Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

Г. А. Гаркуша

ЗАМЕТКА О ПОЧТИ РЕГУЛЯРНЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЬЦАХ

Пусть A – некоторое кольцо (ассоциативное с единицей). Обозначим через $\mathrm{Mod}{-}A$ (соответственно $A{-}\mathrm{Mod}$) категорию правых (соответственно левых) A-модулей, а через $\mathrm{mod}-A$ (соответственно $A-\mathrm{mod}$) полную подкатегорию конечно представимых правых (соответственно левых) A-модулей. Модуль $M \in \mathrm{Mod}-A$ называется *fp-плоским*, если для всякого мономорфизма $\mu : K \to L$ с конечно представимыми левыми A-модулями K и L морфизм $M \otimes \mu$ – мономорфизм. Кольцо A называется *почти регулярным*, если всякий (как левый, так и правый) A-модуль fp-плосок. Эквивалентно, всякий мономорфизм μ в $\mathrm{mod}-A$ (или в $A-\mathrm{mod}$) расщепляется [1]. Почти регулярные кольца обобщают как регулярные, так и недискретные кольца; последний класс колец возник в [2] в связи с изучением спектра Циглера кольца.

Если G – группа, через $R = AG$ обозначим групповое кольцо группы G с коэффициентами в A. По теореме Ауслэндера-Маклафлина-Виламайора (см. [3–5]) групповое кольцо $R = AG$ регулярно в том и только том случае, когда: (i) кольцо A регулярно; (ii) группа G локально конечна; (iii) порядок $|H|$ всякой конечной подгруппы H группы G обратим в A. Цель настоящей заметки – доказать аналогичный результат для почти регулярных групповых колец.

Теорема 1. *Групповое кольцо $R = AG$ почти регулярно в том и только том случае, когда:*

(i) *кольцо A почти регулярно;*

(ii) *группа G локально конечна;*

(iii) *порядок $|H|$ всякой конечной подгруппы H группы G обратим в A.*

Мы отложим доказательство теоремы, а пока нам понадобятся некоторые предварительные леммы.

Лемма 2. *Пусть $R = AG$ – групповое кольцо с конечной груп-*

пой G, и пусть $|G| = k$ – обратимый элемент кольца A. Если R-мономорфизм $\mu : M_R \to N_R$ – расщепляющийся A-мономорфизм, то μ – расщепляющийся R-мономорфизм.

Доказательство. По предположению существует A-гомоморфизм $\phi : N_A \to M_A$ такой, что $\phi\mu = 1$. Определим морфизм $\psi : N_R \to M_R$ по правилу:

$$\psi(n) = k^{-1} \sum_{g \in G} \phi(ng)g^{-1}.$$

Тогда, очевидно, что ψ – R-гомоморфизм. Кроме того, прямая проверка показывает, что $\psi\mu = 1$, т. е. μ расщепляется.

Следствие 3. *Пусть $R = AG$, группа G конечна и $|G|$ обратим в A. Тогда кольцо R почти регулярно, если кольцо A почти регулярно.*

Доказательство. Так как группа G конечна, каждый конечно представимый R-модуль является также конечно представимым A-модулем. Поэтому, если μ – мономорфизм в $\mathrm{mod} - R$ (или в $R - \mathrm{mod}$), то μ – мономорфизм в $\mathrm{mod} - A$ (или в $A - \mathrm{mod}$). Теперь остается применить предыдущую лемму.

Лемма 4. *Предположим, что $R = AG$ – групповое кольцо с локально конечной группой G. Если M – конечно представимый правый R-модуль, то найдется такая конечная подгруппа H группы G, а также конечно представимый правый AH-модуль M', что $M \approx M' \otimes_{AH} R$.*

Доказательство. Для $M \in \mathrm{mod} - R$ существует короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0.$$

Пусть X – конечное множество образующих для модуля K_R. Так как G локально конечна, найдется конечная подгруппа H группы G такая, что $X(AH) \subseteq AH^n \subseteq R^n$. Мы получим следующую точную последовательность AH-модулей:

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\bar{i}} AH^n \xrightarrow{\bar{p}} M' \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где $K' = X(AH)$, $M' = Y(AH)$, Y – конечное множество образующих для модуля M_R. Умножая тензорно последовательность (1) на ${}_{AH}R$, получим следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K'\bigotimes\limits_{AH} R & \xrightarrow{\bar{i}\otimes 1} & AH^n\bigotimes\limits_{AH} R & \xrightarrow{\bar{p}\otimes 1} & M'\bigotimes\limits_{AH} R & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow[i]{} & R^n & \xrightarrow[p]{} & M & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

в которой β – изоморфизм, $\alpha(x\otimes r)=xr$. Ясно, что α – изоморфизм, а значит, γ – изоморфизм.

Напомним, что кольцо A является *FP-инъективным справа*, если для всякого $M\in \mathrm{mod}-A$ имеем: $\mathrm{Ext}^1_A(M,A)=0$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что кольцо R почти регулярно, и пусть $\mu : M\to N$ – некоторый мономорфизм в $\mathrm{mod}-A$. Так как M и N – конечно представимые A-модули, модули $M\otimes_A R$ и $N\otimes_A R$ – конечно представимые R-модули. Поскольку R – почти регулярное кольцо, R-мономорфизм $\bar{\mu}=\mu\otimes R$ расщепляется, а значит, и μ расщепляется. Симметричным образом, всякий мономорфизм μ в $A-\mathrm{mod}$ расщепляется, откуда кольцо A почти регулярно.

Так как всякое почти регулярное кольцо FP-инъективно [1], группа G локально конечна по [6, 3.2].

Наконец, пусть g – некоторый элемент G порядка n. Имеется следующая короткая точная последовательность:

$$0\longrightarrow (1-g)^l\longrightarrow R\longrightarrow R(1-g)\longrightarrow 0,$$

где $(1-g)^l=\{r\in R\mid r(1-g)=0\}$. Поскольку $(1-g)^l=R(1+g+\ldots+g^{n-1})$ (см. [7]), получаем, что левый идеал $R(1-g)$ кольца R конечно представим, а так как R почти регулярно, $R(1-g)$ порождается некоторым идемпотентом e. Тогда $e=r(1-g)$ для некоторого элемента r из R. Имеем:

$$(1-g)(1-e)=(1-g)(1-r(1-g))=0.$$

Тогда найдется такой элемент r' из R, что

$$1-r(1-g)=(1+g+\ldots+g^{n-1})r'. \qquad (2)$$

Пусть $\pi : R \to A$ – канонический гомоморфизм такой, что $\pi(r) = \sum_{g \in G} r_g$. Применяя π к (2), получим, что $1 = n\pi(r')$. Таким образом, n – обратимый элемент кольца A.

Предположим теперь обратное. Пусть $\mu : M \to N$ – мономорфизм в $\mathrm{mod}-R$. Используя лемму 4, мы можем выбрать конечную подгруппу H группы G такую, что $M \approx M' \otimes_{AH} R$, $N \approx N' \otimes_{AH} R$, а также $\mu = \bar{\mu} \otimes R$, для некоторых конечно представимых правых AH-модулей M' и N' и мономорфизма $\bar{\mu} : M' \to N'$ в $\mathrm{mod} - AH$. Так как кольцо AH почти регулярно по следствию 3, то морфизм $\bar{\mu}$ расщепляется. Отсюда $\mu = \bar{\mu} \otimes R$ расщепляется. По симметрии, всякий мономорфизм μ в $R - \mathrm{mod}$ расщепляется. Итак, кольцо R почти регулярно, что и требовалось доказать.

В завершение, напомним, что кольцо A *недискретно*, если оно простое почти регулярное кольцо (см. [2, 1]). Прест, Ротмалер и Циглер показали, что имея произвольное нерегулярное кольцо конечного типа представлений, можно построить нерегулярное недискретное кольцо, как прямой предел некоторых матричных колец [2, §2.2]. Если A – недискретное кольцо, а G – неединичная группа, то групповое кольцо $R = AG$ не является недискретным, так как (двусторонний) фундаментальный идеал ωG, порожденный элементами $\{1 - g\}_{g \in G}$, ненулевой. Таким образом, если A – нерегулярное недискретное кольцо, G – неединичная группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1, то групповое кольцо $R = AG$ является почти регулярым, и не является ни регулярным, ни недискретным.

Литература

1. Г. А. Гаркуша, А. И. Генералов, *Двойственность для категорий конечно представимых модулей.* Алгебра и Анализ **11** (1999), вып. 6, 139–152.
2. M. Prest, Ph. Rothmaler, and M. Ziegler, *Absolutely pure and flat modules and "indiscrete" rings.* J. Algebra **174** (1995), 349–372.
3. M. Auslander, *On regular group rings.* Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 658–664.
4. J. E. McLaughlin, *A note on regular group rings.* Mich. Math. J. **9** (1958), 127–128.
5. O. E. Villamayor, *On the semi-simplicity of group algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 621–627.
6. Г. А. Гаркуша, *FP-инъективные и слабо квазифробениусовы кольца.* Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 110–129.
7. I. G. Connell, *On the group ring.* Canad. J. Math. **15** (1963), 650–685.

Garkusha G. A. A note on almost regular group rings.

It is proved that the group ring $R = AG$ is an almost regular ring if and only if: (i) the ring A is almost regular, (ii) the group G is locally finite, and (iii) an order of any finite subgroup H of the group G is a unit in A.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 16 апреля 2001 г.