Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

Н. А. Вавилов

ПОДГРУППЫ РАСЩЕПИМЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

В работах З. И. Боревича и автора [10, 6, 9, 15, 16], рассматривалось описание подгрупп полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, \Lambda)$ над ассоциативным кольцом, содержащих группу $E(\nu)$ элементарных клеточно диагональных матриц фиксированного типа ν. При этом выяснилось, в частности, что если кольцо $\Lambda = R$ коммутативно, а все диагональные клетки в $E(\nu)$ имеют порядок не меньший трех, то для каждой промежуточной подгруппы H, $E(\nu) \leqslant H \leqslant G$, однозначно определена D-сеть σ идеалов в Λ порядка n такая, что $E(\sigma) \leqslant H \leqslant N(\sigma)$, где $E(\sigma)$ – подгруппа, порожденная всеми элементарными трансвекциями, содержащимися в сетевой подгруппе $G(\sigma)$, а $N(\sigma)$ – нормализатор $G(\sigma)$ в G (см. [2–5, 8]). Кроме того, в работах [7, 9] установлено, что в этих условиях каждая подгруппа $E(\sigma)$ – нормальный делитель в $N(\sigma)$. Такое описание промежуточных подгрупп было названо в [9] *стандартным*. В работах [6, 28, 40, 30] эти результаты частично перенесены на некоторые классы некоммутативных колец.

В работе [20] рассматривалось обобщение этих результатов на случай расщепимой ортогональной группы $\Gamma = \mathrm{GO}\,(2\ell, R)$ над коммутативным кольцом R таким, что $2 \in R^*$. Здесь мы завершаем решение этой задачи. Именно, мы полностью описываем подгруппы в Γ, содержащие регулярную подгруппу $E_\Gamma(\nu)$, соответствующую самосопряженной эквивалентности ν на множестве индексов, классы которой содержат не менее пяти элементов. Как и в случае полной линейной группы, оказывается, что для каждой промежуточной подгруппы H, $E_\Gamma(\nu) \leqslant H \leqslant N(\sigma)$, существует единственная ортогональная D-сеть σ идеалов в R такая, что $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma)$, где $E_\Gamma(\sigma)$ – подгруппа ортогональной сетевой подгруппы $\Gamma(\sigma)$ (см. [69, 19, 20, 22, 24, 26]), порожденная всеми содержащимися там элементарными ортогональными

Автор благодарит проект РФФИ, No. 00-01-00441 за поддержку на заключительном этапе работы над статьей.

трансвекциями (корневыми унипотентными элементами), а $N_\Gamma(\sigma)$ – нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в Γ. Мы показываем также, что при этих условиях каждая возникающая подгруппа $E_\Gamma(\sigma)$ является нормальным делителем в $N_\Gamma(\sigma)$.

Отметим, что в случае, когда среди классов эквивалентности ν есть одно-, двух-, трех- или четырех-элементные, а также и в случае, когда $2 \notin R^*$, удается построить содержащие $E_\Gamma(\nu)$ подгруппы, не являющиеся стандартными. Поэтому результаты настоящей работы не могут быть, вообще говоря, усилены. Разумеется, это не исключает того, что аналогичное описание в нескольких других терминах или при дополнительных ограничениях на кольцо может быть получено и в предположении, что все классы эквивалентности ν содержат не менее трех элементов, и мы формулируем некоторые результаты и гипотезы в этом направлении. Стоит отметить также, что наши результаты являются новыми даже для случая поля, причем здесь из них вытекает, в частности, большинство относящихся к расщепимому ортогональному случаю результатов работ О. Кинга [51–55], посвященных доказательству максимальности некоторых классов подгрупп.

Решаемая нами задача об описании промежуточных подгрупп может рассматриваться также как аналог описания подгрупп в полной ортогональной группе, $\Gamma = \mathrm{GO}(2\ell, R)$ над коммутативным полулокальным кольцом R, содержащих группу $T = T(2\ell, R)$ диагональных матриц, которое получено в работах [69, 19, 22] (ранее в работах З. И. Боревича и автора [3, 5, 13] был рассмотрен случай полной линейной группы, а в работах автора и Е. В. Дыбковой [25] – случай полной симплектической группы). В самом деле, для общих колец было бы совершенно безнадежно надеяться описать все подгруппы в Γ, содержащие T, и группа $E_\Gamma(\sigma)$, для которой аналогичная задача уже допускает решение, является наиболее естественной заменой для T.

Рассматриваемая нами задача описания промежуточных подгрупп тесно связана с задачей описания нормальных делителей полной ортогональной группы. При помощи нашего метода легко передоказать для ортогонального случая основную теорему работ И. З. Голубчика [29, 31]. При этом не обязательно даже требовать, чтобы группа Γ была расщепимой, достаточно лишь, чтобы она была построена по невырожденной форме индекса Витта не меньшего, чем 3. На самом деле на нашем пути получаются и более общие результаты, как, скажем, описание субнормальных подгрупп и подгрупп, нормализуемых относительной элементарной подгруппой, коммутационные формулы для относительных элементарных групп и конгруэнц-подгрупп.

Основные результаты настоящей работы были получены в 80-х годах, однако первоначальные доказательства, близко следующие работе [9], были чрезвычайно технически сложными. Представленные здесь значительно более короткие доказательства были получены позже, при этом одно из решающих упрощений было достигнуто благодаря использованию разложения А. В. Степанова [40, 27]. Результаты настоящей работы, воспроизводящей часть главы V диссертации автора [17], анонсированы в [18, 22], но их полные доказательства никогда не публиковались.

§1. Предварительные сведения

Сейчас мы напомним в нужной нам форме необходимые в дальнейшем сведения об ортогональных группах, которые можно найти в одном из следующих источников [1, 34, 43, 48, 57].

1. Расщепимые ортогональные группы. Пусть R – коммутативное кольцо, R^* – его мультипликативная группа, $G = \mathrm{GL}(n, K)$ – полная линейная группа степени n над R. Как обычно, для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j), т.е. $a = (a_{ij})$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$. Через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная. Как обычно, e – единичная матрица порядка n, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой в позиции (i, j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях. *Элементарными трасвекциями* в G называются матрицы вида $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $\xi \in R$, $i \neq j$. Подгруппа в G, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется *элементарной подгруппой* и обозначается $E(n, R)$.

Положим $\ell = [n/2]$, т.е. $n = 2\ell$ или $n = 2\ell + 1$ в зависимости от четности n. Нам будет удобно занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, \ell, -\ell, \dots, -1$, если $n = 2\ell$ четно и $1, \dots, \ell, 0, -\ell, \dots, -1$, если $n = 2\ell + 1$ нечетно. Через I будет обозначаться множество индексов от 1 до -1. Таким образом, $I = I^+ \cup I^-$, где $I^+ = \{1, \dots, \ell\}$, $I^- = \{-\ell, \dots, -1\}$, если n четно и $I = I^+ \cup \{0\} \cup I^-$, если n нечетно.

Далее мы всюду будем предполагать, что $2 \in R^*$. Строго говоря, это не является необходимым, так как результаты, аналогичные доказанным в настоящей работе, могут быть получены и без этого предположения. Однако, если 2 не является обратимой, то, во-первых, ортогональные группы следовало бы определять иначе, чем это сделаем мы, и, во-вторых, для нечетномерного случая заметно усложнились бы не только доказательства, но и формулировка основного результата.

Обозначим через $\mathrm{sdiag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ матрицу, у которой на побочной диагонали в направлении с северо-востока на юго-запад стоят $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и нули во всех остальных местах и положим $f = f_n = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1)$, где количество 1 равняется n. Иначе говоря, элементы матрицы $f = (f_{ij})$ определяются условием $f_{ij} = \delta_{i,-j}$. Определим теперь для нечетного $n = 2\ell + 1$ матрицу $F = F_n$ следующим образом:

$$F = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1),$$

где каждая серия 1 состоит из ℓ членов. Иначе говоря, $F_{2\ell+1}$ – это клеточная матрица, у которой по побочной диагонали идут клетки $f_\ell, 2, f_\ell$, а все остальные клетки нулевые.

Расщепимые специальные ортогональные группы $\Gamma = \mathrm{SO}(n, R)$ – а мы не будем в настоящей работе рассматривать никаких других форм ортогональной группы и поэтому будем в дальнейшем опускать эпитет “расщепимые” – состоят из тех матриц a из специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n, R)$, которые сохраняют билинейную форму с матрицей Грама g, совпадающей с $f_{2\ell}$ или $F_{2\ell+1}$, в зависимости от четности n. Иными словами $\mathrm{SO}(2\ell, R)$ и $\mathrm{SO}(2\ell + 1, R)$ состоят из тех матриц $a \in G$, для которых $\det a = 1$ и $aga^t = g$, где $g = f_{2\ell}$ или $F_{2\ell+1}$ соответственно. Таким образом, $\mathrm{SO}(n, R)$ сохраняет квадратичную форму $x_1x_{-1} + \ldots + x_\ell x_{-\ell}$, если n четно и форму $x_0^2 + x_1x_{-1} + \ldots + x_\ell x_{-\ell}$, если n нечетно. Кроме специальных рассматриваются также *полные ортогональные группы*, сохраняющие соответствующую форму в смысле подобия. Иначе говоря, $\mathrm{GO}(2\ell, R)$ и $\mathrm{GO}(2\ell + 1, R)$ состоят из тех матриц $a \in G$, для которых $aga^t = \lambda g$ при подходящем мультипликаторе $\lambda \in R^*$, где, как и выше, $g = f_{2\ell}$ или $F_{2\ell+1}$ соответственно. Подгруппа в $\mathrm{GO}(n, R)$, состоящая из тех матриц a, для которых $\lambda = 1$, – это обычная *ортогональная группа* $\mathrm{O}(n, R)$.

Условие ортогональности матрицы $a = (a_{ij})$ проще всего использовать в следующей форме:

$$\lambda a'_{ij} = \begin{cases} a_{-j,-i}, & \text{если } i,\ j \neq 0 \text{ или } i = j = 0, \\ a_{-j,0}, & \text{если } i = 0,\ \ j \neq 0, \\ a_{0,-i}/2, & \text{если } j = 0,\ \ i \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Только что введенные группы *расщепимы* в том смысле, что они сохраняют форму максимального индекса Витта и, следовательно, содержат расщепимый максимальный тор. С точки зрения теории алгебраических групп $\mathrm{SO}(n, R)$ является группой Шевалле типа D_ℓ, если $n = 2\ell$ четно, и типа B_ℓ, если $n = 2\ell + 1$ нечетно (*теорема Ри-Дьедонне*). Очень подробное современное изложение этого круга вопросов можно найти в докладе [49].

Переведем предшествующие матричные определения на геометрический язык. Пусть $V \cong R^n$ – свободный R-модуль ранга n со стандартным базисом $e_1, \ldots, e_{-1}$. Отождествим $\mathrm{GL}(V)$ с $G = \mathrm{GL}(n, R)$ посредством этого базиса. Таким образом, каждая матрица $a \in G$ действует на V умножением слева. Зафиксируем на V билинейную форму со значениями в R, матрица которой в базисе $e_1, \ldots, e_{-1}$, называемом *базисом Витта*, совпадает с $f_{2\ell}$ или $F_{2\ell+1}$, в зависимости от четности n. Иными словами, $(u, v) = B(u, v) = u^t gv$, где $g = f_{2\ell}$, если $n = 2\ell$ четно, и $g = F_{2\ell+1}$, если $n = 2\ell + 1$ нечетно. Таким образом, скалярные произведения базисных векторов $e_1, \ldots, e_{-1}$ задаются формулой $(e_i, e_j) = \delta_{i,-j} + \delta_{i,0}\delta_{j,0}$. Ясно, что b *симметрична*, т.е. $(u, v) = (v, u)$, и *невырожденна*, т.е. отображение $u \mapsto \phi_u$ из V в двойственный модуль $V^* = \mathrm{Hom}(V, R)$, определенное формулой $\phi_u(v) = (u, v)$, является изоморфизмом V на V^*. Так вот, $\mathrm{O}(n, R)$ есть в точности группа *изометрий* B, т.е. всех преобразований $a \in G$ таких, что $(au, av) = (u, v)$, а группа $\mathrm{GO}(n, R)$ состоит из *подобий*, т.е. тех $a \in G$, для которых $(au, av) = \lambda(u, v)$ при некотором $\lambda \in R^*$.

2. Ортогональные трансвекции. Основную роль в строении введенных групп играют элементарные корневые унипотентные элементы в группе $\mathrm{SO}(n, R)$, или, говоря классическим языком, элементарные ортогональные трансвекции. В §3 мы вернемся к рассмотрению этих и аналогичных им элементов с общей точки зрения, а сейчас напомним, как они выглядят. *Элементарной ортогональной трансвекцией* называется одна из матриц вида

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i},$$

если i, $j \neq 0$ и $i \neq \pm j$ (с точки зрения теории групп Шевалле – это “*длинный корневой унипотентный элемент*”), и вида

$$T_{i0}(\xi) = T_{0,-i}(-\xi) = e + \xi e_{i0} - 2\xi e_{0,-i} - \xi^2 e_{i,-i},$$

если ровно один из индексов i, j равен 0 (это – “*короткий корневой унипотентный элемент*”). Разумеется, элементы второго типа могут возникать только, если n нечетно (в системе корней типа D_ℓ все корни длинные). Иногда удобно считать, что $T_{i,-i}(\xi) = e$.

Между элементарными ортогональными трансвекциями имеются хорошо известные коммутационные соотношения, являющиеся частным случаем коммутационной формулы Шевалле ([43, 50]). Укажем, как конкретно они выглядят. При этом для двух элементов x, y группы G через $[x, y]$, как обычно, обозначается их коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$. Если все шесть индексов $\pm i$, $\pm j$, $\pm h$ попарно различны, то

$$\big[T_{ij}(\xi), T_{jh}(\zeta)\big] = T_{ih}(\xi\zeta), \tag{2}$$

$$\big[T_{i0}(\xi), T_{0h}(\zeta)\big] = T_{ij}(2\xi\zeta), \tag{3}$$

$$\big[T_{ij}(\xi), T_{j0}(\zeta)\big] = T_{i0}(\xi\zeta)T_{i,-j}(\xi\zeta^2). \tag{4}$$

Перечисленные выше формулы – это просто коммутационная формула Шевалле для следующих случаев: два длинных корня, сумма которых длинный корень; два коротких корня, сумма которых длинный корень; длинный и короткий корни, сумма которых корень. Во всех же остальных случаях, кроме перечисленных выше (а также, разумеется, тех, которые получаются из них заменой $T_{ij}(\xi)$ на $T_{-j,-i}(\xi)$), ортогональные трансвекции $T_{ij}(\xi)$ и $T_{hk}(\zeta)$ коммутируют.

Пусть $i \neq \pm j$. Все элементы $T_{ij}(\xi)$ образуют подгруппу

$$X_{ij} = \big\{T_{ij}(\xi),\ \xi \in R\big\},$$

называемую (*элементарной) корневой унипотентной подгруппой*, или, для краткости, просто *корневой подгруппой*. Если i, $j \neq 0$ подгруппа X_{ij} называется *длинной*, а если $i = 0$, либо $j = 0$ – *короткой*. Подгруппа в $\mathrm{SO}(n, R)$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами X_{ij}, обозначается $\mathrm{EO}(n, R)$ и называется *элементарной подгруппой*. С точки зрения теории алгебраических групп это есть *элементарная группа Шевалле* $E(\Phi, R)$, где Φ – система корней группы Γ. Для полей и, более общо, для полулокальных и близких к ним колец группа $\mathrm{EO}(n,K)$ в точности совпадает с коммутантом ортогональной группы, обозначаемым обычно через $\Gamma^0=\Omega(n,K)$ и называемым также *"ядром спинорной нормы"* (группа $\Omega(n,K)$ состоит из всех матриц со спинорной нормой 1). В общем случае это, конечно, не так, однако при $n\geqslant 5$ группа $\mathrm{EO}(n,K)$ нормальна в $\mathrm{GO}\,(n,K)$ для произвольного коммутативного кольца (четномерный случай рассмотрен А. А. Суслиным и В. И. Копейко [43], случай $n=5$ – В. И. Копейко [39], случай произвольной нечетной размерности – автором и Дж. Таддеи [68]). Примеры показывают, что для $n\leqslant 4$ это, вообще говоря, неверно.

На самом деле все элементы, сопряженные в Γ с $T_{ij}(\xi)$, $i\neq\pm j$, тоже называются *ортогональными трансвекциями* – они не обязаны больше быть элементарными. Говорят также об *(унипотентных) корневых элементах* – *длинных* или *коротких*, в зависимости от того, отличны i и j от 0, или один из них равен 0. Точно так же все подгруппы, сопряженные с X_{ij}, называются *длинными* или *короткими корневыми подгруппами*. Следующий простой факт позволит нам в дальнейшем почти всюду ограничиваться вычислениями только с длинными корневыми элементами.

Лемма 1. *При $n\geqslant 4$ группа $\mathrm{EO}(n,R)$ порождается содержащимися там длинными корневыми унипотентными элементами.*

Доказательство. Для четного n доказывать нечего. Перенося в формуле (4) длинный корневой элемент в левую часть, получим представление короткого корневого элемента в виде произведения трех длинных корневых:

$$T_{i0}(\alpha)=T_{ij}(1)\big(T_{j0}(\alpha)T_{ij}(-1)T_{j0}(-\alpha)\big)T_{i,-j}(-\alpha^2),$$

что и доказывает лемму. Заметим, что из нормальности группы $\mathrm{EO}(n,R)$ в Γ при $n\geqslant 5$ вытекает, что все корневые унипотентные элементы лежат в $\mathrm{EO}(n,R)$ и, поэтому, за исключением группы $\mathrm{EO}(4,R)$, группа $\mathrm{EO}(n,R)$ совпадает с группой, порожденной всеми длинными корневыми элементами.

§2. Сети и связанные с ними группы

Ответ на поставленную задачу формулируется в терминах подгрупп, связанных с сетью, и сейчас мы коротко напомним, что это такое (см. [2–9, 22, 25, 26, 28] по поводу дальнейших деталей).

1. Сети и сетевые подгруппы. Пусть снова R – произвольное коммутативное кольцо, а n – натуральное число. Таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, идеалов σ_{ij} кольца R называется *сетью идеалов в R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$* для всех i, j, r. Мы будем использовать только *D-сети*, для которых дополнительно $\sigma_{ii} = R$ для всех i. Обозначим через $M(\sigma)$ множество тех матриц $a = (a_{ij})$ степени n над R, для которых $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ для всех i, j. Ясно, что $M(\sigma)$ – подкольцо кольца $M(n, R)$ всех квадратных матриц степени n над R. Единичная матрица e тогда и только тогда принадлежит $M(\sigma)$, когда σ является D-сетью. Совокупность $e + M(\sigma)$ представляет собой мультипликативную систему.

В работах З. И. Боревича [2–4] (см. также [5–7]) было введено следующее понятие. Наибольшая подгруппа полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n, R)$, содержащаяся в мультипликативной системе $e + M(\sigma)$, называется *сетевой подгруппой в* $\mathrm{GL}(n, R)$, *соответствующей сети* σ, и обозначается $G(\sigma)$. Таким образом, согласно введенному определению, матрица $a \in G$ тогда и только тогда принадлежит $G(\sigma)$, когда a_{ij} и a'_{ij} сравнимы с δ_{ij} по модулю σ_{ij} для всех i и j. Однако на самом деле условие на a'_{ij} здесь можно отбросить, т.е. $G(\sigma) = G \cap (e + M(\sigma))$, см. по этому поводу [3, 5–9]. На множестве всех сетей σ над R фиксированного порядка n вводится отношение частичного порядка. Именно, пишем $\sigma \leqslant \tau$, если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ при всех i, j.

Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant 1$, идеалов в R порядка n называется *симплектической*, если $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i}$ для всех i, j, и *ортогональной*, если, кроме того,

$$\sigma_{i,-i} = \Sigma \sigma_{ij}\sigma_{j,-i}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \quad j \neq \pm i, \tag{5}$$

для всех i (см. [32, 69, 25, 26, 22]). Ортогональная сеть σ определяет *ортогональную сетевую подгруппу* $\Gamma(\sigma)$ в группе $\Gamma = \mathrm{GO}\,(n, R)$ по формуле $\Gamma(\sigma) = \Gamma \cap G(\sigma)$. Через $N_\Gamma(\sigma)$ обозначается нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в Γ. Даже бóльшую роль, чем сама группа $\Gamma(\sigma)$, в дальнейшем будет играть *элементарная* (*ортогональная*) *сетевая подгруппа* $E_\Gamma(\sigma)$, порожденная всеми содержащимися в $\Gamma(\sigma)$ элементарными корневыми элементами:

$$E_\Gamma(\sigma) = \langle\, T_{ij}(\xi),\, \xi \in \sigma_{ij},\, i \neq \pm j\,\rangle,$$

где, как обычно, для подмножества X в группе G через $\langle X \rangle$ обозначается порожденная им подгруппа.

Все эти определения согласованы с общими определениями сети и сетевой подгруппы в группах Шевалле, см., в частности, [69, 70, 11, 31, 15]. Напомним, что это общее определение состоит в следующем. Пусть Φ – приведенная система корней. Тогда сеть идеалов в R типа Φ – это такой набор $\sigma = (\sigma_\alpha)$, $\alpha \in \Phi$, идеалов σ_α в R, что $\sigma_\alpha \sigma_\beta \subseteq \sigma_{\alpha+\beta}$ каждый раз как α, $\beta \in \Phi$ таковы, что $\alpha + \beta \in \Phi$. В цитированных работах дается также конструкция нескольких групп, связанных с сетями типа Φ.

В случае, когда $R = K$ – поле, D-сети идеалов соответствующего типа находятся во взаимно однозначном соответствии с замкнутыми подмножествами корней в соответствующей системе корней. А именно, D-сети порядка $\ell + 1$ это, по существу, то же самое, что замкнутые множества корней в системе корней типа A_ℓ; симплектические D-сети порядка 2ℓ отвечают замкнутым множествам корней в C_ℓ; а ортогональные D-сети порядков $2\ell+1$ и 2ℓ – замкнутым подмножествам корней в системах корней типов B_ℓ и D_ℓ.

Опишем, как устанавливается это соответствие для ортогонального случая. Пусть $e_1, \dots, e_\ell$ – ортонормированный базис ℓ-мерного евклидова пространства над $\mathbb{R}$. Тогда в качестве системы Φ типов D_ℓ и B_ℓ можно взять, соответственно,

$$D_\ell = \{\pm e_i \pm e_j,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell\},$$
$$B_\ell = \{\pm e_i \pm e_j,\ \pm e_i,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell\}.$$

Если теперь S – замкнутое подмножество в Φ, то ему можно сопоставить ортогональную сеть следующим образом. Положим $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i} = K$, если имеет место один из трех следующих случаев:

i) $1 \leqslant i \neq j \leqslant \ell$ и $e_i - e_j \in S$,

ii) $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $-\ell \leqslant j \leqslant -1$, $i \neq \pm j$ и $e_i + e_j \in S$,

iii) $-\ell \leqslant j \leqslant -1$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$, $i \neq \pm j$ и $-e_i - e_j \in S$.

Для всех остальных $i \neq \pm j$ положим $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i} = 0$. Нам осталось взять $\sigma_{ii} = K$ и найти $\sigma_{i,-i}$ из равенства (5).

2. Отношения эквивалентности на I. Пусть ν – отношение эквивалентности на множестве индексов I. Если i и j эквивалентны относительно ν, то мы пишем $i \overset{\nu}{\sim} j$ или просто $i \sim j$, если ясно, о какой эквивалентности идет речь. В дальнейшем мы будем рассматривать только *самосопряженные* отношения эквивалентности на множестве I, т.е. такие, для которых из того, что $i \sim j$ для некоторых $i,\ j \in I$, следует, что $-i \sim -j$. Для самосопряженного отношения эквивалентности ν каждому классу эквивалентности C с представителем i соответствует *сопряженный* класс эквивалентности $-C$ с представителем $-i$. Таким образом, все классы эквивалентности разбиваются на два классы: *самосопряженные*, для которых $-C = C$ и *несамосопряженные*, для которых $-C \cap C = \varnothing$. Ясно, что порядки сопряженных классов C и $-C$ равны, а порядки всех самосопряженных классов $C = -C$, кроме того из них, который содержит 0, четны.

Пусть $\pm I_1, \dots, \pm I_t$ – все несамосопряженные классы эквивалентности ν, порядков $n_1, \dots, n_t$ соответственно, а $I_{t+1}, \dots, I_m$ – самосопряженные классы порядков $n_{t+1}, \dots, n_m$, причем $0 \in I_m$, если n нечетно. Положим

$$\ell_i = \begin{cases} n_i - 1, & 1 \leqslant i \leqslant t, \\ [n_i/2], & t+1 \leqslant i \leqslant m. \end{cases} \tag{6}$$

Набор чисел $(n_1, \dots, n_t, \ell_{t+1}, \dots, \ell_m)$ образует разбиение числа ℓ, т.е. $n_1 + \ldots + n_t + \ell_{t+1} + \ldots + \ell_m = \ell$. Обозначим через $h(\nu)$ наименьший из порядков $n_1, \dots, n_m$. Для совсем маленьких d нам понадобится небольшая модификация условия $h(\nu) \geqslant d$, которая должна учесть, что с точки зрения длинных корневых элементов группы $\mathrm{SO}(n, R)$, $n \leqslant 4$, устроены плохо: в $\mathrm{SO}(2, R)$ и $\mathrm{SO}(3, R)$ их нет вовсе, а в $\mathrm{SO}(4, R)$ любые две различные корневые подгруппы либо противоположны, либо ортогональны. Поэтому будем писать $h^*(\nu) \geqslant 2$, если $n_1, \dots, n_t \geqslant 2$ и $n_{t+1}, \dots, n_m \geqslant 4$ и $h^*(\nu) \geqslant 3$, если $n_1, \dots, n_t \geqslant 3$ и $n_{t+1}, \dots, n_m \geqslant 5$. Ясно, что условие $h(\nu) \geqslant 5$ влечет условие $h^*(\nu) \geqslant 3$, а оно, в свою очередь, влечет условие $h(\nu) \geqslant 3$.

Обозначим через $E_\Gamma(\nu)$ подгруппу в Γ, порожденную всеми ортогональными трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \sim j$, $i \neq j$. Имеем

$$E_\Gamma(\nu) \cong E(n_1, R) \times \ldots \times E(n_t, R) \times \mathrm{EO}\big(n_{t+1}, R\big) \times \ldots \times \mathrm{EO}\big(n_m, R\big).$$

Таким образом, введенная подгруппа совпадает с элементарной группой Шевалле $E(\Delta, R)$ некоторого типа Δ, вложенной в Γ регулярно в смысле Дынкина, т.е. так, что корни переходят в корни. При этом

$$\Delta = A_{\ell_1} + \ldots + A_{\ell_t} + D_{\ell_{t+1}} + \ldots + D_{\ell_m},$$

если $n = 2\ell$ четно, и

$$\Delta = A_{\ell_1} + \ldots + A_{\ell_t} + D_{\ell_{t+1}} + \ldots + D_{\ell_{m-1}} + B_{\ell_m},$$

если $n = 2\ell + 1$ нечетно, где значения ℓ_i определяются по ν при помощи формулы (6). Как очень хорошо известно, [33], перечисленными выше системами корней исчерпываются все подсистемы в системах корней типов D_ℓ и B_ℓ, соответственно, рассматриваемые с точностью до сопряженности при помощи элементов группы Вейля. При этом нужно различать системы A_3 и D_3, D_2 и $A_1 + A_1$ и считать, что $A_0 = B_0 = D_1 = \varnothing$ – пустая система корней. Условие $h(\nu) \geqslant 5$ означает, что в этом разложении не встречаются слагаемые типов A_0, A_1, A_2, A_3, D_1, D_2, B_0 и B_1; условие же $h^*(\nu) \geqslant 3$ допускает наличие типов A_2 и A_3.

Свяжем с самосопряженным отношением эквивалентности ν на множестве индексов I сеть $[\nu]$ порядка n, полагая

$$[\nu]_{ij} = \begin{cases} R, & i \sim j, \\ 0, & i \not\sim j. \end{cases}$$

Эта сеть является симплектической в силу самосопряженности ν. Если, кроме того, ν не содержит двухэлементных классов вида $\{i, -i\}$ (например, если $h^*(\nu) \geqslant 2$ или $h(\nu) \geqslant 3$), то эта сеть является ортогональной, а только что введенная группа $E_\Gamma(\nu)$ – это в точности элементарная сетевая группа, соответствующая сети $[\nu]$. Сетевая подгруппа $\Gamma([\nu])$ будет обозначаться также через $\Gamma(\nu)$. Ясно, что она получается из $E_\Gamma(\nu)$ добавлением некоторых матриц из следующего прямого произведения:

$$\mathrm{GL}(n_1, R) \times \ldots \times \mathrm{GL}(n_t, R) \times \mathrm{GO}\left(n_{t+1}, R\right) \times \ldots \times \mathrm{GO}\left(n_m, R\right).$$

Пусть σ – любая ортогональная D-сеть σ порядка n. Определим на I отношение эквивалентности ν_σ, полагая i и j эквивалентными относительно ν_σ в том и только том случае, когда $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = R$. Из того, что сеть σ симплектическая, следует, что ν_σ – самосопряженное отношение эквивалентности, а так как, кроме того, σ – ортогональна, то ν_σ не содержит самосопряженных двухэлементных классов. Ясно, что $[\nu_\sigma] \leqslant \sigma$, так что

$E_\Gamma(\nu_\sigma) \leqslant E_\Gamma(\sigma)$ и $\Gamma(\nu_\sigma) \leqslant \Gamma(\sigma)$. При этом ν_σ – самое грубое отношение эквивалентности ν такое, что $[\nu] \leqslant \sigma$. Положим $h(\sigma) = h(\nu_\sigma)$ и $h^*(\sigma) = h^*(\nu_\sigma)$. Очевидно, что если $i \sim r$ и $j \sim s$ относительно ν_σ, то $\sigma_{ij} = \sigma_{rs}$.

3. Вспомогательные утверждения. Теперь мы начнем изучение подгрупп в $\Gamma = \mathrm{GO}(n, R)$, содержащих группу $E_\Gamma(\nu)$ для такого самосопряженного отношения эквивалентности ν на I, что $h^*(\nu) \geqslant 3$. Сформулируем, прежде всего, два вспомогательных утверждения, которые будут играть важную роль в доказательстве основных результатов. Эти утверждения можно найти в работе [20, предложения 1 и 2], и мы не будем воспроизводить оттуда достаточно громоздкие детали вычислений, а ограничимся лишь некоторыми замечаниями по поводу их доказательств. Прежде всего свяжем с каждой подгруппой $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$ некоторую ортогональную сеть.

Лемма 2. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$. Тогда для любой подгруппы H в $\Gamma = \mathrm{GO}(n, R)$, содержащей группу $E_\Gamma(\nu)$ для такого самосопряженного отношения эквивалентности ν на I, что $h^*(\nu) \geqslant 3$, существует единственная наибольшая ортогональная сеть σ такая, что $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H$.*

Для доказательства нужно положить $\sigma_{ii} = R$ и

$$\sigma_{ij} = \{\xi \in R \mid T_{ij}(\xi) \in H\}, \quad i \neq \pm j,$$

а аддитивные подгруппы $\sigma_{i,-i}$ определить равенством (5). Тогда из коммутационных формул (2)–(4) для ортогональных трансвекций непосредственно вытекает, что все σ_{ij} являются идеалами в R. То, что так определенный набор $\sigma = (\sigma_{ij})$ идеалов в R образует ортогональную сеть, также может быть выведено из формул (2)–(4) и на другом языке доказано в [12]. Ясно, что σ – наибольшая сеть, удовлетворяющая условию $E_\Gamma(\sigma) \leqslant H$. Построенную выше сеть σ будем называть *сетью, ассоциированной с подгруппой H*.

Замечание. Построение ассоциированной сети есть одно из тех мест, где существенную роль играет обратимость двойки для нечетного n. Если $2 \notin R^*$, то из формулы (3) можно вывести лишь, что $2\sigma_{i0}\sigma_{0j} \subseteq \sigma_{ij}$ и, значит, набор $\sigma = (\sigma_{ij})$ образует не сеть идеалов, а лишь квазисеть [12].

Следующее утверждение доказывается точно так же, как лемма 1.

Лемма 3. *Пусть $h^*(\sigma) \geqslant 3$. Тогда элементарная сетевая подгруппа $E_\Gamma(\sigma)$ порождается содержащимися в ней длинными корневыми элементами.*

Матрицы из $\Gamma(\sigma)$ характеризуются простыми сравнениями на коэффициенты. Сейчас мы воспроизведем аналогичную характеризацию матриц из сетевого нормализатора $N_\Gamma(\sigma)$.

Лемма 4. *Пусть R – коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, а $\sigma = (\sigma_{ij})$ – ортогональная сеть идеалов над R, причем $h^*(\sigma) \geqslant 3$. В этом случае матрица $a = (a_{ij}) \in \Gamma$ с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$ принадлежит $N_\Gamma(\sigma)$ тогда и только тогда, когда для любого набора индексов i, j, r, s выполнено включение*

$$a_{ir}\sigma_{rs}a'_{rs} \subseteq \sigma_{ij}. \tag{7}$$

Условия (7) для всех наборов индексов эквивалентны тем же условиям для тех наборов, в которых $r \neq \pm s$, $i \neq \pm j$.

То, что матрица, удовлетворяющая включениям (7), принадлежит $N_\Gamma(\sigma)$, очевидно. Обратно, пусть $aE_\Gamma(\sigma)a^{-1} \leqslant \Gamma(\sigma)$. Тогда включения (7) для $r \neq \pm s$, $i \neq \pm j$ выводятся из сетевых условий на коэффициенты матриц $aba^{-1} \in \Gamma(\sigma)$, где $b \in E_\Gamma(\sigma)$, а остальные включения проверяются формальными выкладками, использующими ортогональность матрицы a и сети σ. Заметим, что это рассуждение, в частности, показывает, что $N_\Gamma(E_\Gamma(\sigma)) \leqslant N_\Gamma(\sigma)$.

§3. Элементы корневого типа

К сожалению, корневые элементы, о которых шла речь в §1, недостаточны для наших целей. Центральную роль в наших вычислениях будут играть элементы более общего вида – так называемые ортогональные трансвекции или элементы корневого типа. Сейчас мы напомним их определение и установим некоторые свойства, необходимые в дальнейшем (см. [19, 20, 22]).

Начнем с геометрического определения. Пусть снова $V = R^n$ – свободный R-модуль ранга n с невырожденной симметричной билинейной формой B. Как и в §1, мы отождествим каждый вектор u из V с его столбцом координат, а каждый эндоморфизм модуля

V с его матрицей в базисе Витта $e_1, \dots, e_{-1}$. Напомним, что вектор u называется *изотропным*, если $(u,u)=0$. Иными словами, это означает, что $u \in u^{\perp}$, где через $u^{\perp}$ обозначено множество векторов из V, ортогональных к u, т.е. $u^{\perp} = \{v \in V \mid (u,v)=0\}$. Пусть теперь u – изотропный вектор, $v \in u^{\perp}$ – ортогональный к u вектор, $\xi \in R$ – скаляр. Сопоставим им линейное преобразование $T_{u,v}(\xi)$ модуля V, определенное формулой

$$T_{u,v}(\xi)x = x - \xi(u,x)v + \xi(v,x)u - \frac{1}{2}\xi^2(v,v)(u,x)u, \tag{8}$$

где $x \in V$. Ясно, что это преобразование обратимо и обратное к нему равно $T_{u,v}(-\xi)$. Следующее утверждение проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 5. *Для всех u, $v \in V$, $\xi \in R$ таких, что $(u,u)=(u,v)=0$, преобразование $T_{u,v}(\xi)$ принадлежит $\mathrm{SO}(n,R)$.*

Очевидно, что $T_{u,u}(\xi) = e$ и $T_{u,v}(\xi) = T_{v,u}(-\xi) = T_{u,v}(\xi)$. Вместо $T_{u,v}(1)$ обычно пишут просто $T_{u,v}$. Преобразования $T_{u,v}(\xi)$ также часто называются *ортогональными трансвекциями*. Некоторые авторы используют термин *трансвекции Эйхлера–Зигеля–Диксона* или, коротко *ESD-трансвекции*. Для конформности с работами автора и Е. Б. Плоткина о строении групп Шевалле над коммутатиными кольцами, в которых рассматриваются аналогичные преобразования для всех модулей Вейля групп Шевалле, мы будем называть их *элементами корневого типа*. В нашем случае речь идет просто о естественном представлении ортогональной группы. Преобразование $T_{u,v}(\xi)$ называется элементом *длинного корневого типа*, если вектор v также изотропен, и *короткого корневого типа* в противном случае. Подгруппа $\mathrm{TO}\,(n,R)$ в $\mathrm{SO}(n,R)$, порожденная всеми ESD-трансвекциями $T_{u,v}(\xi)$, $\xi \in R$, $(u,u)=(u,v)=0$, называется *подгруппой Эйхлера*. Для поля (и вообще всегда на стабильном уровне) $\mathrm{TO}\,(n,R)$ совпадает с элементарной подгруппой $\mathrm{EO}(n,R)$, но, вообще говоря, может быть несколько больше последней.

Из следующей леммы, которая проверяется прямой выкладкой, вытекает, в частности, что подгруппа $\mathrm{TO}\,(n,R)$ нормальна в $\Gamma = \mathrm{GO}\,(n,R)$. Для элемента $g \in \Gamma$ здесь, как и в §1, через λ обозначается соответствующий мультипликатор (1).

Лемма 6. *Для любого $g \in \mathrm{GO}\,(n,R)$ справедлива формула*

$$gT_{u,v}(\xi)g^{-1} = T_{gu,gv}(\lambda^{-1}\xi). \tag{9}$$

Элементарные ортогональные трансвекции получаются в этих обозначениях следующим образом. Возьмем $u = e_i$, $v = e_{-j}$. Тогда непосредственно вычисление убеждает нас в том, что $T_{u,v}(\xi) = T_{ij}(\xi)$. Напомним, что в §1 мы называли *корневыми элементами* все сопряженные с элементарными корневыми унипотентами. Лемма 6 означает, в частности, что каждый корневой элемент является элементом корневого типа. Обратное неверно. В самом деле, преобразования *короткого* корневого типа существуют и для четного n, когда нет *коротких* корней – это показывает, что элементов корневого типа существенно больше, чем корневых элементов. Более того, как мы скоро убедимся, если кольцо R не является кольцом Безу, класс элементов *длинного* корневого типа *всегда* шире класса *длинных* корневых элементов. На самом деле, все наши доказательства как раз и основаны на использовании элементов корневого типа, *не являющихся* корневыми.

Вернемся теперь к матричной записи. Для столбца $u \in R^n$ обозначим через $\widetilde{u} \in {}^nR = (R^n)^*$ строчку, равную $(gu)^t$, где, как обычно, $g = f_n$, если $n = 2\ell$ четно, и $g = F_n$, если $n = 2\ell + 1$ нечетно. Это означает, что i-я координата $\widetilde{u}_i$ строки $\widetilde{u}$ равна $(-i)$-координате u_{-1} столбца u при $i \neq 0$, а $\widetilde{u}_0 = 2u_0$. Сравнивая эти обозначения с определением скалярного произведения на $V = R^n$, видим, что $(u, v) = \widetilde{v}u$. В следующей лемме определяется матричный вид элементов корневого типа.

Лемма 7. *Пусть $\widetilde{u}u = \widetilde{v}u = 0$. В базисе Витта $e_1, \dots, e_{-1}$ ортогональная трансвекция $T_{u,v}(\xi)$ задается матрицей*

$$T_{u,v}(\xi) = e + u\xi\widetilde{v} - v\xi\widetilde{u} - \frac{1}{2}u\xi^2\widetilde{v}v\widetilde{u}. \tag{10}$$

В частном случае элементов длинного корневого типа эта формула превращается в формулу

$$T_{u,v}(\xi) = e + u\xi\widetilde{v} - v\xi\widetilde{u}. \tag{11}$$

Напомним, что здесь $\widetilde{u}u = \widetilde{v}u = \widetilde{v}v = 0$. Пусть теперь $b = T_{u,v}(\xi)$ – некоторый элемент длинного корневого типа из Γ. Сейчас мы установим некоторые зависимости между его матричными коэффициентами, которые будут играть важную роль в дальнейших вычислениях. Все они сразу вытекают из формулы (11) и определения строки $\widetilde{u}$.

Лемма 8. *При всех $i \neq j$ имеет место равенство $b'_{ij} = -b_{ij}$. Если, кроме того, i, $j \neq 0$, то $b_{ij} = -b_{-j,-i}$. В частности, $b_{i,-i} = 0$ для всех $i \neq 0$.*

Лемма 9. *Для любых четырех попарно различных индексов i, j, h, k имеют место равенства*

$$b_{ih}b_{ik} - b_{ik}b_{ih} = b_{i,-j}b_{-h,k}.$$

Лемма 10. *Для любого $h \neq 0, \pm j, -i$ имеет место равенство*

$$b_{ij} = b_{ij}b'_{hh} - b_{ih}b'_{hj} + b_{i,-h}b'_{-h,j}.$$

Вернемся теперь снова к обозначениям начала параграфа. Следующая лемма сразу вытекает из определения элементов $T_{u,v}(\xi)$.

Лемма 11. *Пусть u, v, w – три изотропных вектора такие, что $(u,v) = (u,w) = 0$. Тогда $T_{u,v}(\xi)T_{u,w}(\xi) = T_{u,\xi v+\zeta w}(1)$.*

Напомним теперь, что подмодуль U в V называется *вполне изотропным*, если он целиком состоит из изотропных векторов. Так как $2 \in R^*$, это условие эквивалентно тому, что $(u,v) = 0$ для любых u, $v \in U$. Сейчас мы построим некоторые специальные элементы корневого типа, являющиеся основой всех наших вычислений.

Лемма 12. *Пусть векторы u, v, w порождают вполне изотропный подмодуль. Тогда для любых α, β, $\gamma \in R$ произведение*

$$b = T_{u,v}(\alpha)T_{u,w}(\beta)T_{v,w}(\gamma)$$

является элементом корневого типа.

Доказательство. Непосредственное вычисление, использующее лемму 11, показывает, что $b = T_{x,y}$, где $x = u + v + w$, а

$$y = \big((\alpha+\beta-\gamma)u + (\alpha-\beta+\gamma)v + (-\alpha+\beta+\gamma)w\big)/2.$$

В частности, можно применить эту лемму к случаю, когда $u = e_i$, $v = e_{ij}$, $w = e_{-h}$ и заключить, что, если все шесть индексов $\pm i$, $\pm j$, $\pm h$ различны, то произведение $T_{ij}(\alpha)T_{ih}(\beta)T_{-jh}(\gamma)$ является элементом длинного корневого типа для любых α, β, $\gamma \in R$. Мы не будем объяснять здесь ни того, что это значит с точки зрения геометрии корневых подгрупп, ни различных обобщений леммы 11. Об этом можно прочесть в серии статей автора и Е. Б. Плоткина [76]. Заметим лишь, что элемент, построенный в лемме 12, заведомо *не является корневым, если идеал, порожденный α, β и γ не главный*. Это значит, что для того, чтобы каждый элемент длинного корневого типа был корневым, по крайней мере необходимо, чтобы R было кольцом Безу. Более того, для группы $\mathrm{SO}(6, R)$ это условие не является достаточным, а нужны еще более жесткие условия типа однорядности.

§4. Включение в нормализатор

В этом параграфе будет доказан главный результат настоящей работы. Начнем с двух вспомогательных утверждений, относящихся к извлечению элементарных ортогональных трансвекций. Следующая лемма доказывается элементарной, хотя и довольно утомительной проверкой. По существу она совпадает с леммой 9 работы [20]. Правда, там требовалось, чтобы b был длинным корневым элементом, но фактически использовались лишь его свойства, выражаемые леммами 8–10.

Лемма 13. *Пусть $h(\nu) \geqslant 5$ и b – элемент длинного корневого типа, лежащий в группе $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$. Пусть, далее, h, p, q – три эквивалентных индекса таких, что все шесть чисел $\pm h$, $\pm p$, $\pm q$ различны. Предположим, что $b_{ij} = \delta_{ij}$ для всех $i \neq h, -p, -q$ и $j \neq -h, p, q$. Тогда для любого $i \sim h$ имеем b_{ip}, $b_{iq} \in \sigma_{ih}$.*

Как мы увидим ниже, условие на ν в этой лемме не может быть, вообще говоря, ослаблено даже в случае, когда $R = K$ – поле. Следующая лемма представляет собой душу доказательства. После этого теорема получается чисто формальными выкладками.

Лемма 14. *Пусть $h(\nu) \geqslant 5$ и b – элемент длинного корневого типа, содержащийся в группе $H \geqslant E_\Gamma(\nu)$. Пусть, далее, h, p, q – три эквивалентных индекса таких, что все шесть индексов $\pm h$, $\pm p$, $\pm q$ попарно различны. Тогда для любых α, $\beta \in R$ таких, что $\alpha b_{ph} + \beta b_{qh} = 0$ справедливы включения $b_{ih}\alpha$, $b_{ih}\beta \in \sigma_{ih}$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $c = bT_{hp}(\alpha)T_{hq}(\beta)b^{-1}$, принадлежащую H вместе с b. По лемме 11 это элемент длинного корневого типа. Вычисление, использующее леммы 8–10, показывает, что если i, $-j$, h, $-p$, $-q$ попарно различны, то $c_{ij} = \delta_{ij} + b_{ij}(\alpha b_{ph} + \beta b_{qh})$. Таким образом, при $i \neq h, -p, -q$ и $j \neq -h, p, q$ имеем $c_{ij} = \delta_{ij}$. Это значит, что мы можем применить к матрице c предыдущую лемму и заключить, что c_{ip}, $c_{iq} \in \sigma_{ih}$. Осталось заметить, что $c_{ip} = \alpha b_{ih}$, $c_{iq} = \beta b_{ih}$.

Теперь у нас все готово, чтобы доказать основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть R – коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, а ν – эквивалентность на множестве индексов $I = \{1, \dots, -1\}$, самосопряженная и такая, что $h(\nu) \geqslant 5$. Тогда для каждой подгруппы H в полной ортогональной группе $\Gamma = \mathrm{GO}\,(n, R)$, содержащей группу $E_\Gamma(\nu)$, имеют место включения*

$$E_\Gamma(\sigma) \leqslant H \leqslant N_\Gamma(\sigma),$$

где σ – ассоциированная с подгруппой H сеть идеалов в R.

Доказательство. Пусть a – некоторая матрица из H. Возьмем r, $s \neq 0$, $r \neq \pm s$, $\alpha \in \sigma_{rs}$, и рассмотрим длинный корневой элемент $b = aT_{rs}(\alpha)a^{-1}$. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что $b \in \Gamma(\sigma)$.

В самом деле, фиксируем индексы i и j, $i \not\sim j$. По крайней мере один из них, скажем j, содержится в классе, содержащем еще два элемента p, q таких, что индексы $\pm j$, $\pm p$, $\pm q$ ненулевые и попарно различные. В лемме 14 положим $\alpha = b_{qh}$ и $\beta = -b_{ph}$. Это даст нам включения $b_{ih}b_{ph}$, $b_{ih}b_{qh} \in \sigma_{ih}$.

Рассмотрим теперь длинный корневой элемент $c = bT_{jp}(1)b^{-1}$, принадлежащий H вместе с c. По только что доказанному, $c_{ip}c_{jp} \in \sigma_{ip}$. Прямое вычисление показывает, что $c_{ip} = b_{ij} + b_{ip}b_{pj}$, $c_{jp} = b_{jj} + b_{pp} - 1 + b_{jp}b_{pj}$. По уже доказанному, $b_{ij}b_{pj}$, $b_{ip}b_{jp} \in \sigma_{ij} = \sigma_{ip}$ и, значит,

$$\bigl(b_{ij} + b_{ip}b_{pj}\bigr)\bigl(b_{jj} + b_{pp} - 1\bigr) \in \sigma_{ij}. \tag{12}$$

Запишем теперь такое же включение для матрицы c, поменяв местами j и p. Учитывая, что $c_{ij} = b_{ij}b_{pj} \in \sigma_{ij}$, получим $c_{ip}\bigl(c_{jj} + c_{pp} - 1\bigr) \in \sigma_{ij}$ или, что то же самое,

$$\bigl(b_{ij} + b_{ip}b_{pj}\bigr)\bigl(1 + b_{pj}(b_{jj} + b_{pp})\bigr) \in \sigma_{ij}.$$

Сравнивая это включение с (12), получаем $b_{ij} + b_{ip}b_{pj}(1 + b_{pj}) \in \sigma_{ij}$. Снова подставив сюда c и вспомнив, что $c_{ij} \in \sigma_{ij}$, получим

$c_{ip} = b_{ij}+b_{ip}b_{pj} \in \sigma_{ij}$. Разумеется, рассматривая вместо матрицы c матрицу $f = bT_{pj}(1)b^{-1}$, мы точно так же докажем, что $b_{ip}+b_{ij}b_{jp} \in \sigma_{ij}$. Тем самым, $b_{ij}+b_{ip}b_{pj}$ сравнимо с $b_{ij}-b_{ij}b_{jp}b_{pj}$ по модулю σ_{ij}. Так как $b_{ij}b_{pj} \in \sigma_{ij}$ по уже доказанному, то и $b_{ij} \in \sigma_{ij}$. Поскольку это верно для любых $i \not\sim j$, то $b \in \Gamma(\sigma)$. По замечанию после леммы 3 это и означает, что $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех r, $s \neq 0$, $r \neq \pm s$.

Мы должны еще проверить, что выполнены включения $a_{ir}\alpha a'_{0j} \subseteq \sigma_{ij}$, где $\alpha \in \sigma_{r0}$. Для этого мы поступим следующим образом. Возьмем $s \sim 0$, $s \neq 0$, $\pm r$, и вместе с a рассмотрим матрицу $b = aT_{s0}(1)$, также принадлежащую H. Тогда $b'_{sj} = a'_{sj} + a'_{0j} - a'_{-sj}$ и $b_{ir} = a_{ir}$. Идеалы σ_{r0}, σ_{rs}, $\sigma_{r,-s}$ совпадают между собой и, по уже доказанному, $b_{ir}\sigma_{r0}b'_{sj}$, $a_{ir}\sigma_{r0}a'_{sj}$, $a_{ir}\sigma_{r0}a'_{-sj} \subseteq \sigma_{ij}$. Поэтому и $a_{ir}\sigma_{r0}a'_{0j} \subseteq \sigma_{ij}$. Тем самым выполнены все включения и по лемме 4 имеем $a \in N_\Gamma(\sigma)$. Так как это верно для любой матрицы $a \in H$, то $H \leqslant N_\Gamma(\sigma)$. Теорема полностью доказана.

Формально эта теорема является новой даже для случая, когда $R = K$ – поле. Конечно, для этого случая она может быть достаточно стандартными рассуждениями выведена также из описания неприводимых подгрупп ортогональной группы, порожденных длинными коневыми подгруппами. Эта классификация была завершена Ли Шанчжы [58–60]; ссылки на предшествующие публикации Б. Старк, У. Кантора и других, посвященные этой задаче, можно найти в [63–65, 50, 21]. Теорема 1 обобщает многие результаты, опубликованные в этой области. Отметим лишь некоторые из ее приложений. Из нее практически полностью вытекают результаты работ О. Кинга [52–55], посвященных максимальности подгрупп из классов Ашбахера C_1, C_2 (см. [44, 55, 57]). Разумеется, в действительности О. Кинг делает больше, а именно, определяет *точные* списки исключений.

Приведем теперь примеры, показывающие, что условие $h(\nu) \leqslant 5$ не может быть, вообще говоря, ослаблено даже для случая поля. Пусть вначале $\Gamma = \mathrm{GO}(8, K)$, а разбиение ν состоит из классов I^+ и I^-. Тогда $E_\Gamma(\nu) = \mathrm{SL}(4, K)$. Как очень хорошо известно, в Γ есть изоморфная $\mathrm{Spin}(7, K)$ подгруппа F, содержащая $E_\Gamma(\nu)$. Она порождена $E_\Gamma(\nu)$ и любой матрицей вида $T_{ih}(1)T_{kj}(1)$, где i, $j \in I^+$ и все восемь элементов $\pm i$, $\pm j$, $\pm h$, $\pm k$ различны. Ясно, что в группе F нет никаких элементарных ортогональных трансвекций, кроме тех, которые лежат уже в $E_\Gamma(\nu)$. В то же время F

не нормализует $E_\Gamma(\nu)$.

В работе [9] отмечено, что в линейном случае один из классов разбиения ν может быть одноэлементным. В нашем случае таким мог бы быть только класс $I_m = \{0\}$. И действительно, анализируя доказательство, легко убедиться, что стандартное описание содержащих $E_\Gamma(\nu)$ подгрупп может быть получено, если все остальные классы содержат не менее 5 элементов. Как мы только что установили, четырехэлементные классы действительно запрещены. Покажем, что и трехэлементные классы приводят к исключениям. Пусть $\Gamma = \mathrm{GO}(7, K)$, а разбиение ν состоит из трех классов I^+, I^- и $\{0\}$. Группа $E_\Gamma(\nu)$ изоморфна $\mathrm{SL}(3, K)$ и, как очень хорошо известно, в Γ есть изоморфная $G_2(K)$ подгруппа F, содержащая $E_\Gamma(\nu)$. Именно, F порождена $E_\Gamma(\nu)$ и любой матрицей вида $T_{ij}(1)T_{k0}(1)$, где все шесть индексов $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$ различны, причем j и k одного знака, а i – другого. Снова F не содержит никаких элементарных ортогональных трансвекций, кроме тех, которые лежат уже в $E_\Gamma(\nu)$, но не нормализует $E_\Gamma(\nu)$.

Таким образом, оценка $h(\nu) \geqslant 5$ не может быть, вообще говоря, понижена. Однако, если мы интересуемся не всеми подгруппами, содержащими $E_\Gamma(\nu)$, а только теми, которые содержат $\Gamma(\nu)$, а кольцо R удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то ситуация становится заметно проще. Например, заключение теоремы 1 продолжает оставаться верным для подгрупп, содержащих $\Gamma(\nu)$, в предположении $h^*(\nu) \geqslant 3$, если в R найдется такой обратимый элемент θ, что $\theta^2 - 1$ также обратим. В связи с этим чрезвычайно естественной представляется задача описания подгрупп, содержащих $E_\Gamma(\nu)$, для случая $h^*(\nu) \geqslant 3$. Как мы знаем, они больше не обязаны быть стандартными. Автор решается высказать предположение, что приведенные выше контрпримеры являются, по существу, единственными, т.е. что здесь имеет место парастандартное описание, аналогичное полученному в [37] для полной линейной группы.

Настоящая работа написана в 1990 году, но по различным причинам не была своевременно опубликована. Она воспроизводится здесь as is, без каких-либо изменений, за исключением исправления нескольких очевидных опечаток. В настоящее время с использованием результатов работы [70] представляется возможным обобщить этот результат на гиперболические унитарные группы над коммутативным форменным кольцом, сняв при этом условие $2 \in R^*$. Для аналогичной задачи о надгруппах диагональной подгруппы над полулокальным форменным кольцом это в основном проделано в недавних работах Е. В. Дыбковой [71–73]. Однако доказательства аналогичных результатов в случае форменных колец с необратимой 2 и нетривиальной инволюцией, хотя и основаны на тех же идеях, что и доказательства в настоящей работе, значительно сложнее технически. Поэтому автор решил опубликовать данную работу, объясняющую несколько ранее не публиковавшихся вычислительных трюков в простейшей ситуации. Отметим еще обзор [75] и недавнюю статью [74], где можно найти ссылки на публикации по близкой тематике, появившиеся после написания данной работы.

Литература

1. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* Наука, М. (1969).
2. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 13 (1976), 16–24.
3. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
4. З. И. Боревич, *О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 22–31.
5. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группе над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **148** (1978), 43–57.
6. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом.* — Изв. ВУЗов, Математика No. 11 (1982), 11–15.
7. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **267**, No. 4 (1982), 777–778.
8. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Об определении сетевой подгруппы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **132** (1984), 26–33.
9. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **165** (1984), 24–42.
10. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, В. Наркевич, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 13–20.
11. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* гл. IV–VI Мир, М. (1972); гл. VII, VIII (1978).
12. Н. А. Вавилов, *О параболических подгруппах групп Шевалле над полулокальным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 43–58.

13. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1981), 10–15.
14. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.
15. Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу клеточно диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1983), 16–21.
16. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над дедекиндовым кольцом арифметического типа.* — Изв. ВУЗов, Математика No. 17 (1987), 14–20.
17. Н. А. Вавилов, *Подгруппы расщепимых классических групп.* Докт. дисс., Л. (1987).
18. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. Акад. Наук СССР **299,** No. 6 (1988), 1300–1303.
19. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп* I, II. — Сиб. мат. журн. **29,** No. 3 (1988), 12–25; Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–63.
20. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом.* — Сиб. мат. журн. **29,** No. 4 (1988), 31–43.
21. Н. А. Вавилов, *Полупростые корневые элементы и тройки унипотентных корневых подгрупп в группах Шевалле.* — В кн.: Труды 10-го Всесоюзн. симп. по теории групп. – Вопросы алгебры. Вып. 4, Минск (1989), сс. 162–173.
22. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **183** (1990), 29–41.
23. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Тр. Ленингр. Мат. об-ва **1** (1990), 64–109.
24. Н. А. Вавилов, *О подгруппах спинорной группы, содержащих расщепимый максимальный тор.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 49–75.
25. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *О подгруппах полной симплектической группы, содержащих группу диагональных матриц* I, II. — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **103** (1980), 31–47; **132** (1983), 44–56.
26. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, *Сетевые подгруппы групп Шевалле.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **94** (1979), 40–49; **114** (1982), 62–76.
27. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл АН СССР **304,** No. 4 (1989), 788–791.
28. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *О подгруппах полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности.* — Изв. ВУЗов, Математика No. 10 (1989), 19–25.
29. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволющией.* — Успехи мат. наук **30,** No. 6 (1975), 165.
30. И. З. Голубчик, *О подгруппах полной линейной группы* $\mathrm{GL}_n(R)$ *над ассоциативным кольцом* R. — Успехи мат. наук **39,** No. 1 (1984), 125–126.

31. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях линейной и унитарной групп над ассоциативными кольцами.* — В кн.: Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. Уфа 1985, сс. 122–142.
32. Е. В. Дыбкова, *О некоторых конгруэнц-подгруппах симплектической группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **64** (1976), 80–91.
33. Е. Б. Дынкин, *Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли.* — Матем. сб. **30,** No. 2 (1952), 349–462.
34. Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп.* Мир, М. (1974).
35. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Успехи мат. наук **36,** No. 5 (1981), 56–107.
36. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. т. Вып. 21, М. (1985), сс. 135–182.
37. В. А. Койбаев, *О подгруппах полной линейной группы, содержащих группу элементарных клеточно-диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. ун-та **15** (1982), 169–177.
38. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — Успехи мат. наук **41,** No. 1 (1986), 57–96.
39. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Матем. сб. **106,** No. 1 (1987), 94–107.
40. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп.* Канд. дисс., Л. (1987).
41. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **41,** No. 2 (1977), 235–253.
42. А. А. Суслин, *Об одной теореме Кона.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 127–130.
43. А. А. Суслин, В. И. Копейко, *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
44. M. Aschbacher, *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* — Invent. Math. **76** , No. 3 (1984), 469–514.
45. H. Bass, *Clifford algebras and spinor norms over a commutative ring.* — Am. J. Math. **96,** No. 1 (1974), 156–206.
46. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* London et al., Wiley (1972).
47. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters.* London et al., Wiley (1985).
48. A. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer, 1989.
49. J.-Y. Hée, *Groupes de Chevalley et groupes classiques.* — Publ. Math. Univ. Paris VII **17** (1984), 1–54.
50. W. Kantor, *Subgroups of classical groups generated by long root elements.* — Trans. Am. Math. Soc. **248,** No. 2 (1979), 347–379.
51. O. H. King, *On some maximal subgroups of the classical groups.* — J. Algebra **68,** No. 1 (1981), 109–120.
52. O. H. King, *Maximal subgroups of the special classical groups associated with nonisotropic subspaces of a vector space.* — J. Algebra **73,** No. 2 (1981), 350–375.
53. O. H. King, *Imprimitive maximal subgroups of the orthogonal, special orthogonal, unitary and special unitary groups.* — Math. Z. **182,** No. 2 (1983), 193–203.

54. O. H. King, *Imprimitive maximal subgroups of the symplectic, orthogonal, and unitary groups.* — Geom. Dedic. **15**, No. 4 (1984), 339–353.
55. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group.* — J. Algebra **96**, No. 1 (1985), 178–193.
56. P. Kleidman, M. Liebeck, *A survey of the maximal subgroups of the finite simple groups.* — Geom. Dedic. **25** (1988), 375–389.
57. P. Kleidman, M. Liebeck, *The subgroup structure of the finite classical groups.* Cambridge Univ. Press (1990).
58. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups containing root subgroups in finite classical groups.* — Kexue Tongbao **29**, No. 1 (1984), 14–18.
59. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups of* $P\Omega(n, F, Q)$ *with root subgroups.* — Scientia Sinica, Ser. A **28**, No. 8 (1990), 826–838.
60. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups in classical groups over arbitrary fields.* — Proc. Symp. Pure Math. **47**, Part 2 (1987), 487–493.
61. B. R. McDonald, *Geometric algebra over local rings.* N.Y.-Basel, Marcel Dekker (1976).
62. B. R. McDonald, *Linear algebra over commutative rings.* N.Y.-Basel, Marcel Dekker (1984).
63. B. S. Stark, *Some subgroups of* $\Omega(V)$ *generated by groups of root type 1.* — Illinois J. Math. **17**, No. 4 (1973), 584–607.
64. B. S. Stark, *Some subgroups of* $\Omega(V)$ *generated by groups of root type.* — J. Algebra **29**, No. 1 (1974), 33–41.
65. B. S. Stark, *Irreducible subgroups of orthogonal groups generated by groups of root type 1.* — Pacif. J. Math. **53**, No. 2 (1974), 611–625.
66. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over local rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 57–66.
67. K. Suzuki, *On parabolic subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Sci. Repts Tokyo Daigaku **A13**, Nos. 366–382 (1977), 225–232.
68. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaires dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55**, Part II (1986), 693–710.
69. N. A. Vavilov, *On subgroups of split orthogonal groups in even dimension.* — Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. **29**, Nos. 9–10 (1981), 425–429.
70. A. Bak, N. A. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, No. 2 (2000), 159–196.
71. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах гиперболических унитарных групп.* — Алгебра и Анализ **9**, No. 4 (1997), 79–86.
72. Е. В. Дыбкова, *Наддиагональные подгруппы гиперболических унитарных групп над хорошим форменным кольцом над полем.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1996), 87–96.
73. Е. В. Дыбкова, *Форменные сети и решетка наддиагональных подгрупп в симплектической группе над полем характеристики 2.* — Алгебра и Анализ **10**, No. 4 (1998), 113–129.
74. A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
75. N. A. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como–1993). C.U.P. (1995), pp. 233–280.

76. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–113.

Vavilov N. A. Subgroups of split orthogonal groups over a commutative ring.

We describe subgroups of the split orthogonal group $\Gamma = \mathrm{GO}(n, R)$ of degree n over a commutative ring R such that $2 \in R^*$, which contain the elementary subgroup of a regularly embedded semi-simple group F. We show that if the ranks of all irreducible components of F are at least 4, then the description of its overgroups is standard in the sense that for any intermediate subgroup H there exists a unique orthogonal net of ideals such that H lies between the corresponding net subgroup and its normaliser in Γ. A similar result for subgroups of the general linear group $\mathrm{GL}(n, R)$ with irreducible components of ranks at least 2 was obtained by Z. I. Borewicz and the present author. We construct examples which show that if F has irreducible components of ranks 2 or 3, then the standard description does not hold. The paper is based on the previous publications by the author, where similar results were obtained in some special cases, but the proof is based on a new computational trick.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 мая 2001 г.