Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

С. В. Востоков, Р. Перлис

НОРМЕННЫЕ РЯДЫ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ЛЮБИНА–ТЕЙТА

Введение

Хорошо известное в K-теории соотношение Стейнберга $\{\alpha, 1-\alpha\} = 0$ означает для символа Гильберта, заданного на локальном поле, что α является нормой в расширении, полученном из основного поля присоединением соответствующего корня из $1-\alpha$. Если мы перейдем к символу Гильберта на формальных группах, то точным аналогом соотношения Стейнберга должно быть равенство $\left(\alpha, -\alpha\right)_F = 0$, выполненное для любого элемента α из формального модуля.

В этом случае α тоже будет нормой в расширении, полученном из основного поля присоединением корня уравнения $f(x) = -\alpha$, где f – соответствующая изогения формальной группы F. К сожалению, соотношение Стейнберга в таком виде верно не для всех формальных групп (см. [1]). Поэтому, естественно рассмотреть такие ряды $\mathcal{E}(x)$, для которых $\left(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)\right)_F = 0$ выполняется при всех α. Такие ряды будем называть норменными рядами, и в настоящей работе они исследуются для формальных групп Любина–Тейта (см. п. 8). Это исследование производится на основе явных формул для спаривания Гильберта, которые получены при нечетном простом p в начале настоящей работы (см. п. 7). Вообще говоря, явные формулы для спаривания Гильберта были получены в работах [2, 3], но при этом использовались разложения элементов из мультипликативной группы поля в ряды, начинающиеся с коэффициента из системы Тейхмюллера, а разложения элементов из формального модуля имели нулевой свободный член. В этой статье, модифицируя метод работ [2, 3], мы избавляется от такого ограничения и на основе этого получаем условия для норменных рядов. В заключение отметим, что в работе [4] норменные ряды были определены для мульти-

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 0001-00140.

пликативного аргумента, т.е. рассматривались соотношения вида $\big(r(\alpha),\alpha\big)_F=0$.

Обозначения

k – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$);
$q=p^f$ – число элементов поля классов вычетов поля k;
$\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k;
π – простой элемент в k;
v – нормирование на поле k;
$v_q(m)$ – q-порядок числа m, т.е. если $m=q^r m_0$, $q\nmid m_0$, то $v_q(m)=r$;
$F(x,y)$ – формальная группа Любина–Тейта над кольцом $\mathfrak{o}$;
$\lambda_F(x)$ – логарифм F, т.о. $F=\lambda_F^{-1}\big(\lambda_F(x)+\lambda_F(y)\big)$;
$\big[\pi\big]_F(x)$ – изогения формальной группы F;
$\mu_n=\operatorname{Ker}\big[\pi^n\big]_F$ – ядро изогении $[\pi^n]$ в алгебраическом замыкании k^{alg};
K – конечное расширение поля k, $\mu_n\subset K$;
Π – простой элемент поля K;
$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца целых поля K;
$\mathfrak{R}$ – мультипликативно замкнутая система представителей Тейхмюллера в K;
$e=e(K/k)$ – индекс ветвления;
$F(\mathfrak{M})$ – формальный $\mathfrak{o}$-модуль, построенный на идеале $\mathfrak{M}$:
$\alpha,\,\beta\in F(\mathfrak{M})\to\alpha+_F\beta:=F(\alpha,\beta)$
$a\in\mathfrak{o},\ \alpha\in F(\mathfrak{M})\to a\alpha:=\big[a\big]_F(\alpha)$;
T_0, T – подполя инерции в $K/\mathbb{Q}_p$ и K/k, соответственно;
W_0, W – кольца целых полей T_0 и T, соответственно;
$\mathrm{tr}:=\mathrm{tr}_{T/k}$ – оператор следа;
Δ_0, Δ – операторы Фробениуса на W_0 и W, соответственно, $\Delta=\Delta_0^f$;
$\blacktriangle$ (соотв. $\blacktriangle_0$) – операторы Фробениуса на кольце $W((x))$ (соотв. $W_0((x))$);
$\blacktriangle f(x)=f(x)^{\blacktriangle}=\big(\Sigma a_i x^i\big)^{\blacktriangle}=\Sigma a_i^{\Delta}\,x^{qi}$, $a_i\in W$;
$\blacktriangle_0 g(x)=g(x)^{\blacktriangle_0}=\big(\Sigma b_i\,x^i\big)^{\blacktriangle_0}=\Sigma b_i^{\Delta_0}\,x^{pi}$, $b_i\in W_0$, $\mathrm{d}:=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$;
z – образующая формального $\mathfrak{o}$-модуля $\mu_n=\operatorname{Ker}\big[\pi^n\big]_F$, т.е. $\big[\pi^n\big]_F(z)=0$, $\big[\pi^{n-1}\big]_F(z)\neq0$.

Для элемента $\alpha \in K^*$ (соотв. из $F(\mathfrak{M})$) будем обозначать через $\underline{\alpha}(x)$ такой ряд из $W_0((x))^*$ (соотв. из $(\pi, x)W[\![x]\!]$), что

$$\underline{\alpha}(\Pi) = \alpha;$$

Положим

$$s_m(x) = \left[\pi^m\right]_F(\underline{z}(x)), \quad s(x) := s_n(x) \quad u(x) = s/s_{n-1}. \tag{1}$$

Имеют место следующие сравнения:

$$s_m \equiv s_{m-1}^{\blacktriangle} \bmod \pi^m, \quad 1/s_m \equiv 1/s_{m-1}^{\blacktriangle} \bmod \pi^m \tag{2}$$

$$\mathrm{d}s_m \equiv \mathrm{d}\, 1/s_m \equiv 0 \bmod \pi^m, \quad m \geqslant 0 \tag{3}$$

(см. [2], §1, п. 4^0).

На множестве $K^* \times F(\mathfrak{M})$ определено спаривание Гильберта следующим образом:

$$\big(\,\cdot\,,\cdot\,\big)_F : K^* \times F(\mathfrak{M}) \to \mu_n = \operatorname{Ker}\left[\pi^n\right]_F \quad \big(\alpha,\beta\big)_F = \widetilde{\beta}^{\Psi_K(\alpha)} -_F \widetilde{\beta}, \tag{4}$$

где $\left[\pi^n\right]_F(\widetilde{\beta}) = \beta$; Ψ_K – отображение взаимности: $K^* \to \operatorname{Gal}(K^{ab}/K)$.

Основным свойством спаривания Гильберта является норменное свойство:

$$\begin{gathered}\big(\alpha,\beta\big)_F = 0 \Longleftrightarrow \alpha \ \text{ – норма в расширении } \ K(\widetilde{\beta})/K, \\ \text{где } \ \left[\pi^n\right]_F(\widetilde{\beta}) = \beta\end{gathered} \tag{5}$$

(см., например, [4, 3.3]).

1. Спаривание на рядах

Пусть $\mathcal{H}_\mathfrak{m} = W_0((x))^*$ и $\mathcal{H}_F$ – формальный $\mathfrak{o}$-модуль, построенный на множестве рядов $(\pi, x)W[\![x]\!]$:

$$\alpha, \beta \in \mathcal{H}_F \Longrightarrow \alpha +_F \beta = F(\alpha, \beta);$$

$$a \in \mathfrak{o}, \quad \alpha \in \mathcal{H}_F \Longrightarrow a\alpha = \left[a\right]_F(\alpha).$$

На группе $\mathcal{H}_\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{o}$-модуле $\mathcal{H}_F$ определим функции:

$$\ell_\mathfrak{m}(\alpha(x)) = \frac{1}{q}\log \alpha^q/\alpha^{\blacktriangle}, \quad \alpha \in \mathcal{H}_\mathfrak{m},$$

$$\ell_F(\beta(x)) = \left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)\lambda_F(\beta), \quad \beta \in \mathcal{H}_F.$$

Лемма 1.1. 1) $\frac{q}{p}\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\in W_0[\![x]\!]$, $\ell_F(\beta)\in(\pi,x)W[\![x]\!]$.

2) *Функция* ℓ_F *задает изоморфизм* $\mathfrak{o}$*-модулей*

$$\ell_F:\mathcal{H}_F\to(\pi,x)W[\![x]\!].$$

Доказательство. 1. Запишем ряд $\alpha(x)\in W_0((x))^*$ в виде $\alpha(x)=x^m a\cdot\varepsilon(x)$, где $a\in W_0^*$, $\varepsilon(x)\equiv 1 \bmod x$. При этом a можно представить в виде $a=\theta\cdot a_1$, где $\theta^q=\theta$, $a_1\equiv 1 \bmod p$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{q}{p}\ell_{\mathfrak{m}}(x)&=\frac{1}{p}(q-\blacktriangle)\log(a_1\varepsilon)=\frac{1}{p}\big(p^f-\blacktriangle_0^f\big)\log(a_1\varepsilon)=\\&=\big(p^{f-1}+p^{f-2}\blacktriangle_0+\ldots+\blacktriangle_0^{f-1}\big)\left(1-\frac{\blacktriangle_0}{p}\right)\log(a_1\varepsilon)=\\&=\big(p^{f-1}+p^{f-2}\blacktriangle_0+\ldots+\blacktriangle_0^{f-1}\big)\ell(\alpha),\end{aligned}$$

где $\ell(\alpha)=\frac{1}{p}\log\alpha^p/\alpha^{\blacktriangle_0}\in W_0[\![x]\!]$ (см. [5, §1, лемма 1]).

2. То, что $\ell_F(\beta)$ имеет целые коэффициенты напрямую было доказано в [3, предл. 1].

Наконец, последнее утверждение леммы следует из того, что функция Артина–Хассе

$$E_F(\beta)=\lambda_F^{-1}\circ\left(1-\frac{\blacktriangle}{\pi}\right)^{-1}\circ\beta$$

является обратной к функции ℓ_F, определена на идеале $(\pi,x)W[\![x]\!]$ и имеет целые коэффициенты (см. [2, §2, п. 2]). $\square$

В дальнейшем мы будем часто использовать следующие, легко проверяемые равенства:

$$\mathrm{d}h(x)^{\blacktriangle}=qx^{-1}\big(x\mathrm{d}h(x)\big)^{\blacktriangle},\tag{6}$$

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}x^{-1}h(x)^{\blacktriangle}=\operatorname{tr}\operatorname{res}x^{-1}h(x),\tag{7}$$

выполненные для любого ряда Лорана $h(x)\in W((x))$.

Определим спаривание на рядах

$$\big\{\cdot,\cdot\big\}_F:\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}\times\mathcal{H}_F\to\mathfrak{o}/\pi^n,$$

$$\big\{\alpha(x),\beta(x)\big\}_F\equiv\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\Phi_{\alpha,\beta}(x)\cdot V(x)\bmod\pi^n,$$

где

$$\Phi_{\alpha,\beta}=\ell_F(\beta)\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta),\tag{8}$$

$$V = 1/s + \frac{c}{\pi - 1}, \tag{9}$$

c – определен изогенией:

$$[\pi]_F(x) = \pi x + \pi c x^2 + \dots .$$

Замечание 1. Из леммы 1.1, 1) и равенства (6) следует, что ряд $\Phi_{\alpha,\beta} \in W[\![x]\!]$ и значит, спаривание $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$ корректно определены.

Замечание 2. Так как ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ имеет целые коэффициенты, то мы можем ряд V заменять на любой ряд, сравнимый с ним по $\operatorname{mod} \pi^n$. Учитывая сравнение (2), мы часто будем использовать ряд V в виде:

$$V = 1/s_{n-1}^{\blacktriangle} + \frac{c}{\pi - 1}. \tag{10}$$

2. Символьные ряды

Определение 1. *Ряд $\mathcal{E}_n(x) = x + \ldots \in \mathfrak{o}[\![x]\!]$ назовем символьным степени n для F, если*

$$\{\alpha(x), \mathcal{E}_n(\alpha(x))\}_F = 0$$

для любого $\alpha(x) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \cap x\,W_0[\![x]\!]$.

Замечание 3. Терминология идет от работы [3].

В работе [1] было доказано, что для любого ряда $\varphi(x) \in \mathfrak{o}[\![x]\!]$ ряд $\lambda_G = \lambda_F \circ \varphi$ является логарифмом некоторой формальной группы Любина–Тейта G (см. [1, следствие из предложения 1]).

Предложение 2.1. *Пусть для ряда $\mathcal{E}_n(x)$ ряд*

$$\left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)(\lambda_F \circ \mathcal{E}_n) = \sum_{m \geqslant 1} d_m x^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geqslant \min\bigl(n, v_q(m)\bigr) \tag{$*$}$$

при всех $m \geqslant 1$. Тогда ряд $\mathcal{E}_n(x)$ является символьным степени n для F, т.е.

$$\{\alpha(x), \mathcal{E}_n(\alpha(x))\}_F = 0$$

для всех $\alpha(x) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \cap x\,W_0[\![x]\!]$.

Замечание 4. Пусть G_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$ – формальные группы Любина–Тейта, построенные по изогениям

$$[\pi]_0 = \pi x + x^q, \quad [\pi]_\rho = \pi x + \pi x^{p^\rho} + x^q, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant f-1,$$

и пусть λ_ρ – логарифмы формальных групп G_ρ. Тогда ряды $\mathcal{E}_\rho = \lambda_F^{-1} \circ \lambda_\rho$ являются символьными для F, более того коэффициенты d_m удовлетворяют более сильному условию

$$v(d_m) \geqslant v_q(m) \tag{$**$}$$

при всех $m \geqslant 1$ (см. [3, п. 36^0]).

Лемма 2.2. *Для любого* $\alpha \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ *имеем*

$$\alpha^{mq} - \alpha^{m\blacktriangle} \equiv mq\,\alpha^{m\blacktriangle}\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) \bmod (mp)^2,$$

где $\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) = 1/q \log \alpha^q/\alpha^{\blacktriangle}$.

Доказательство. Ясно, что $mq\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) = \log \alpha^{mq}/\alpha^{m\blacktriangle}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha^{mq} - \alpha^{m\blacktriangle} &= \alpha^{m\blacktriangle}\big(\exp\log\alpha^{mq}/\alpha^{m\blacktriangle} - 1\big) = \\ &= \alpha^{m\blacktriangle}\big(\exp\big(mq\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\big) - 1\big) = \\ &= \alpha^{m\blacktriangle} mq\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) + \alpha^{m\blacktriangle}\sum_{i\geqslant 2}\frac{(mp)^i}{i!}\left(\frac{q}{p}\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\right)^i. \end{aligned}$$

При $p \neq 2$ и $i \geqslant 2$ число $(mp)^i/i!$ делится на $(mp)^2$, а ряд $q/p\,\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)$ имеет целые коэффициенты (см. лемма 1.1, 1)). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\varphi(x)$ *– такой ряд, что* $\frac{q}{p}\varphi(x) \in W((x))$ *и* $\mathrm{d}\varphi \in W((x))$. *Тогда для любого* $t\colon 1 \leqslant t \leqslant n$ *выполнено сравнение*

$$\operatorname{res}_x \mathrm{d}\varphi \cdot 1/s_t \equiv 0 \bmod \pi^t.$$

В частности,

$$\operatorname{res}_x \mathrm{d}\varphi \cdot 1/s = \operatorname{res} \mathrm{d}\varphi \cdot V \equiv 0 \bmod \pi^n,$$

где $V = 1/s + c/(\pi - 1)$.

Доказательство. Из условия леммы и сравнения $1/s_t \equiv 1/s_{t-1}^{\blacktriangle} \bmod \pi^t$ (см. (2)) следует

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_x \mathrm{d}\varphi \cdot 1/s_t &\equiv \operatorname{res}_x \mathrm{d}\varphi \cdot 1/s_{t-1}^{\blacktriangle} = -\operatorname{res}_x \varphi \cdot \mathrm{d}\big(1/s_{t-1}^{\blacktriangle}\big) = \\ &= -\operatorname{res}_x x^{-1}\left(\frac{q}{p}\varphi\right)\big(px\mathrm{d}\,1/s_{t-1}\big)^{\blacktriangle} \equiv 0 \mod \pi^t. \end{aligned}$$

(Мы использовали (6) и сравнение (3).)

Лемма 2.4. *Пусть* $v_q(m)=r$, $0\leqslant r\leqslant n$. *Тогда*

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\left(\mathrm{d}\,\frac{\alpha^m}{m}\right)\cdot V\equiv 0 \bmod \pi^{n-r},$$

где $\alpha(x)\in\mathfrak{o}((x))$, $V=1/s+c/(\pi-1)$.

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить сравнение

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\left(\mathrm{d}\,\frac{\alpha^m}{m}\right)\Big/ s\equiv 0 \bmod \pi^{n-r}.$$

Индукцией по r проверим, что для $r\leqslant t\leqslant n$:

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\left(\mathrm{d}\,\frac{\alpha^m}{m}\right)\Big/ s_t\equiv 0 \bmod \pi^{t-r}.$$

Если $r=0$, то $q\nmid m$ и мы находимся в ситуации леммы 2.3.

Если $r\geqslant 1$, то согласно лемме 2.2, ряд $q/\pi\cdot\frac{\alpha^m-\alpha^{\blacktriangle\cdot m/q}}{m}$ имеет целые коэффициенты и удовлетворяет лемме 2.3, из которой следует, что

$$\operatorname{res}_x \mathrm{d}\,\frac{\alpha^m-(\alpha^{m/q})^{\blacktriangle}}{m}\cdot 1/s_t\equiv 0 \bmod \pi^t. \tag{11}$$

Поэтому, используя сравнение (11) и равенство (6), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_x\left(\mathrm{d}\,\frac{\alpha^m}{m}\right)\Big/ s_t &\equiv \operatorname{res}_x\left(\frac{1}{q}\,\mathrm{d}\,\frac{(\alpha^{m/q})^{\blacktriangle}}{m/q}\right)\cdot 1/s_{t-1}^{\blacktriangle}=\\ &=\operatorname{res}_x x^{-1}\left(\left(x\mathrm{d}\,\frac{\alpha^{m/q}}{m/q}\right)\cdot 1\Big/ s_{t-1}\right)^{\blacktriangle} \bmod \pi^t.\end{aligned}$$

Отсюда, используя равенство (7) и индукционное предположение, которое применимо, т.к. по условию $q^{r-1}\mid m/q$ и $q^r\nmid m/q$, получаем

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x x^{-1}\left(\left(x\mathrm{d}\,\frac{\alpha^{m/q}}{m/q}\right)\cdot 1\Big/ s_{t-1}\right)^{\blacktriangle}=$$

$$=\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\mathrm{d}\,\frac{x^{m/q}}{m/q}\right)\Big/ s_{t-1}\equiv 0 \bmod \pi^{(t-1)-(r-1)}.$$

Значит,

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\left(\mathrm{d}\,\frac{\alpha^m}{m}\right)\Big/ s_t \equiv 0 \bmod \pi^{t-r}.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь предложение 2.1. Пусть $\alpha(x)\in\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$, $\deg\alpha\geqslant 1$, тогда по определению спаривания $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$ имеем

$$\Phi\colon=\Phi_{\alpha,\mathcal{E}(\alpha)}=\ell_F(\mathcal{E}(\alpha))\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\mathcal{E}(\alpha))=$$

$$=\ell_G(\alpha)\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_G(\alpha).$$

Из определения функции ℓ_G (см. п. 1) следует:

$$\Phi=\sum_{m\geqslant 1}c_m\alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha-\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m}{\pi}\alpha^{m\blacktriangle}\cdot\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m}{\pi}\mathrm{d}\alpha^{m\blacktriangle}=$$
$$=\sum_{m\geqslant 1}c'_m\alpha^{m-1}\mathrm{d}\alpha+\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m}{\pi}\Big(\big(\alpha^{mq}-\alpha^{m\blacktriangle}\big)\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha^{m\blacktriangle}\Big).$$

Обозначим

$$f=\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m}{\pi}f_m,\quad f_m=\big(\alpha^{mq}-\alpha^{m\blacktriangle}\big)\alpha^{-1}\mathrm{d}\alpha-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha^{m\blacktriangle}.$$

Тогда из равенства (6) получаем

$$f=\mathrm{d}g,\quad\text{где}\quad g=\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m}{\pi}g_m\quad\text{и}$$

$$g_m=\frac{\alpha^{mq}-\alpha^{m\blacktriangle}}{mq}-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\alpha^{m\blacktriangle}.$$

Значит,

$$\Phi=\sum_{m\geqslant 1}d_m\mathrm{d}\frac{\alpha^m}{m}+\mathrm{d}g.$$

Осталось проверить, что

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x d_m\mathrm{d}\frac{\alpha^m}{m}\cdot V\equiv 0\bmod\pi^n, \tag{12}$$

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x \mathrm{d}g\cdot V\equiv 0\bmod\pi^n, \tag{13}$$

где $V = 1/s + c/(\pi - 1)$ (см. (9)).

Пусть $m = q^r m_0$, $q \nmid m_0$. Тогда по условию $d_m \equiv 0 \bmod \pi^r$. Значит, если $r \geqslant n$, то первое сравнение следует из того, что ряды $\mathrm{d}(\alpha^m/m)$ и V имеют целые коэффициенты. Если же $0 \leqslant r < n$, то сравнение (12) вытекает из леммы 2.4.

Проверим второе сравнение (13). Ряд Φ и ряд $\sum_{m\geqslant 1} d_m \mathrm{d}\frac{\alpha^m}{m}$ имеют целые коэффициенты, поэтому ряд $\mathrm{d}g$ имеет целые коэффициенты. Далее, согласно лемме 2.2 ряд $\frac{q}{p}g_m$ делится на mp, и кроме того, $mc_m \in \mathfrak{o}$, значит, ряд $q/p(c_m/\pi\, q_m) \in W[\![x]\!]$, и поэтому ряд $q/pg \in W[\![x]\!]$. Осталось применить лемму 2.3, чтобы получить сравнение (13). Предложение доказано.

3. Основное свойство ряда $u(x)$

Пусть $u = s/s_{n-1}$ (см. (1)). Непосредственно из определения рядов $u(x)$ и $s(x)$ следует, что

$$\begin{aligned} u(x) =&\pi + \pi c s_{n-1} + \ldots + s_{n-1}^{q-1} + \ldots = \\ =&\pi(1 + c s_{n-1}) + s_{n-1}^2 f(s_{n-1}) \end{aligned} \tag{14}$$

при некотором ряде $f \in \mathfrak{o}[\![x]\!]$.

Предложение 3.1. *Если ряд $g(x) \in W[\![x]\!]$ обращается в нуль в точке $x = \Pi$, то найдется ряд $\psi(x) \in W[\![x]\!]$ такой, что*

$$g(x) = u(x) \cdot \psi(x).$$

Доказательство см. [5, лемма 6,§2].

4. Независимость спаривания

Проверим следующее утверждение, которое будем называть “независимостью спаривания”.

Предложение 4.1. *Пусть $\beta(x) = u(x)\psi(x)$, где $\psi(x)$ – произвольный ряд из $W[\![x]\!]$. Тогда для любого $\alpha(x) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ имеем:*

$$\{\alpha, \beta\}_F = 0.$$

Для доказательства нам потребуются следующие леммы.

Лемма 4.2. *Пусть $q \geqslant 3$ и $V = 1/s_{n-1}^{\blacktriangle} + c/(\pi - 1)$ (см. (10)).*

Пусть $\lambda_F(x) = \sum\limits_{m \geqslant 1} c_m x^m$ – логарифм формальной группы F. Тогда для любого $m \geqslant 1$ выполнено сравнение

$$\frac{c_m}{\pi} u^{m\blacktriangle}(1 - \pi\blacktriangle)V \equiv 0 \mod(\deg 1, \pi^n).$$

Доказательство. Проверим сперва, что

$$\frac{c_m}{\pi} u^{m\blacktriangle} V \equiv c_m \pi^{m-1}/s_{n-1}^{\blacktriangle} + c_m \cdot c \cdot \pi^{m-1}\left(m + \frac{1}{\pi - 1}\right) \mod \deg 1. \quad (15)$$

Из (14) следует, что

$$u^{m\blacktriangle} \equiv \pi^m + \pi^m\, mc\, s_{n-1}^{\blacktriangle} \mod s_{n-1}^{2\blacktriangle}\mathfrak{o}[\![x]\!] \quad (16)$$

и значит

$$\begin{aligned}\frac{c_m}{\pi}\, u^{m\blacktriangle} V &\equiv c_m \pi^{m-1}/s_{n-1}^{\blacktriangle} + \pi^{m-1} m c_m c + \pi^{m-1} c_m c \frac{1}{\pi - 1} = \\ &= c_m \pi^{m-1}/s_{n-1}^{\blacktriangle} + c_m c \pi^{m-1}\left(m + \frac{1}{\pi - 1}\right) \mod \deg 1,\end{aligned}$$

что дает (15).

Проверим далее, что

$$\begin{aligned}c_m\, u^{m\blacktriangle} V^{\blacktriangle} \equiv{}& c_m \pi^{m-1}/s_{n-1}^{\blacktriangle} + \\ &+ c_m\, c\, \pi^{m-1}\left(m - 1 + \frac{\pi}{\pi - 1}\right) \mod(\pi^n, \deg 1).\end{aligned} \quad (17)$$

Действительно,

$$c_m\, u^{m\blacktriangle} \frac{c}{\pi - 1} \equiv c_m c \pi^m \frac{1}{\pi - 1} \mod \deg 1. \quad (18)$$

Далее, используя равенство $u = s/s_{n-1}$ и сравнение (16), получаем

$$\begin{aligned}c_m\, u^{m\blacktriangle}/\left(s_{n-1}^{\blacktriangle}\right)^{\blacktriangle} &= c_m\, u^{m\blacktriangle}/s^{\blacktriangle} \cdot \left(s/s_{n-1}^{\blacktriangle}\right)^{\blacktriangle} = \\ &= c_m\, u^{\blacktriangle(m-1)}/s_{n-1}^{\blacktriangle} \cdot \left(s/s_{n-1}^{\blacktriangle}\right)^{\blacktriangle} \equiv \\ &\equiv \left(c_m\, \pi^{m-1}/s_{n-1}^{\blacktriangle} + c_m \pi^{m-1} mc\right)\left(s/s_{n-1}^{\blacktriangle}\right)^{\blacktriangle} \mod \deg 1.\end{aligned}$$

Известно, что $\pi^{m-1}c_m \in \mathfrak{o}$ (см. [2, §1, 1^0]), значит, можно применить сравнение $s^\blacktriangle \equiv (s_{n-1}^\blacktriangle)^\blacktriangle \bmod \pi^n$ (см. (2)), чтобы получить

$$c_m\, u^{m\blacktriangle}\big/\big(s_{n-1}^\blacktriangle\big)^\blacktriangle \equiv c_m\, \pi^{m-1}\big/s_{n-1}^\blacktriangle + c_m\pi^{m-1}mc \bmod (\pi^n, \deg 1). \quad (19)$$

Из сравнений (18), (19) следует (17). Наконец, вычитая из (15) сравнение (17) получаем сравнение леммы.

Следствие. *Если* $h(x)$, $\psi(x) \in W[\![x]\!]$, *то при* $q \geqslant 3$ *имеем*

$$h \cdot \frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(u\psi)(1-\pi\blacktriangle)V \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 1).$$

Лемма 4.3. *Пусть* $\alpha(x) \in \mathcal{H}_\mathfrak{m}$ *и* $\psi(x) \in W[\![x]\!]$. *Тогда*

$$\ell_\mathfrak{m}(\alpha)\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(u\psi)\mathrm{d}V \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 1). \quad (20)$$

Доказательство. Из определения ряда $V = 1/s_{n-1}^\blacktriangle + \frac{c}{\pi-1}$ и равенства (6) следует:

$$\mathrm{d}V = qx^{-1}\big(s\mathrm{d}\, 1/s_{n-1}\big)^\blacktriangle.$$

Поэтому левую часть сравнения (20) можно записать в виде

$$\ell_\mathfrak{m}(\alpha)\frac{\blacktriangle}{\pi}\,\lambda_F(u\psi)\mathrm{d}V = \left(\frac{q}{\pi}\ell_\mathfrak{m}(\alpha)\right)x^{-1}\big(x\lambda_F(u\psi)\,\mathrm{d}\,1/s_{n-1}\big)^\blacktriangle. \quad (21)$$

Первый обратимый в кольце $\mathfrak{o}$ коэффициент ряда $u(x)$ начинается со степени x^e (см. (1)). Значит, ряд $\lambda_F(u\psi)$ можно записать в виде:

$$\lambda_F(u\psi) = \left(\pi a + a_0x^e + a_1\frac{x^{qe}}{\pi} + a_2\frac{x^{2qe}}{\pi^2} + \ldots\right),$$

где a, $a_i \in W[\![x]\!]$.

Далее, из определения ряда s_{n-1} и сравнения $\mathrm{d}s_{n-1} \equiv 0 \bmod \pi^{n-1}$ (см. (1), (2)) следует:

$$\mathrm{d}\,1/s_{n-1} = -\frac{1}{s_{n-1}^2}\,\mathrm{d}\,s_{n-1} =$$

$$= \pi^{n-1}\Big(b_0x^{-\frac{2e}{q-1}} + \pi b_1\,x^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{e}{q}} + \pi^2 b_2\,x^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{2e}{q}} + \ldots\Big),$$

где $b_i \in W[\![x]\!]$. Значит,

$$x\lambda_F(u\psi)\,\mathrm{d}\,1/s_{n-1} =$$

$$= \pi^{n-1}x\left(\pi a + a_1 x^e + a_1\,\frac{x^{ae}}{\pi} + \ldots\right)\left(b_0\,x^{-\frac{2e}{q-1}} + \pi b_1\,x^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{2e}{q}} + \ldots\right).$$

Ясно, что при $q \geqslant 3$, $m \geqslant 1$ выполнены неравенства

$$e \geqslant \frac{2e}{q-1}, \quad mqe \geqslant \frac{2e}{q-1} + \frac{(m+1)e}{q},$$

поэтому

$$x\lambda_F(u\psi)\mathrm{d}\,1/s_{n-1} \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 1).$$

Сравнение леммы следует теперь из равенства (21) и того, что ряд $q/\pi\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) \in W[\![x]\!]$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 4.1. По определению спаривания получаем

$$\Phi_{\alpha,\beta} \cdot V = \ell_F(\beta)\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha \cdot V - \ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\,\mathrm{d}\,\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V. \tag{22}$$

Используя лемму 4.3 и очевидное равенство

$$\mathrm{d}\left(\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V\right) = 0,$$

получим

$$-\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha)\mathrm{d}\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V \equiv \mathrm{d}\,\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) \cdot \frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V \bmod (\pi^n, \deg 1). \tag{23}$$

Непосредственно из определения функции $\ell_{\mathfrak{m}}$ и равенства (6) следует

$$\mathrm{d}\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) = \alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha - x^{-1}\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\big)^{\blacktriangle},$$

и поэтому, учитывая сравнение (23), равенство (22) можно переписать в виде

$$\Phi_{\alpha,\beta} \cdot V \equiv \ell_F(\beta)\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha \cdot V + \mathrm{d}\ell_{\mathfrak{m}}(\alpha) \cdot \frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V =$$

$$= \alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha \cdot \ell_F(\beta) \cdot V + \alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha \cdot \frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V -$$

$$-x^{-1}\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\big)^{\blacktriangle} \cdot \frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta) \cdot V \bmod (\pi^n, \deg 1),$$

т.е.

$$\Phi_{\alpha,\beta}\cdot V \equiv \alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\cdot\ell_F(\beta)\cdot V -$$

$$-x^{-1}\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\big)^{\blacktriangle}\cdot\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta)\cdot V \mod(\pi^n,\deg 1).$$

Применим следствие к лемме 4.2, чтобы получить

$$x^{-1}\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\big)^{\blacktriangle}\cdot\frac{\blacktriangle}{\pi}\lambda_F(\beta)\cdot V \equiv$$

$$\equiv x^{-1}\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\cdot\lambda_F(\beta)\cdot V\big)^{\blacktriangle} \mod(\pi^n,\deg 1).$$

Откуда сразу следует

$$\Phi_{\alpha,\beta}\cdot V \equiv x^{-1}(1-\blacktriangle)\big(x\alpha^{-1}\,\mathrm{d}\alpha\cdot\lambda_F(\beta)\cdot V\big) \mod(\pi^n,\deg 1)$$

и значит,

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}_x\Phi_{\alpha,\beta}\cdot V \equiv 0 \mod \pi^n.$$

Предложение доказано.

5. Образующие Шафаревича формального $\mathfrak{o}$-модуля $F(\mathfrak{M})$

5.1. Примарные элементы

Напомним, что элемент $\omega\in F(\mathfrak{M})$ называется π^n-примарным, или для простоты, просто примарным, если расширение $K(\widetilde{\omega})/K$ неразветвлено, где $[\pi^n](\widetilde{\omega})=\omega$.

Пусть z – образующая $\mathfrak{o}$-модуля $\mu_n=\operatorname{Ker}[\pi^n]$ и $\underline{z}(x)\in W[\![x]\!]$ такой ряд, что $\underline{z}(\Pi)=z$. Для элемента $a\in W$ возьмем в кольце целых $\widetilde{W}$ пополнения максимального неразветвленного расширения поля T произвольное решение A уравнения $X^{\Delta}-X=a$.

5.1.1. Предложение. *Элемент*

$$\omega_F(a)=E_F\big(as(x)\big)\Big|_{x=\Pi}$$

является π^n-примарным; он не зависит по $\mod[\pi^n]_F(F(\mathfrak{M}))$ ни от выбора решения A, ни от способа разложения образующей z в ряд по степеням Π, ни от выбора простого элемента Π. При этом для любого простого элемента $\widetilde{\Pi}$ поля K выполнено равенство

$$\Big(\widetilde{\Pi},\omega_F(a)\Big)_F=\big[\operatorname{tr}a\big]_F(z). \tag{24}$$

Доказательство. В работе [2, §3] было доказано, что

$$\omega_F(a) \equiv H(a) \bmod [\pi^n]_F(F(\mathfrak{M})),$$

где

$$H(a) = E_F\Big(A^{\Delta}\ell_F(s(x))\Big)\Big|_{x=\Pi}.$$

Поэтому наше утверждение достаточно проверить для $H(a)$. Примарность элемента $H(a)$, а также равенство $(\widetilde{\Pi}, H(a))_F = [\operatorname{tr} a]_F(z)$ были доказаны в работе [2, §1].

Пусть $H'(a)$ – примарный элемент, построенный при другом выборе решения A, разложения образующей z в степенной ряд, или при другом выборе простого элемента. Тогда, как было сказано выше

$$\big(\widetilde{\Pi}, H(a)\big) = \big(\widetilde{\Pi}, H'(a)\big)_F = [\operatorname{tr} a]_F(z) \tag{25}$$

для любого простого элемента $\widetilde{\Pi}$.

Любой элемент α из K^* можно представить в виде произведения нескольких простых элементов, поэтому из (25) следует, что

$$\big(\alpha, H(a)\big)_F = \big(\alpha, H'(a)\big)_F,$$

т.е. элемент $\xi = H(a) -_F H'(a)$ ортогонален (относительно спаривания Гильберта) всей группе K^*. Из невырожденности спаривания Гильберта следует, что $\xi \in [\pi^n]_F(F(\mathfrak{M}))$ и наше утверждение доказано.

Следствие.

$$\big(\alpha, \omega_F(a)\big)_F = \big[v_K(\alpha)\operatorname{tr} a\big]_F(z),$$

где v_K – нормирование на поле K.

Доказательство. Если ε – единица поля K, то она является нормой в неразветвленном расширении, порожденным примарным элементом $\omega_F(a)$, и значит, $(\varepsilon, \omega_F(a)) = 0$. Остальное следует из (24).

5.1.2. Лемма. *Для любого $\alpha(x) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ имеем*

$$\big\{\alpha(x), E_F(as(x))\big\}_F \equiv \deg\alpha \cdot \operatorname{tr} a \bmod \pi^n,$$

где $\deg\alpha$ – порядок ряда $\alpha(x)$.

Доказательство. Непосредственно из определения спаривания получаем

$$\big\{x, E_F(as(x))\big\}_F = \operatorname{tr} a, \tag{26}$$

т.к.

$$\Phi_{x.E_F(as(x))} \cdot V = as(x) \cdot x^{-1}\left(\frac{1}{s(x)} + \frac{c}{\pi - 1}\right) \equiv ax^{-1} \bmod \deg 1.$$

Пусть теперь $\varepsilon(x)$ – обратимый ряд в $W_0[\![x]\!]$. Проверим, что

$$\bigl\{\varepsilon(x), E_F(as(x))\bigr\}_F \equiv 0 \bmod \pi^n. \qquad (27)$$

Действительно,

$$\Phi_{\varepsilon, E_F(as)} \cdot V = (as\,\mathrm{d}\,\log\varepsilon) \cdot V - \left(\ell_{\mathfrak{m}}(\varepsilon) \cdot \mathrm{d}\sum_{m\geqslant 1} \frac{(as)^{\blacktriangle^m}}{\pi^m}\right) \cdot V.$$

Первое слагаемое, очевидно, принадлежит $xW[\![x]\!]$, и значит

$$\mathrm{res}\,(as\,\mathrm{d}\,\log\varepsilon) \cdot V = 0.$$

Используя равенство (6), второе слагаемое перепишем в виде

$$h = \sum_{m\geqslant 1} \left(\frac{q}{p}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{p}{\pi}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{q}{p}\ell_{\mathfrak{m}}(\varepsilon)\right) x^{-1}(x\mathrm{d}(as))^{\blacktriangle^m} \cdot V.$$

Ряд $\frac{p}{q}\ell_{\mathfrak{m}}(\varepsilon) \in W[\![x]\!]$ (см. лемму 1.1, 1)), и, кроме того, $\mathrm{d}s \equiv 0 \bmod \pi^n$ (см. (2)), значит, $h(x) \equiv 0 \bmod \pi^n$, откуда

$$\mathrm{res}\,\Phi_{\varepsilon, E_F(as)} \cdot V \equiv 0 \bmod \pi^n$$

и (27) доказано. Утверждение леммы следует теперь из (26) и (27). $\square$

5.2. Разложение Шафаревича

Пусть G_ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$ – формальные группы Любина–Тейта, построенные по изогениям $[\pi]_0 = \pi x + x^q$, $[\pi]_\rho = \pi x + \pi x^{p^\rho} + x^q$, $\rho \geqslant 1$, соответственно. Пусть $\mathcal{E}_\rho$, $0 \leqslant \rho \leqslant f-1$, – степенные ряды, задающие изоморфизмы групп G_ρ в группу F, соответственно (т.е. $\mathcal{E}_q = \lambda_F^{-1} \circ \lambda_\rho$, где λ_ρ – логарифм формальной группы G_ρ).

Лемма 5.2.1. *Пусть для каждого i с условием; $1 \leqslant i < \frac{qe}{q-1}$, $q \nmid i$, и для каждого $\theta \in \mathfrak{R}$ выбран элемент $\varepsilon_i(\theta)$ в $\mathfrak{o}$-модуле $F(\mathfrak{M})$, удовлетворящий условию $\varepsilon_i(\theta) \equiv \theta\Pi^i \bmod \Pi^{i+1}$. Тогда любой элемент $\beta \in F(\mathfrak{M})$ можно представить в виде*

$$\beta = \sum_{i,r}{}_F [\pi^r]_F\bigl(\varepsilon_i(\theta)\bigr) +_F \omega_F(a_\beta),$$

(см. [2, лемма 9] и предложение 5.1.1 выше).

5.2.2. Предложение. *Набор элементов*

$$\left\{\mathcal{E}_\rho(\theta\Pi^i), \omega_F(a)\right\}, \tag{28}$$

$$\theta \in \mathfrak{R}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant f-1, \quad 1 \leqslant i < \frac{qe}{q-1}, \quad (i,p)=1, \quad a \in W$$

составляет систему образующих $\mathfrak{o}$-модуля $F(\mathfrak{M})$; при этом

$$\left(\Pi, \mathcal{E}_\rho(\theta\Pi^i)\right)_F = 0, \quad \left(\Pi, \omega_F(a)\right)_F = [\operatorname{tr} a]_F(z).$$

Доказательство. Так как группа F изоморфна базисной формальной группе G_0 с изогенией $[\pi]_0 = \pi x + x^q$, то наше утверждение достаточно проверить для последней группы. В этом случае $\mathcal{E}_0 = x$ и

$$\mathcal{E}_\rho \equiv x + \frac{1}{1-\pi^{p^\rho-1}}\, x^{p^\rho} \mod x^{p^\rho+1}.$$

Поэтому

$$\mathcal{E}_\rho(x) -_{G_0} \mathcal{E}_0(x) \equiv \frac{1}{1-\pi^{p^\rho-1}}\, x^{p^\rho} \mod x^{p^\rho+1},$$

откуда

$$\mathcal{E}_\rho(\theta\Pi^i) -_{G_0} (\theta\Pi^i) \equiv \theta^{p^\rho}\Pi^{p^\rho} \mod \Pi^{p^\rho+1}$$

и значит, согласно лемме 5.2.1 набор (28) является системой образующих $\mathfrak{o}$-модуля $F(\mathfrak{M})$.

Изогения $[\pi^n]_\rho$ является, очевидно, унитарным многочленом степени q^n, поэтому для символа Гильберта группы G_ρ имеем равенство $(\alpha,\alpha)_{G_\rho} = 0$ для любого $\alpha \in F(\mathfrak{M})$, а тогда $(\alpha, \mathcal{E}_q(\alpha))_{G_0} = 0$ и мы получаем второе утверждение предложения для группы G_0, а значит, и для изоморфной ей группы F. □

6. Спаривание на формальном модуле $F(\mathfrak{M})$

С помощью спаривания $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$ из п. 1 мы построим спаривание на множестве $K^* \times F(\mathfrak{M})$. Именно, пусть $\alpha \in K^*$ и $\beta \in F(\mathfrak{M})$. Пусть $\underline{\alpha}(x) \in \mathcal{H}_\mathfrak{m}$ и $\underline{\beta}(x) \in \mathcal{H}_\mathfrak{m}$ – такие ряды, что $\underline{\alpha}(\Pi) = \alpha$, $\underline{\beta}(\Pi) = \beta$. Тогда

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_F : K^* \times F(\mathfrak{M}) \to \mu_n = \operatorname{Ker}[\pi^n]_F$$

$$\langle \alpha, \beta\rangle_F := \left[\,\{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\}_F\,\right]_F(z).$$

Построенное спаривание из-за доказанного в п. 4 свойства независимости корректно определено, т.е. оно не зависит от выбора рядов $\underline{\alpha}(x)$ и $\underline{\beta}(x)$.

Нам теперь надо проверить, что спаривание $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_F$ не зависит также от выбора простого элемента Π.

Предложение 6.1. *Спаривание* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_F$ *инвариантно от выбора простого элемента* Π, *т.е. для любых* $\alpha\in K^*$, $\beta\in F(\mathfrak{M})$ *и любых простых* Π *и* Π' *выполнено равенство*

$$\langle\,\alpha,\beta\,\rangle_{F,\Pi}=\langle\,\alpha,\beta\,\rangle_{F,\Pi'}.$$

Доказательство. Пусть простому элементу Π соответствует переменная X, элементу Π' – переменная Y, и при этом $X=g(Y)$.

Докажем сперва, что

$$\left\{X,\underline{\beta}(X)\right\}_X=\left\{g(Y),\underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y \tag{29}$$

или, что равносильно,

$$\langle\,\Pi,\beta\,\rangle_\Pi=\langle\,\Pi,\beta\,\rangle_{\Pi'}.$$

Из доказанной в п. 4 независимости спаривания $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$ мы можем взять разложение β по образующим Шафаревича из предложения 5.2.2 и по линейности спаривания можно брать в качестве β эти образующие. Таким образом, достаточно проверить

$$\left\{X,E_F(as(X))\right\}_X=\left\{g(Y),E_F(as(g(Y))\right\}_Y,$$

$$\left\{X,\mathcal{E}_0(\theta X^i)\right\}_X=\left\{g(Y),\mathcal{E}_0(\theta g(Y)^i)\right\}_Y,$$

$$\left\{X,\mathcal{E}_\rho(\theta X^i)\right\}_X=\left\{g(Y),\mathcal{E}_\rho(\theta g(Y)^i)\right\}_Y,$$

где $\theta\in\mathfrak{R}$, а $(i,p)=1$.

Первое равенство следует из леммы 5.1.2, т.к. $\deg g(Y)=1$; оба других равенства немедленно вытекают из символьного свойства спаривания $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$ (см. предложение 2.1).

Например,

$$\left\{X,\mathcal{E}_0(\theta X^i)\right\}_X=[i^{-1}]_F\left\{\theta X^i,\mathcal{E}_0(\theta X^i)\right\}_X=0$$

и

$$\left\{g(Y),\mathcal{E}_0(\theta g(Y)^i\right\}_Y=[i^{-1}]_F\left\{\theta g^i,\mathcal{E}_0(\theta g^i)\right\}_Y=0.$$

Пусть теперь ε – единица поля K и $\underline{\varepsilon}(X) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ – такой ряд, что $\underline{\varepsilon}(\Pi) = \varepsilon$. Надо проверить, что

$$\left\{\underline{\varepsilon}(X), \underline{\beta}(X)\right\}_X = \left\{\underline{\varepsilon}(g(Y)), \underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y \tag{30}$$

или, что то же самое,

$$\langle\, \varepsilon, \beta \,\rangle_{\Pi} = \langle\, \varepsilon, \beta \,\rangle_{\Pi'}.$$

Ясно, что

$$\left\{X\underline{\varepsilon}(X), \underline{\beta}(X)\right\}_X = \left\{X, \underline{\varepsilon}(X)\right\}_X + \left\{\underline{\varepsilon}, \underline{\beta}\right\}_X$$

$$\left\{g(Y)\underline{\varepsilon}(g(Y)), \underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y = \left\{g(Y), \underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y + \left\{\underline{\varepsilon}(g), \underline{\beta}(g)\right\}_Y.$$

Поэтому, чтобы проверить (30) нам осталось доказать, учитывая (29), что

$$\left\{f(X), \underline{\beta}(X)\right\}_X = \left\{f(g(Y)), \underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y, \tag{31}$$

где $f(X) = X \cdot \varepsilon(X)$. Пусть $Z = f(X)$ и $h(Y) = f(g(Y))$ и пусть $\Pi'' = f(\Pi)$ – соответствующий элемент. Тогда из (29) следует:

$$\left\{Z, \underline{\beta}(f^{-1}(Z)\right\}_Z = \left\{f(X), \underline{\beta}(X)\right\}_X,$$

$$\left\{Z, \beta(f^{-1}(Z)\right\}_Z = \left\{h(X), \underline{\beta}(f^{-1}(h(Y))\right\}_Y = \left\{f(g(Y)), \underline{\beta}(g(Y))\right\}_Y$$

(мы взяли при этом для элемента β разложение $\underline{\beta}(f^{-1}(\Pi''))$, используя независимость спаривания $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}_F$, см. предложение 4.1).

Отсюда сразу следует (31), а значит и (30).

Инвариантность в общем случае вытекает из (29) и (30). $\square$

7. Явная форма для символа Гильберта

Теорема 7.1. *Пусть $\alpha \in K^*$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$ и $\underline{\alpha}(X)$, $\underline{\beta}(X)$ – соответствующие этим элементам ряды из $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$ и $\mathcal{H}_F$: $\underline{\alpha}(\Pi) = \alpha$, $\underline{\beta}(\Pi) = \beta$. Тогда для символа Гильберта $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_F$ степени n имеет место формула*

$$(\alpha, \beta)_F = \left[\operatorname{tr} \operatorname{res} \Phi_{\alpha,\beta} \cdot V\right]_F(z)$$

(относительно рядов $\Phi_{\alpha,\beta}$ и V см. (8) и (9)).

Доказательство. Если в качестве α возьмем простой элемент Π, а β будет пробегать систему образующих Шафаревича формального модуля $F(\mathfrak{M})$ из предложения 5.2.2, то значения символа

Гильберта будут совпадать со значениями спаривания $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_F$ в силу предложения 6.1 и леммы 5.2.1.

Поэтому
$$(\Pi,\beta)_F = \langle\,\Pi,\beta\,\rangle_F$$
для любого $\beta \in F(\mathfrak{M})$.

Общий случай доказывается стандартным способом, используя инвариантность спаривания $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle_F$ относительно выбора простого элемента. Пусть ε – единица в поле K и $\Pi' = \Pi\varepsilon$, тогда
$$\langle\,\varepsilon,\beta\,\rangle_\Pi = \langle\,\Pi',\beta\,\rangle_\Pi -_F \langle\,\Pi,\beta\,\rangle_\Pi = \langle\,\Pi',\beta\,\rangle_{\Pi'} -_F \langle\,\Pi,\beta\,\rangle_\Pi =$$
$$= (\Pi',\beta)_F -_F (\Pi,\beta)_F = (\varepsilon,\beta)_F.$$
Теорема доказана.

8. Норменные и символьные ряды

Определение 2. *Ряд $\mathcal{E}_n(x) = x + \ldots$ из кольца $\mathfrak{o}$ назовем норменным степени n для формальной группы F, если для любого поля K, содержащего $\operatorname{Ker}[\pi^n]_F$, выполнено равенство:*
$$\big(\alpha,\mathcal{E}_n(\alpha)\big)_{F,n} = 0$$
при всех $\alpha \in F(\mathfrak{M}_K) \cap K^*$.

Определение 3. *Ряд $\mathcal{E}(x) = x + \ldots$ из кольца $\mathfrak{o}[\![x]\!]$ назовем абсолютно норменным для формальной группы F, если он является норменным степени n при любом $n \geqslant 1$.*

Замечание 5. Терминология оправдывается тем, что в этом случае α является нормой в расширении L/K, где $L = K(\alpha')$, $[\pi^n]_F(\alpha') = \mathcal{E}(\alpha)$ (см. (5)).

Замечание 6. Из теоремы и определения следует, что ряд $\mathcal{E}_n(x)$ (соотв. $\mathcal{E}(x)$) является норменным степени n (соотв. абсолютно норменным) для F тогда и только тогда, когда он при тех же условиях является *символьным* для F (см. определение 1, п. 2). Тем самым понятие символьности и норменности для данного ряда совпадают.

В этом пункте мы найдем условия норменности (символьности) данного ряда.

Теорема 8.1. *Ряд $\mathcal{E}_n(x) = x + \dots$ из кольца $\mathfrak{o}[\![x]\!]$ является норменным (символьным) степени n для F тогда и только тогда, когда ряд*

$$\left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)(\lambda_F \circ \mathcal{E}_n)(x) = \sum_{m \geqslant 1} d_m\, x^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geqslant \min\bigl(n, v_q(m)\bigr) \tag{32}$$

при всех $m \geqslant 1$.

Теорема 8.2. *Ряд $\mathcal{E}(x) = x + \dots$ из кольцп $\mathfrak{o}[\![x]\!]$ является абсолютно норменным (символьным) для F тогда и только тогда, когда ряд*

$$\left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)(\lambda_F \circ \mathcal{E}_n) = \sum_{m \geqslant 1} d_m\, x^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geqslant v_q(m) \tag{33}$$

при всех $m \geqslant 1$.

Докажем сперва вторую теорему.

Если ряд $\mathcal{E}(x)$ удовлетворяет условию (33), то он, согласно предложению 2.1 является символьным, а, значит, и норменным для F при всех $n \geqslant 1$ (см. замечание 5).

Обратно. Пусть ряд $\mathcal{E}(x)$ является норменным (символьным), но тем не менее условие (33) выполнено не для всех m. Среди всех таких m выберем наименьший индекс t с минимальным значением $v(d_t)$.

Таким образом, если $t = q^n t_0$, $q \nmid t_0$, то

$$\begin{aligned} &v(d_t) < n, \\ &v(d_t) < v(d_m) \quad \text{для} \quad m < t, \\ &v(d_t) \leqslant v(d_m) \quad \text{для} \quad m \geqslant t, \end{aligned} \tag{34}$$

где m пробегает все индексы, для которых не выполнено условие (33).

Рассмотрим поле деления изогении $K_n = k(\operatorname{Ker}[\pi^n]_F)$ и пусть K – вполне разветвленное расширение над K_n степени t_0. Пусть z – образующая $\mathfrak{o}$-модуля $\operatorname{Ker}[\pi^n]_F$ в поле K_n. Так как расширение

K/K_n вполне разветвлено, то легко выбрать простой элемент Π в поле K так, чтобы $z = \Pi^{t_0} + b_1\Pi^{t_0+1} + \dots$, $b_i \in \mathfrak{o}$, и значит, $\underline{z}(x) = x^{t_0} + b_1 x^{t_0+1} + \dots$, $\underline{z}(\Pi) = z$. Тогда $s(x) = [\pi^n]_F(\underline{z}) = z^{a^n} + \pi f(\underline{z})$, где $f(x) \in x\mathfrak{o}[\![x]\!]$, и поэтому

$$1/s \equiv 1/\underline{z}^{a^n} \equiv x^{-t} \bmod \bigl(\pi, x^{-t+1}\bigr). \tag{35}$$

Ряд $\lambda_F \circ \mathcal{E}$ является логарифмом формальной группы Любина–Тейта G, т.е. $\lambda_G = \lambda_F \circ \mathcal{E}$ (см. п. 2) и при этом

$$\ell_G(x) = \left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)\lambda_G(x) = \sum_{m \geqslant 1} d_m x^m.$$

Вычислим символ Гильберта $(\Pi, \mathcal{E}(\Pi))_{F,n}$. По определению ряда $\Phi := \Phi_{\Pi,\mathcal{E}(\Pi)}$ (см. (8), п. 1) имеем

$$\Phi \cdot V = \ell_G(x) x^{-1} \cdot V = \sum_{m \neq 1} d_m\, x^{m-1} V + d_t\, x^{t-1} V.$$

Из (5) следует, что

$$\operatorname{res} d_t\, x^{t-1}/s \equiv d_t \bmod d_t \pi. \tag{36}$$

Далее, из (34) и сравнения (35) получаем

$$\operatorname{res} d_m\, x^{m-1}/s \equiv 0 \bmod d_t \pi.$$

Поэтому $\operatorname{res} \Phi \cdot V \equiv d_t \bmod d_t\pi$, откуда следует, что $\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi V \not\equiv 0 \bmod \pi^n$, и значит, для $\alpha = \Pi$

$$\bigl(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)\bigr)_{F,n} = \bigl[\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi V\bigr](z) \neq 0,$$

т.е. ряд $\mathcal{E}(x)$ не будет норменным. Теорема доказана.

Докажем теорему 8.1. Пусть выполнено условие (32) для всех $m \geqslant 1$. Тогда без всяких изменений проходит доказательство предложения 2.1, согласно которому ряд $\mathcal{E}_n(x)$ является символьным, а значит, и норменным степени n.

Обратно. Пусть ряд $\mathcal{E}_n(x)$ является норменным степени n, но условие (32) выполняется не для всех m. Выберем среди всех таких m наименьший индекс t так, что

$$\begin{aligned} &v(d_t) < n, \\ &v(d_t) < v(d_m) \quad m < t, \\ &v(d_t) \leqslant v(d_m) \quad m \geqslant t. \end{aligned}$$

Пусть $r = v_q(t)$. Рассмотрим поле деления изогении $K_r = k(\operatorname{Ker}[\pi^n]_F)$, и пусть K – вполне разветвленное расширение над K_r степени t_0, где $t = q^r t_0$, $q \nmid t_0$. Рассуждая точно также, как в теореме 8.2, получаем для простого элемента Π поля K:

$$\big(\Pi, \mathcal{E}_n(\Pi)\big)_{F,r} \neq 0. \tag{37}$$

Пусть $K_n = k(\operatorname{Ker}[\pi^n]_F)$, $n \geqslant r$ и $L = K_n K$. Тогда (37) выполнено и в поле L. Далее, из определения символа Гильберта имеем:

$$\big(\Pi, \mathcal{E}_n(\Pi)\big)_{F,r} = \big[\pi^{n-r}\big]_F \big(\Pi, \mathcal{E}_n(\Pi)\big)_{F,n}$$

и поэтому, согласно (37)

$$\big(\Pi, \mathcal{E}_n(\Pi)\big)_{F,r} \neq 0.$$

Теорема доказана.

Следующее предложение дает примеры абсолютно норменных (символьных) рядов для F.

Предложение 8.3. *Пусть G – формальная группа Любина–Тейта с логарифмом $\lambda_G(x)$, заданная изогенией*

$$\big[\pi\big]_G(x) = \pi x + \pi a_2\, x^2 + \ldots + \pi a_{q-1}\, x^{q-1} + x^q.$$

Тогда ряд $\mathcal{E}_G(x) = \lambda_F^{-1} \circ \lambda_G$ является абсолютно норменным (символьным) для формальной группы F.

Доказательство. Ряд $\mathcal{E}_G(x)$ задает изоморфизм между группами F и G, поэтому

$$\big(\alpha, \mathcal{E}_G(\alpha)\big)_F = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{E}_G\big((\alpha, \alpha)_G\big) = 0$$

(см. [4, 3.3]). Но α является нормой в расширении $K(\widetilde{\alpha})/K$, где $\widetilde{\alpha}$ – корень уравнения $[\pi^n]_G(x) - \alpha = x^q + \ldots + \pi^n x - \alpha = 0$. Поэтому $(\alpha, \alpha)_G = 0$. Предложение доказано.

Вопрос. Найти условия на абсолютно норменные ряды в терминах изогении.

Предположение. Условие предложения 8.3 является необходимым и достаточным для абсолютно норменного ряда.

Литература

1. С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, *О некотором свойстве спаривания Гильберта.* — Мат. заметки **4**, No. 3 (1988), 393–400.
2. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43, вып. 4** (1979), 765–794.
3. С. В. Востоков, *Символы на формальных группах.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **45, вып. 5** (1981), 985–1014.
4. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43** (1979), 1054–1120.
5. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42** (1978), 1288–1321.

Vostokov S. V., Perlis R. Norm series for the Lubin–Tate formal groups.

In the present paper, the Steinberg relation for the classical Hilbert symbol is generalized to the Lubin–Tate formal groups. The necessary and sufficient conditions for the series satisfying the generalized Steinberg relation are obtained (in the paper such series are called *norm series*).

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 апреля 2001 г.