1}Y)$ $\delta(f) = \mathrm{cl} f^*(E)$, где $f^*(E)$ – это последовательность, являющаяся верхней строкой диаграммы, которая соответствует построению универсального квадрата на морфизмах σ и f:

$$\begin{array}{llllll} f^*(E): & Y & \rightarrowtail & Z & \twoheadrightarrow & X \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow f \\ E: & Y & \overset{\alpha}{\rightarrowtail} & P & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & \Omega_\omega^{-1}Y. \end{array}$$

Теперь докажем, что $\mathrm{Im}\,\sigma_* = \mathrm{P}_\omega \mathcal{A}(X, \Omega_\omega^{-1}Y)$. Ясно, что $\mathrm{Im}\,\sigma_* \subset \mathrm{P}_\omega \mathcal{A}(X, \Omega_\omega^{-1}Y)$. Если же $f = \mu\lambda: X \xrightarrow{\lambda} Q \xrightarrow{\mu} \Omega_\omega^{-1}Y$, где $Q \in \mathcal{P}_\omega$, то, поскольку σ – ω-собственный эпиморфизм, существует морфизм $\mu': Q \to P$ такой, что $\sigma\mu' = \mu$. Следовательно, $f = \sigma\mu'\lambda = \sigma_*(\mu'\lambda) \in \mathrm{Im}\,\sigma_*$. Таким образом, связывающий гомоморфизм δ индуцирует требуемый изоморфизм η. Естественность этого изоморфизма легко следует из естественности гомоморфизма δ.

б) Доказательство проводится дуально доказательству а). □

Предложение 1.4. *Пусть ω – QF-собственный класс в категории $\mathcal{A}$, и пусть дана ω-собственная короткая точная последовательность $X \overset{u}{\rightarrowtail} Y \overset{v}{\twoheadrightarrow} Z$. Тогда:*

а) *существует ω-собственная короткая точная последовательность вида*

$$E_1: Y \overset{(v,i)^T}{\rightarrowtail} Z \oplus P \twoheadrightarrow \Omega_\omega^{-1}X, \quad \text{где} \quad P \in \mathcal{P}_\omega;$$

б) *существует ω-собственная короткая точная последовательность вида*

$$E_2: \Omega_\omega Z \rightarrowtail X \oplus Q \overset{(u,\pi)}{\twoheadrightarrow} Y, \quad \text{где} \quad Q \in \mathcal{P}_\omega.$$

Доказательство. а) Пусть $i: Y \to P$ – некоторый ω-собственный мономорфизм, где $P \in \mathcal{P}_\omega$. Построим следующую коммутативную диаграмму, состоящую из биуниверсальных квадратов,

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{i} & P \\ \downarrow & & \downarrow v & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{f} & U \end{array} \tag{1.4}$$

(правый квадрат строится как коуниверсальный квадрат на морфизмах v и i). Так как оба квадрата этой диаграммы ω-собственные, то по предложению 1.2 объемлющему квадрату диаграммы (1.4) соответствует ω-собственная короткая точная последовательность $X \overset{iu}{\rightarrowtail} P \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} U$, откуда следует, что можно взять $\Omega_\omega^{-1}X = U$. Тогда искомая последовательность E_1 – это короткая точная последовательность, соответствующая правому квадрату диаграммы (1.4).

б) Доказательство дуально доказательству а). $\square$

Теперь следуя работе [12] (ср. [2]), мы введем структуру триангулированной категории на $\underline{\mathcal{A}}_\omega$. Пусть $E\colon X \overset{u}{\rightarrowtail} Y \overset{v}{\twoheadrightarrow} Z$ – ω-собственная короткая точная последовательность. По предложению 1.3 существует морфизм $w\colon Z \to \Omega_\omega^{-1}X$ такой, что $\eta([w]) = \mathrm{cl}E$. Последовательность в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ вида

$$[X] \xrightarrow{[u]} [Y] \xrightarrow{[v]} [Z] \xrightarrow{[w]} \Omega_\omega^{-1}[X]$$

назовем *стандартным треугольником*, соответствующим последовательности E.

В дальнейшем для простоты "функтор сдвига" Ω_ω^{-1} обозначаем через T (и тогда $T^{-1} = \Omega_\omega$). Любая последовательность в $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ вида

$$[A'] \xrightarrow{[\alpha]} [A] \xrightarrow{[\beta]} [A''] \xrightarrow{[\gamma]} T[A']$$

называется *T-последовательностью.* Естественным образом вводится понятие изоморфизма T-последовательностей. Любая T-последовательность, изоморфная стандартному треугольнику, называется *треугольником*. Класс всех треугольников в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ обозначим через $\mathcal{T}$.

Теорема 1.5 [2]. *Пусть ω – QF-собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$. Набор $(\underline{\mathcal{A}}_\omega, T = \Omega_\omega^{-1}, \mathcal{T})$ является триангулированной категорией.*

Доказательство. Для удобства читателя мы приведем подробное доказательство этой теоремы. Проверим последовательно аксиомы триангулированной категории [15] (см. также [16, 17]).

TR1. Части (а) и (б) этой аксиомы очевидны.

(в) Произвольный морфизм в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ может быть представлен некоторым ω-собственным мономорфизмом в категории

$\mathcal{A}$, и тогда требуемое утверждение получаем по определению стандартного треугольника.

TR2. Пусть дан треугольник $[X] \xrightarrow{[u]} [Y] \xrightarrow{[v]} [Z] \xrightarrow{[w]} T[X]$. Можно считать, что он стандартный, т.е. имеется ω-собственная короткая точная последовательность в $\mathcal{A}$ вида $E{:}\, X \overset{u}{\rightarrowtail} Y \overset{v}{\twoheadrightarrow} Z$, для которой $\eta_{Z,X}([w]) = \mathrm{cl} E$. Пусть $E_1{:}\, Y \overset{(v,i)^T}{\rightarrowtail} Z \oplus P \overset{(f,-\sigma)}{\twoheadrightarrow} \Omega_\omega^{-1} X$, $P \in \mathcal{P}_\omega$, – ω-собственная короткая точная последовательность из предложения (1.4) (a). Тогда можно построить следующую коммутативную диаграмму, представляющую морфизм ω-собственных коротких точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc}
E{:} & X & \overset{u}{\rightarrowtail} & Y & \overset{v}{\twoheadrightarrow} & Z \\
 & \| & & \downarrow i & & \downarrow f \\
E'{:} & X & \overset{i\,u}{\rightarrowtail} & P & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & \Omega_\omega^{-1} X.
\end{array}$$

В длинной гомологической последовательности, индуцированной последовательностью E', для связывающего гомоморфизма δ имеем $\mathrm{cl} E = \delta(f)$, следовательно, $\eta_{Z,X}([f]) = \mathrm{cl} E$, и, таким образом, $[f] = [w]$.

Далее, для построения морфизма $\Omega_\omega^{-1} u$ (точнее, некоторого представителя морфизма $T[u]$) мы рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, строки которой – ω-собственные короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{cccccc}
X & \overset{i\,u}{\rightarrowtail} & P & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & U \\
u \downarrow & & \| & & \downarrow \Omega_\omega^{-1} u \\
Y & \overset{i}{\rightarrowtail} & P & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & \Omega_\omega^{-1} Y.
\end{array}$$

Теперь следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
Y & \overset{(v,i)^T}{\rightarrowtail} & Z \oplus P & \overset{(f,-\sigma)}{\twoheadrightarrow} & U \\
\| & & \downarrow (0,1) & & \downarrow -\Omega_\omega^{-1} u \\
Y & \overset{i}{\rightarrowtail} & P & \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} & \Omega_\omega^{-1} Y
\end{array}$$

показывает (ср. доказательство предложения 1.3), что в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ имеется стандартный треугольник вида

$$[Y] \overset{[(v,i)^T]}{\longrightarrow} [Z \oplus P] \overset{[(f,-\sigma)]}{\longrightarrow} T[X] \xrightarrow{-T[u]} T[Y],$$

который, как легко видеть, изоморфен T-последовательности

$$[Y] \xrightarrow{[v]} [Z] \xrightarrow{[w]} T[X] \xrightarrow{-T[u]} T[Y].$$

TR3. Пусть в категории $\mathcal{A}$ дан квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

такой, что $[gu] = [u'f]$. Мы хотим заменить представители в классах объектов и морфизмов, входящих в квадрат (1.5), чтобы свести ситуацию к случаю, когда соответствующий квадрат коммутативен уже в $\mathcal{A}$. По предположению морфизм $gu - u'f$ проходит через некоторый объект $P_0 \in \mathcal{P}_\omega$: $gu - u'f = \psi\varphi\colon X \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} Y$. Тогда имеет место следующий коммутативный квадрат в $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\binom{f}{\varphi}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \oplus P_0 \arrow[r, "(u',\psi)"] & Y', \end{tikzcd}$$

при этом ясно, что $[f] = [(f,\varphi)^T]$, $[u'] = [(u',\psi)]$. Поэтому можно считать, что квадрат (1.5) коммутативен в категории $\mathcal{A}$. Кроме того, мы можем дополнительно предположить, что в этом квадрате u и u' – ω-собственные мономорфизмы. Действительно, пусть $i\colon X \to P$, $i'\colon X' \to P'$ – ω-собственные мономорфизмы. Так как $\binom{u}{i} : X \to Y \oplus P$ – ω-собственный мономорфизм, то существует гомоморфизм $(j,j')\colon Y \oplus P \to P'$ такой, что $(j,j')\cdot(u,i)^T = i'f$, и мы можем построить следующий коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{u}{i}"] \arrow[d, "f"'] & Y \oplus P \arrow[d, "\begin{pmatrix} g & 0 \\ j & j' \end{pmatrix}"] \\ X' \arrow[r, "\binom{u'}{i'}"] & Y' \oplus P'. \end{tikzcd}$$

Вновь заменяя представители в классах рассматриваемых объектов и морфизмов, можем считать, что в (1.5) u, u' – ω-собственные мономорфизмы, и при этом $gu = u'f$. Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму, строки которой – ω-собственные короткие точные последовательности:

$$\begin{array}{cccccc} E\colon & X & \overset{u}{\rightarrowtail} & Y & \overset{v}{\twoheadrightarrow} & Z \\ & f\downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ E'\colon & X' & \overset{u'}{\rightarrowtail} & Y' & \overset{v'}{\twoheadrightarrow} & Z'. \end{array} \tag{1.6}$$

Ввиду [11, лемма III.1.6] имеем: $f_*(\mathrm{cl}E) = h^*(\mathrm{cl}E')$. Пусть

$$\begin{aligned} &\eta\colon \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z],T[X]) \xrightarrow{\simeq} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z,X),\\ &\eta'\colon \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z'],T[X']) \xrightarrow{\simeq} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z',X'),\\ &\eta_1\colon \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z],T[X']) \xrightarrow{\simeq} \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z,X') \end{aligned}$$

– изоморфизмы из предложения 1.3. Используя естественность этих изоморфизмов, построим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z],T[X]) & \xrightarrow{(T[f])_*} & \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z],T[X']) & \xleftarrow{[h]^*} & \underline{\mathcal{A}}_\omega([Z'],T[X']) \\ \eta\Big\downarrow\simeq & & \eta_1\Big\downarrow\simeq & & \eta'\Big\downarrow\simeq \\ \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z,X) & \xrightarrow{f_*} & \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z,X') & \xleftarrow{h^*} & \omega\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(Z',X'). \end{array} \tag{1.7}$$

Пусть $w\colon Z \to \Omega_\omega^{-1}X$, $w'\colon Z' \to \Omega_\omega^{-1}X'$ – морфизмы, для которых $\eta([w]) = \mathrm{cl}E$, $\eta'([w']) = \mathrm{cl}E'$. Теперь с использованием диаграммы (1.7) получаем, что

$$\eta_1(T[f]\cdot[w]) = \eta_1(T[f])_*([w]) = f_*\eta([w]) = f_*(\mathrm{cl}E),$$

аналогично имеем $\eta_1([h]\cdot[w']) = h^*(\mathrm{cl}E')$, и, следовательно, $\eta_1(T[f]\cdot[w]) = \eta_1([h]\cdot[w'])$, т.е. $T[f]\cdot[w] = [h]\cdot[w']$. Это завершает доказательство того, что $([f],[g],[h])$ – это морфизм стандартных треугольников, соответствующих последовательностям E и E' из (1.6).

TR4. Пусть в категории $\mathcal{A}$ даны морфизмы $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Как было отмечено ранее, можно считать, что f и g – ω-собственные мономорфизмы. Рассмотрим следующие морфизмы

(ω-собственных) коротких точных последовательностей:

$$\begin{array}{rcccccc} E_f\colon & X & \overset{f}{\rightarrowtail} & Y & \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} & Z' \\ & \| & & \downarrow g & & \downarrow g' \\ E_{gf}\colon & X & \overset{gf}{\rightarrowtail} & Z & \overset{\alpha'}{\twoheadrightarrow} & Y'; \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} E_g\colon & Y & \overset{g}{\rightarrowtail} & Z & \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} & X' \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & \| \\ E_{g'}\colon & Z' & \overset{g'}{\rightarrowtail} & Y' & \overset{\gamma'}{\twoheadrightarrow} & X'. \end{array}$$

Пусть $[\beta] = \eta^{-1}_{Z',X}(\mathrm{cl}E_f)$, $[\beta'] = \eta^{-1}_{Y',X}(\mathrm{cl}E_{gf})$, $[\lambda] = \eta^{-1}_{X',Y}(\mathrm{cl}E_g)$, $[\lambda'] = \eta^{-1}_{X',Z'}(\mathrm{cl}E_{g'})$. Тогда можно построить в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ следующую коммутативную диаграмму, строки и столбцы которой являются треугольниками (для упрощения обозначений мы опускаем скобки в обозначениях объектов и морфизмов):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"] & Z' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "gf"] & Z \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\gamma"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\gamma'"] & TX \\ & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & X' \arrow[d, "\lambda'"] & \\ & TY \arrow[r, "T\alpha"] & TZ'. & \end{tikzcd}$$

Коммутативность квадратов (1) и (2) в этой диаграмме следует из естественности изоморфизмов η (ср. окончание проверки свойства TR3).

Наконец, докажем, что $\lambda \cdot \gamma' = Tf \cdot \beta'$ (в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$). Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{rcccccc} E_{gf}\colon & X & \overset{gf}{\rightarrowtail} & Z & \overset{\alpha'}{\twoheadrightarrow} & Y' \\ & \downarrow f & & \| & & \downarrow \gamma' \\ E_g\colon & Y & \overset{g}{\rightarrowtail} & Z & \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} & X' \end{array}$$

следует, что $f_*(\mathrm{cl}E_{gf}) = (\gamma')^*(\mathrm{cl}E_g)$. Отсюда, вновь используя естественность изоморфизмов η, получаем, что $\eta_{Y',Y}(Tf \cdot \beta') = f_*\eta_{Y',X}(\beta') = (\gamma')^*\eta_{X',Y}(\lambda) = \eta_{Y',Y}(\lambda \cdot \gamma')$. □

Следствие 1.6. *Пусть в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ дана T-последовательность*

$$[X] \overset{[u]}{\to} [Y] \overset{[v]}{\to} [Z] \overset{[w]}{\to} T[X]. \tag{1.8}$$

Она является треугольником тогда и только тогда, когда в категории $\mathcal{A}$ существуют ω-собственные короткие точные последовательности вида

$$X \overset{(u,i)^T}{\rightarrowtail} Y \oplus P \overset{(v,\pi)}{\twoheadrightarrow} Z, \quad Y \overset{(v,i')^T}{\rightarrowtail} Z \oplus P' \overset{(w,\pi')}{\twoheadrightarrow} \Omega_\omega^{-1}X, \tag{1.9}$$

где X, Y, Z – подходящие представители соответствующих классов ω-стабильной эквивалентности, а P, $P' \in \mathcal{P}_\omega$.

Доказательство. Предположим, что T-последовательность (1.8) является треугольником. Можно считать, что этот треугольник стандартный, и тогда указанные ω-собственные последовательности получены в доказательстве свойства TR2. Если же даны ω-собственные последовательности (1.9), то из рассмотрения коммутативной диаграммы, строки которой – ω-собственные короткие точные последовательности,

$$\begin{array}{ccccc}
X & \overset{(u,i)^T}{\rightarrowtail} & Y \oplus P & \overset{(v,\pi)}{\twoheadrightarrow} & Z \\
\| & & \downarrow i' \oplus 1 & & \downarrow w \\
X & \overset{(i'u,i)^T}{\rightarrowtail} & P' \oplus P & \overset{(-\pi',w\pi)}{\twoheadrightarrow} & \Omega_\omega^{-1}X,
\end{array}$$

получаем стандартный треугольник

$$[X] \overset{[(u,i)^T]}{\to} [Y \oplus P] \overset{[(v,\pi)]}{\to} [Z] \overset{[w]}{\to} T[X],$$

который, очевидно, изоморфен T-последовательности (1.8). □

Замечание. Следствие 1.6 показывает, что мы могли бы развить относительную версию подхода Линкельмана [19] к введению структуры триангулированной категории на стабильной категории модулей над QF-алгеброй.

2. Теорема Рикарда – относительный вариант.

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Через $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ обозначим категорию (коцепных) комплексов над $\mathcal{A}$, а через $K(\mathcal{A})$ (соответственно $K^-(\mathcal{A})$ или $K^b(\mathcal{A})$) – гомотопическую категорию всех (соответственно ограниченных сверху или ограниченных) комплексов над $\mathcal{A}$. Аналогичные обозначения применяются для соответствующих гомотопических категорий над подкатегориями категории $\mathcal{A}$.

Пусть ω – произвольный собственный класс (коротких точных последовательностей) в категории $\mathcal{A}$. Комплекс $X = (X^n, d^n) \in K(\mathcal{A})$ называется *ω-ацикличным*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ $H^n(X) = 0$, а канонические короткие точные последовательности $\mathrm{Ker} d^n \rightarrowtail X^n \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\, d^n$, индуцируемые дифференциалами комплекса, являются ω-собственными. Морфизм $f: X \to Y$ в $K(\mathcal{A})$ называется *ω-квазиизоморфизмом*, если его конус $\mathrm{C}(f)$ ω-ацикличен. Тогда относительная ограниченная производная категория $D^b_\omega(\mathcal{A})$ определяется (см. [4]) как локализация категории $K^b(\mathcal{A})$ относительно класса ω-квазиизоморфизмов; говорят также, что $D^b_\omega(\mathcal{A})$ – это фактор-категория категории $K^b(\mathcal{A})$ по (полной) подкатегории, состоящей из ω-ацикличных комплексов.

В дальнейшем мы рассматриваем только полные подкатегории, при этом мы обычно их отождествляем с соответствующим классом объектов.

Комплексу $X \in \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ сопоставим комплексы $\tau_n X$ и $\tilde{\tau}_n X$, определяемые следующим образом:

$$(\tau_n X)^m = \begin{cases} X^m, & \text{если } \ m \leqslant n, \\ \mathrm{Coker}\, d_X^{n-1}, & \text{если } \ m = n+1, \\ 0, & \text{если } \ m > n+1; \end{cases}$$

$$(\tilde{\tau}_n X)^m = \begin{cases} X^m, & \text{если } \ m \leqslant n, \\ 0, & \text{если } \ m > n, \end{cases}$$

а дифференциалы в обоих комплексах индуцируются дифференциалами в X. Через $K^{-,b}_\omega(\mathcal{P}_\omega)$ обозначим подкатегорию в $K^-(\mathcal{P}_\omega)$, состоящую из комплексов X таких, что найдется $n \in \mathbb{Z}$, для которого $\tau_n X$ – ω-ацикличный комплекс.

Из доказательства в [4, теорема 3.4(в)] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть ω – проективный собственный класс в* *абелевой категории $\mathcal{A}$. Тогда категории $D^b_\omega(\mathcal{A})$ и $K^{-,b}_\omega(\mathcal{P}_\omega)$ треугольно эквивалентны.*

Пользуясь этим утверждением, мы будем часто отождествлять категорию $K^{-,b}_\omega(\mathcal{P}_\omega)$ с ее образом в $D^b_\omega(\mathcal{A})$.

Предположим теперь, что ω – QF-собственный класс в категории $\mathcal{A}$. В этом разделе, работая в ω-стабильной категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$, мы обычно не делаем различия в обозначении объектов (соответственно морфизмов) категории $\mathcal{A}$ и их классов в $\underline{\mathcal{A}}_\omega$. Комплекс $X \in D^b_\omega(\mathcal{A})$ называется *ω-совершенным*, если он (ω-квази) изоморфен некоторому комплексу из $K^b(\mathcal{P}_\omega)$. Подкатегорию в $D^b_\omega(\mathcal{A})$, состоящую из ω-совершенных комплексов, обозначим через $\mathcal{C}^{pf}_\omega$. Легко видеть, что комплекс $X \in K^-(\mathcal{P}_\omega)$ принадлежит $\mathcal{C}^{pf}_\omega$, если и только если существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tau_n X$ гомотопен нулю.

Теорема 2.2. *Пусть ω – QF-собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{D} = D^b_\omega(\mathcal{A})$ – относительная ограниченная производная категория категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{pf}_\omega$. Тогда:*

а) *$\mathcal{C}$ – насыщенная $\mathcal{T}$-подкатегория в $\mathcal{D}$;*

б) *фактор-категория $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ треугольно эквивалентна ω-стабильной категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$.*

Напомним, что полная подкатегория $\mathcal{C}$ триангулированной категории $\mathcal{B}$ называется *насыщенной $\mathcal{T}$-подкатегорией*, если $\mathcal{C}$ замкнута относительно треугольников (т.е. если две вершины треугольника лежат в $\mathcal{C}$, то и третья вершина этого треугольника лежит в $\mathcal{C}$), а также относительно прямых слагаемых. Имеется биективное соответствие между насыщенными $\mathcal{T}$-подкатегориями $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{S})$ в $\mathcal{B}$ и насыщенными локализующими классами морфизмов $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{C})$ в $\mathcal{B}$, совместимыми с триангуляцией, где $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ состоит из объектов Z таких, что существует треугольник

$$X \xrightarrow{s} Y \to Z \to TX, \tag{2.1}$$

в котором $s \in \mathcal{S}$, а $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ состоит из морфизмов s таких, что существует треугольник вида (2.1), в котором $Z \in \mathcal{C}$ [17] (см. также [18]).

Отметим следующее полезное утверждение (см. [17, предложение II.2.1.16]).

Предложение 2.3. *Пусть $\Phi: \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ – точный функтор между триангулированными категориями. Тогда* $\operatorname{Ker}\Phi = \{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{B} \mid X \simeq 0\}$ *– насыщенная $\mathcal{T}$-подкатегория в $\mathcal{B}$.*

Доказательство теоремы 2.2. Введем обозначение $\mathcal{K}=K_{\omega}^{-,b}(\mathcal{P}_{\omega})$. Мы сначала построим точный функтор $\widetilde{F}\colon\mathcal{K}\to\underline{\mathcal{A}}_{\omega}$. Пусть $X\in\mathcal{K}$, и пусть $n\in\mathbb{Z}$ такое, что $\tau_n X$ ω-ацикличен. Определим $\widetilde{F}(X)=T^{-n}(\operatorname{Im} d_X^n)$. Заметим, что в этом определении n можно заменить на любое меньшее целое число. Пусть $f\colon X\to Y$ – морфизм в $\mathcal{K}$, и пусть $n\in\mathbb{Z}$ такое, что $\tau_n X$ и $\tau_n Y$ ω-ацикличны. Морфизм f индуцирует морфизм $\widetilde{f}=\widetilde{f}^n\colon\operatorname{Im} d_X^n\to\operatorname{Im} d_Y^n$ в категории $\mathcal{A}$. Положим $\widetilde{F}(f)=T^{-n}(\widetilde{f}^n)$. Ясно, что тем самым построен функтор из $\mathcal{K}$ в $\underline{\mathcal{A}}_{\omega}$.

Докажем теперь, что $\widetilde{F}$ – точный функтор. Введем дополнительные обозначения: для любого комплекса $A=(A^n,d_A^n)$ через $d_A^n=\mu_A^n\sigma_A^n\colon A^n\xrightarrow{\sigma_A^n}\operatorname{Im} d_A^n\xrightarrow{\mu_A^n}A^{n+1}$ обозначим каноническое разложение морфизма d_A^n. Пусть дан треугольник в $\mathcal{K}$:

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}X[1].$$

Можно считать, что этот треугольник стандартный, т.е. $Z=\mathrm{C}(u)$ – конус морфизма u, а также $v^n=(0,1)^T$, $w^n=(1,0)$ для любого $n\in\mathbb{Z}$. Имеется следующая короткая точная последовательность в $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$, расщепляемая в каждой степени (см. [16]):

$$X\overset{u_1}{\rightarrowtail}Y_1\overset{v_1}{\twoheadrightarrow}Z, \tag{2.2}$$

где $Y_1=\operatorname{Cyl}(u)$ – цилиндр морфизма u, а также $u_1^n=(0,1,0)$, $v_1^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Ввиду [4, с. 104] $Y_1\simeq\mathrm{C}(-1_X)\oplus Y$. Пусть $n\in\mathbb{Z}$ такое, что $\tau_{n+1}X$ и $\tau_{n+1}Y$ ω-ацикличны. Из рассмотрения последовательности (2.2) получаем следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "\sigma_X^n"] \arrow[d, "u_1^n"] & \operatorname{Im} d_X^n \arrow[r, "\mu_X^n"] \arrow[d, "\widetilde{u}_1"] & X^{n+1} \arrow[d, "u_1^{n+1}"] \\
Y_1^{n-1} \arrow[r, "d_{Y_1}^{n-1}"] \arrow[d] & Y_1^n \arrow[r, "\sigma_{Y_1}^n"] \arrow[d, "v_1^n"] & \operatorname{Im} d_{Y_1}^n \arrow[r, "\mu_{Y_1}^n"] \arrow[d, "\widetilde{v}_1"] & Y_1^{n+1} \arrow[d, "v_1^{n+1}"] \\
Z^{n-1} \arrow[r, "d_Z^{n-1}"] & Z^n \arrow[r, "\sigma_Z^n"] & \operatorname{Im} d_Z^n \arrow[r, "\mu_Z^n"] & Z^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

Так как строки этой диаграммы точны в членах X^n, Y_1^n и Z^n соответственно, то с помощью Ker-Coker-последовательности получаем, что третий слева столбец диаграммы точен в члене $\operatorname{Im} d_{Y_1}^n$;

кроме того, ясно, что $\widetilde{v}_1$ – эпиморфизм. Так как u_1^{n+1} и μ_X^n – ω-собственные мономорфизмы, то и $\widetilde{u}_1$ – также ω-собственный мономорфизм, и, таким образом, этот третий столбец представляет собой ω-собственную короткую точную последовательность. Заметим, что

$$\operatorname{Im} d_{Y_1}^n \simeq \operatorname{Im} d_{\mathrm{C}(-1_X)}^n \oplus \operatorname{Im} d_Y^n,$$

и, как легко видеть, соответствующие разложения для морфизмов $\widetilde{u}_1$ и $\widetilde{v}_1$ имеют вид $\widetilde{u}_1 = (\varphi, \widetilde{u})^T$, $\widetilde{v}_1 = (\psi, \widetilde{v})$, где $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ – морфизмы между $\operatorname{Im} d_X^n$, $\operatorname{Im} d_Y^n$, $\operatorname{Im} d_Z^n$, индуцируемые цепными отображениями u и v соответственно. Так как комплекс $\mathrm{C}(-1_X)$ гомотопен нулю, то $\operatorname{Im} d_{\mathrm{C}(-1_X)}^n \in \mathcal{P}_\omega$. Применяя аналогичное рассуждение к короткой точной последовательности в $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$

$$Y \overset{v}{\rightarrowtail} Z \overset{w}{\twoheadrightarrow} X[1]$$

(по-прежнему $Z = \mathrm{C}(u)$), получаем ω-собственную короткую точную последовательность

$$\operatorname{Im} d_Y^n \overset{\widetilde{v}}{\rightarrowtail} \operatorname{Im} d_Z^n \overset{\widetilde{w}}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Im} d_{X[1]}^n.$$

Отсюда с помощью следствия 1.6 получаем треугольник в $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ вида

$$\operatorname{Im} d_X^n \xrightarrow{\widetilde{u}} \operatorname{Im} d_Y^n \xrightarrow{\widetilde{v}} \operatorname{Im} d_Z^n \xrightarrow{\widetilde{w}} T(\operatorname{Im} d_X^n),$$

а применяя к нему функтор T^{-n}, устанавливаем точность функтора $\widetilde{F}$.

Теперь мы докажем, что $\operatorname{Ker}\widetilde{F} = \mathcal{C}$. Включение $\mathcal{C} \subset \operatorname{Ker}\widetilde{F}$ очевидно. Пусть $X \in \operatorname{Ker}\widetilde{F}$, и пусть $n \in \mathbb{Z}$ таково, что комплекс $\tau_n X$ ω-ацикличен. По предположению $\operatorname{Im} d_X^n \in \mathcal{P}_\omega$. Построим следующую коммутативную диаграмму, представляющую короткую точную последовательность $\tau_{n-1}X \rightarrowtail X \twoheadrightarrow X''$ в $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tau_{n-1}X : \ldots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\sigma_X^{n-1}} & \operatorname{Im} d_X^{n-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X^{n-1}} & & \downarrow & & \\
X \quad : \ldots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_X^n} & & \| & & \\
X'' \quad : \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} d_X^n & \xrightarrow{\mu_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \ldots .
\end{array}$$

Так как σ_X^n – ω-собственный эпиморфизм, то он расщепляется, и, следовательно, $\operatorname{Im} d_X^{n-1} \in \mathcal{P}_\omega$. Поскольку комплекс $\tau_{n-1}X$ ω-ацикличен, отсюда следует, что он гомотопен нулю. Таким образом, $X \simeq X''$ в категории $K^-(\mathcal{A})$, где $X'' \in K^b(\mathcal{P}_\omega)$, и, следовательно, $X \in \mathcal{C}$.

Ввиду предложения 2.3 $\mathcal{C}$ – насыщенная $\mathcal{T}$-подкатегория, и мы можем построить фактор-категорию $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, а также функтор $F: \mathcal{D}/\mathcal{C} \to \underline{\mathcal{A}}_\omega$ такой, что $F \circ Q = \widetilde{F}$, где $Q: \mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{C}$ – функтор локализации. По построению F – точный функтор.

Докажем, что F – эквивалентность категорий. Прежде всего, ясно, что для любого объекта $A \in \mathcal{A}$ и его ω-проективной резольвенты $X \in \mathcal{K}$ имеем $F(Q(X)) = [A]$. Далее, рассмотрим гомоморфизм

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}(Q(X), Q(Y)) \xrightarrow{F} \underline{\mathcal{A}}_\omega(F(X), F(Y)), \tag{2.3}$$

где X, $Y \in \mathcal{K}$. Предположим, что $F(s^{-1}f) = 0$, где $s^{-1}f: Q(X) \to Q(Y)$ – морфизм в $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ (при этом $s \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$). По построению функтора F имеем $F(s^{-1}f) = \widetilde{F}(s)^{-1} \cdot \widetilde{F}(f)$, и потому можно ограничиться рассмотрением морфизма вида $Q(f): Q(X) \to Q(Y)$, для которого $\widetilde{f} = 0$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ такое, что комплексы $\tau_{n+1}X$ и $\tau_n Y$ ω-ацикличны. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
X^n & \overset{\sigma_X^n}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Im} d_X^n & \overset{\mu_X^n}{\rightarrowtail} & X^{n+1} \\
f^n \downarrow & & \downarrow \widetilde{f} & & \downarrow f^{n+1} \\
Y^n & \overset{\sigma_Y^n}{\twoheadrightarrow} & \operatorname{Im} d_Y^n & \overset{\mu_Y^n}{\rightarrowtail} & Y^{n+1}.
\end{array}$$

По предположению $\widetilde{f}$ проходит через некоторый ω-проективный объект, т.е. $f = \beta\alpha: \operatorname{Im} d_X^n \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} \operatorname{Im} d_Y^n$, где $P \in \mathcal{P}_\omega$. Так как μ_X^n – ω-собственный мономорфизм, то существует морфизм $\alpha': X^{n+1} \longrightarrow P$ такой, что $\alpha'\mu_X^n = \alpha$. Дуально находим морфизм $\beta': P \longrightarrow Y^n$ такой, что $\sigma_Y^n\beta' = \beta$. Положим $h^n = \beta'\alpha': X^{n+1} \to Y^n$. Теперь стандартно, используя ω-проективность объектов X^i, а также ω-ацикличность комплекса $\tau_n Y$, строим по индукции морфизмы $h^i: X^{i+1} \to Y^i$, $i < n$, так, что $f^i = d_Y^{i-1}h^{i-1} + h^i d_X^i$ для всех $i \leqslant n$. Положим $Y' = \widetilde{\tau}_n Y$ и рассмотрим следующую короткую точную последовательность в $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$

$$\operatorname{Ker} s \rightarrowtail Y \overset{s}{\twoheadrightarrow} Y', \text{ где } s^i = \begin{cases} \mathrm{id}_{Y^i}, & \text{если } i \leqslant n \\ 0, & \text{если } i > n. \end{cases} \tag{2.4}$$

Так как $\mathrm{Ker}\, s \in \mathcal{C}$, то $s \in \mathcal{S}(\mathcal{C})$. При этом набор $\{h^i\}_{i \leqslant n}$ осуществляет гомотопию между $s \cdot f$ и 0. Следовательно, $Q(f) = 0$.

Теперь докажем, что гомоморфизм (2.3) сюръективен. Пусть $\alpha\colon F(X) \to F(Y)$ – морфизм в $\mathcal{A}$, представляющий некоторый морфизм в $\underline{\mathcal{A}}_\omega$, и пусть $n \in \mathbb{Z}$ такое, что комплексы $\tau_n X$ и $\tau_n Y$ ω-ацикличны. По построению функтора F имеется морфизм $T^{n-1}(\alpha)\colon \mathrm{Im}\, d_X^{n-1} \to \mathrm{Im}\, d_Y^{n-1}$. Рассматривая комплексы $\widetilde{\tau}_{n-1}X$ и $\widetilde{\tau}_{n-1}Y$ как ω-проективные резольвенты объектов $\mathrm{Im}\, d_X^{n-1}$ и $\mathrm{Im}\, d_Y^{n-1}$ соответственно, стандартно строим цепное отображение $f'\colon \widetilde{\tau}_{n-1}X \to \widetilde{\tau}_{n-1}Y$, продолжающее морфизм $T^{n-1}(\alpha)$. Кроме того, используя то, что $Y^n \in \mathcal{J}_\omega$ и μ_X^{n-1} – ω-собственный мономорфизм, найдем морфизм $\beta\colon X^n \to Y^n$ такой, что $\beta \cdot \mu_X^{n-1} = \mu_Y^n \cdot T^{n-1}(\alpha)$. Положим $Y' = \widetilde{\tau}_n Y$ и построим цепное отображение $f\colon X \to Y'$ такое, что $f^i = (f')^i$ для $i \leqslant n-1$, а $f^n = \beta$. Теперь если $s\colon Y \to Y'$ – морфизм из (2.4), то получаем морфизм $s^{-1}f\colon Q(X) \to Q(Y)$ в категории $\mathcal{D}/\mathcal{C}$, и непосредственно проверяется, что $F(s^{-1}f) = [\alpha]$. $\square$

Замечание. Для случая, когда $\mathcal{A} = A-\mathrm{mod}$, где A – конечномерная QF-алгебра (а ω – класс всех коротких точных последовательностей), функтор $\widetilde{F}\colon \mathcal{K} \to \underline{\mathcal{A}}_\omega$, построенный в доказательстве теоремы 2.2, был рассмотрен в [20, с. 173].

Теорема 2.4. *Пусть ω (соответственно ω') – QF-собственный класс в абелевой категории $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{A}'$). Предположим дополнительно, что категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ обладают счетными прямыми суммами. Если относительные ограниченные производные категории $D_\omega^b(\mathcal{A})$ и $D_{\omega'}^b(\mathcal{A}')$ треугольно эквивалентны, то категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ и $(\underline{\mathcal{A}'})_{\omega'}$ также треугольно эквивалентны.*

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 2.5. *Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория со счетными прямыми суммами, ω – QF-собственный класс в $\mathcal{A}$, $\mathcal{K} = K_\omega^{-,b}(\mathcal{P}_\omega)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega^{pf} \subset \mathcal{K}$. Объект $X \in \mathcal{K}$ принадлежит подкатегории $\mathcal{C}$, если и только если для любого $Y \in \mathcal{K}$ существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$ такая, что для любого k $\mathrm{Hom}_\mathcal{K}(X, Y[n_k]) = 0$.*

Доказательство. Положим

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \{X \in \mathcal{K} \mid \forall Y \in \mathcal{K}\ \exists \{n_k\}_1^\infty \subset \mathbb{Z}$$
$$\{n_k\}_1^\infty \quad \text{строго возрастает и} \quad \forall k\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y[n_k]) = 0\}.$$

Ясно, что $\mathcal{C} \subset \widetilde{\mathcal{C}}$. Теперь предположим, что $X \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{C}$. Пусть $n \in \mathbb{Z}$ такое, что комплекс $\tau_n X$ ω-ацикличен, и пусть $V^m = \mathrm{Im}\, d_X^m$. Тогда для любого $m < n$ имеем $V^m \notin \mathcal{P}_\omega$, иначе комплекс $\tau_m X$ гомотопен нулю, и, следовательно, $X \in \mathcal{C}$, что противоречит предположению. Пусть $Y \in \mathcal{K}$ – ω-проективная резольвента объекта $Q = \bigoplus_{m<n} V^m \in \mathcal{A}$. Пусть $\varphi: V^m \to Q$, $m < n$, – каноническое вложение в качестве прямого слагаемого; ясно, что в категории $\underline{\mathcal{A}}_\omega$ имеем $[\varphi] \neq 0$. Рассматривая $\widetilde{\tau}_m X$ как ω-проективную резольвенту объекта V^m, поднимем φ до цепного отображения $\widetilde{\tau}_m X \to Y[-m]$, а затем с помощью "продолжения нулем" этого отображения получаем цепное отображение $f: X \to Y[-m]$. Для функтора $\widetilde{F}: \mathcal{K} \to \underline{\mathcal{A}}_\omega$, построенного в доказательстве теоремы 2.2, имеем $\widetilde{F}(f) = [\varphi] \neq 0$, и потому $f \neq 0$ в $\mathcal{K}$. Отсюда следует, что $X \notin \widetilde{\mathcal{C}}$. □

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $\Phi: K_\omega^{-,b}(\mathcal{P}_\omega) = \mathcal{K} \to K_{\omega'}^{-,b}(\mathcal{P}_{\omega'}) = \mathcal{K}'$ – треугольная эквивалентность категорий. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\omega^{pf} \subset \mathcal{K}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{\omega'}^{pf} \subset \mathcal{K}'$. Применяя описание подкатегорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$, данное в предложении 2.5, получаем, что $\Phi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Следовательно, функтор Φ индуцирует эквивалентность фактор-категорий $\mathcal{K}/\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}'/\mathcal{C}'$, являющуюся точным функтором, и требуемое утверждение следует из теоремы 2.2. □

Если $\mathfrak{X}$ – непустой набор подгрупп конечной группы G, то относительная стабильная категория категории $kG - \mathrm{Mod}$, соответствующая собственному классу $\mathfrak{X}$-расщепляемых последовательностей, обозначается нами через $kG - \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{X}}$. В частности, для конечномерной QF-алгебры A над полем через $A - \underline{\mathrm{Mod}}$ обозначаем стабильную категорию категории $A - \mathrm{Mod}$.

Следствие 2.6. *Пусть k – коммутативное кольцо, G и G' – конечные группы, $\mathfrak{X}$ (соответственно $\mathfrak{X}'$) – непустой набор подгрупп группы G (соответственно G'), ω (соответственно ω') – собственный класс в $kG - \mathrm{Mod}$ (соответственно $kG' - \mathrm{Mod}$), состоящий из $\mathfrak{X}$-расщепляемых (сответственно $\mathfrak{X}'$-расщепляемых) коротких точных последовательностей. Если относительные производные категории $D_\omega^b(kG - \mathrm{Mod})$ и $D_{\omega'}^b(kG' - \mathrm{Mod})$ треугольно экви-*

валентны, то и относительные стабильные категории $kG - \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{X}}$ *и* $kG' - \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathfrak{X}'}$ *также треугольно эквивалентны.*

Следствие 2.7 [1]. *Пусть* A, A' – QF*-алгебры, конечномерные над полем* k. *Если ограниченные производные категории* $D^b(A - \mathrm{Mod})$ *и* $D^b(A' - \mathrm{Mod})$ *треугольно эквивалентны, то и стабильные категории* $A - \underline{\mathrm{Mod}}$ *и* $A' - \underline{\mathrm{Mod}}$ *также треугольно эквивалентны.*

Литература

1. J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence.* — J. Pure Appl. Algebra **61**, No. 1 (1989), 303–317.
2. B. Keller, D. Vossieck, *Sous les catégories dérivées.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **305**, No. 6 (1987), 225–228.
3. D. J. Benson, W. W. Wheeler, *The Green correspondence for infinitely generated modules.* — J. London Math. Soc. **63**, Pt. 1 (2001), 69–82.
4. А. И. Генералов, *Относительная гомологическая алгебра в предабелевых категориях, I. Производные категории.* — Алгебра и Анализ **4**, вып. 1 (1992), 98–119.
5. A. Neeman, *The derived category of an exact category.* — J. Algebra **135**, No. 2 (1990), 388–394.
6. А. И. Генералов, *Производные категории аддитивной категории.* — Алгебра и Анализ **4**, вып. 5 (1992), 91–103.
7. D. Quillen, *Higher algebraic* K*-theory.* — Lect. Notes Math. **341** (1973), 85–147.
8. Е. Г. Скляренко, *Относительная гомологическая алгебра в категории модулей.* — Успехи мат. наук **33**, No. 3 (1978), 85–120.
9. A. I. Generalov, *Relative homological algebra. Cohomology of categories, posets and coalgebras.* in: Handbook of Algebra vol. 1, ed. M. Hazewinkel, Elsevier Sci. Amsterdam et al. (1996), 611–638.
10. А. П. Мишина, Л. А. Скорняков, *Абелевы группы и модули.* Наука, М. (1969).
11. С. Маклейн, *Гомология.* Мир, М. (1966).
12. D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra.* — Comment. Math. Helv. **62**, No. 3 (1987), 339–389.
13. Х Басс, *Алгебраическая K-теория.* Мир, М. (1973).
14. А. И. Генералов, *Индуктивно замкнутые собственные классы над ограниченными hnp-кольцами.* — Алгебра и Логика, **25**, No. 4 (1986), 384–404.
15. J.-L. Verdier, *Catégories dérivées.* — Lect. Notes Math. **569** (1977), 262–311.
16. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры, Т. 1.* Наука, М. (1988).
17. J.-L. Verdier, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes.* — Astérisque No. 239 (1996).
18. А. И. Генералов, *Локализация предтриангулированных категорий.* — Алгебра и Анализ **11**, вып. 3 (1999) 20–52.
19. M. Linckelmann, *La catégorie stable d'une algèbre auto-injective est triangulée.* — Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. **305**, No. 10 (1987) 403–406.

20. C. M. Ringel, *Recent advances in the representation theory of finite dimensional algebras.* in: Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras. Burkhäuser Verlag. Progress in Mathematics **95** (1991), 141–192.

Generalov A. I. QF-proper classes and relative stable categories.

A relative version of Rickard's theorem is proved, namely, if ω is a quasi-Frobenius proper class of short sequences in an Abelian category $\mathcal{A}$, then ω-stable category of the category $\mathcal{A}$ is a quotient category of the relative bounded derived category $D^b_\omega(\mathcal{A})$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 сентября 2001 г.