Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 281, 2001 г.

Т. Б. Беляева, С. В. Востоков

СИМВОЛ ГИЛЬБЕРТА В ПОЛНОМ МНОГОМЕРНОМ ПОЛЕ. I

Введение

Настоящая работа является прямым продолжением работ [1, 2], в которых были найдены явные формулы для символа Гильберта в полных многомерных полях в случае нечетной простой характеристики последнего поля вычетов. Здесь мы рассматриваем случай характеристики $p = 2$. Этот случай почти всегда является особым в теории чисел и дает обычно много неожиданных отклонений. Отметим, что знаменитый квадратичный закон взаимности Гаусса относится именно к случаю $p = 2$.

Работа разбивается на две части. В первой из них мы изучаем в основном одномерный случай полного дискретно нормированного поля нулевой характеристики с совершенным полем вычетов характеристики 2. (Случай $p \neq 2$ был разобран в работах [3–5, 22].)

В одномерном случае явное описание символа Гильберта дает явное описание классов циклических p-алгебр в группе Брауэра исходного поля, что является продолжением теории циклических алгебр характеристики p, степени p^n, развитой такими математиками, как E. Witt, H. Schmid, O. Teichmüller, H. Hasse.

Отметим далее, что хотя одномерный случай для $p = 2$ уже изучался ранее в работах [5, 6], а также (для формальных групп, которые являются далеким обобщением мультипликативной формальной группы) в работах [7, 8] (см., кроме того, для мультипликативного случая упражнения в [9, гл. VII, §2]), тем не менее, в настоящей работе имеются отличия от ранее полученных результатов.

Во-первых, в отличие от других авторов (кроме Брюкнера) мы рассматриваем символ Гильберта как спаривание на $K^* \times K^*$, а

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 01-01–00997 и 00-01-00140.

не только на парах, у которых одна из компонент является единицей в поле K. Кроме того, полученный результат имеет более компактную и удобную для проверки и использования форму, чем результат, полученный Брюкнером в работе [5].

В первом параграфе работы мы даем новое определение символа Гильберта, как отображения из топологической K-группы Милнора в группу примарных элементов, удовлетворяющего некоторому соотношению нормирования, и доказываем единственность и, тем самым, его совпадение с символом, происходящим из теории полей классов (см. §1).

Во втором параграфе строится в явном виде спаривание на множестве $K^*\times K^*$ со значениями в группе примарных элементов, доказываются основные свойства этого спаривания и совпадение его с символом Гильберта (§2, п. 11°), что дает для последнего явную формулу для всех p. В последнем пункте этого параграфа мы описываем конструктивную теорию полей классов для куммеровых расширений полного дискретно нормированного поля при $p = 2$.

В последнем параграфе работы мы рассматриваем многомерный случай, даем все формулировки и делаем наброски доказательств.

Обозначения

- K – полное n-мерное поле,
$$k = K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)} = K,$$
$$\operatorname{char} K = \operatorname{char} K^{(n-1)} = \ldots = \operatorname{char} K^{(s)} = 0, \operatorname{char} K^{(s-1)} = p > 0;$$
- $t_1, \dots, t_n$ – система локальных параметров поля K (подъемы простых элементов полей вычетов $K^{(i)}$ в K);
- $\overline{v} = (v_1, \dots, v_n) : K^* \to \mathbb{Z}^{(n)}$ – нормирование ранга n в поле K, где $\mathbb{Z}^{(n)}$ упорядочено следующим образом: $(m_1, \dots, m_n) < (m_1', \dots, m_n')$, если $m_n = m_n', \dots, m_{i+1} = m_{i+1}'$, но $m_i < m_i'$ для некоторого i;
- v – одномерное нормирование на K, $v = v_n$;
- k – последнее поле вычетов K, которое предполагается совершенным и не алгебраически замкнутым;
- $W = W(k)$ – кольцо векторов Витта поля k;
- T – поле отношений кольца W;

- $\mathcal{R}$ – система представителей Тейхмюллера элементов поля k в кольце W;
- Fr – автоморфизм Фробениуса в T;
- $\mathfrak{p} = \mathrm{Fr} - 1$ – оператор Картье;
- Δ – оператор Фробениуса в кольце $T\{\{t_1\}\}\dots\{\{t_{n-1}\}\}((t_n))$:

$$\left(\sum a_{\overline{r}} t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}\right)^{\Delta} = \left(\sum a_{\overline{r}}^{\mathrm{Fr}} t_1^{pr_1} \dots t_n^{pr_n}\right)$$

(Δ зависит от выбора системы локальных параметров).
Мы будем использовать два вида обозначений:
Δf и f^{Δ}, имея в виду одно и то же действие Δ;
- $\delta = 1 + \Delta + \Delta^2 + \dots$;
- ζ – первообразный корень степени p^N из 1 в поле K;
- $\mu_N = \langle\zeta\rangle$.
Для элемента $\alpha \in K^*$, имеющего разложение в системе локальных параметров $t_1, \dots, t_n$:

$$\alpha = a t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} + \dots, \quad a \in W^*$$

(здесь точками обозначены члены более высоких порядков) будем писать

$$\underline{\alpha} := \underline{\alpha}(X) = a X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} + \dots,$$

где $X_1, \dots, X_n$ – алгебраически независимые над T переменные;
- $s_m(X) = \underline{\zeta}^{p^m}(X) - 1$, $m \geqslant 0$; известно сравнение:

$$s_m^{\Delta} \equiv s_{m-1} \bmod p^m \tag{1}$$

(см. [3, §3, п. 2]);
- $s = s_N$;
- $u = s/s_{N-1}$.

§1. Определение символа Гильберта в полном многомерном поле

1°. Пусть K – полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики с совершенным полем вычетов k характеристики $p > 0$. Предполагаем, что K содержит все корни степени p^N из 1. Пусть $W = W(k)$ – кольцо векторов Витта и Ω_N – группа p^N-примарных элементов поля K, т.е. единиц, присоединение корней степени p^N из которых к полю K дает неразветвленное расширение.

Теория простых центральных алгебр над K, развитая в работах [10–13], дает возможность строить билинейное кососимметрическое спаривание

$$(\ , \ ) : \quad K^* \times K^* \to \Omega_N,$$

нормированное на паре π, ω (π – произвольный простой элемент поля K, $\omega \in \Omega_N$) соотношением

$$(\pi, \omega) = \omega.$$

Поскольку спаривание $(\ , \ )$ удовлетворяет также соотношению Стейнберга $(\alpha, 1-\alpha) = 1$, $(\alpha \neq 0, 1)$, то корректно следующее определение.

Определение 1. *Под символом Гильберта на поле K понимаем отображение*

$$(\ , \ ) : \quad K_2^{\mathrm{top}}(K) \to \Omega_N$$

с соотношением нормирования $(\pi, \omega) = \omega$ для любого простого π из K и $\omega \in \Omega_N$.

Здесь $K_2^{\mathrm{top}}(K)$ – топологическая K-группа Милнора (см. [14–18]*).*

Это определение согласуется с обычным определением символа Гильберта в случае, когда k – конечное поле. В этом случае неразветвленное расширение $K(\sqrt[p^N]{\omega})/K$ имеет канонический автоморфизм Фробениуса φ. Определим характер χ на группе Ω_N:

$$\chi(\omega) = \sqrt[p^N]{\omega}^{\,\varphi - 1} \in \mu_N, \tag{2}$$

где μ_N – группа всех корней степени p^N из 1. Тогда обычный символ Гильберта является билинейным кососимметрическим спариванием на K^* со значениями в μ_N, которое нормировано соотношением

$$(\pi, \omega) = \chi(\omega).$$

2°. Пусть теперь K – полное n-мерное поле, k – последнее поле вычетов, которое предполагаем совершенным и не p-замкнутым. Пусть, как и выше, K содержит все корни степени p^N из 1, и пусть Ω_N – группа p^N-примарных элементов поля K.

Определение 2. *Символом Гильберта на K будем называть отображение*
$$(\ ,\dots, \ )_N : K^{\mathrm{top}}_{n+1}(K) \to \Omega_N, \tag{3}$$
нормированное соотношением
$$(t_1,\dots,t_n,\omega)_N = \omega$$
для любого набора локальных параметров $t_1,\dots,t_n$ поля K и любого примарного элемента $\omega \in \Omega_N$.

Группа p^N-примарных элементов Ω_N, согласно теории Куммера, соответствует неразветвленным расширениям Куммера поля K степеней, делящих p^N, поэтому группе Ω_N соответствуют абелевы расширения поля k степеней, делящих p^N, которые, по теории Витта, описываются фактор-группой $W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$, где $W = W(k)$ – кольцо векторов Витта, и $\mathfrak{p} = \mathrm{Fr} - 1$ – оператор Картье для оператора Фробениуса Fr (см. [10]). Тем самым получаем изоморфизм
$$f : \Omega_N \xrightarrow{\sim} W/(p^N W + \mathfrak{p}(W)). \tag{4}$$

3°. В этом пункте мы опишем в явном виде изоморфизм (4). Пусть $t_1,\dots,t_n$ – система локальных параметров поля K, и $X = (X_1,\dots,X_n)$ – набор алгебраически независимых переменных над полем частных кольца $W(k)$. Элементу $\alpha \in K^*$, представленному в виде
$$\alpha = a t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n} + \dots ,$$
где $a \in W^*$, а точками обозначены члены более высокого порядка, поставим в соответствие ряд
$$\underline{\alpha}(X) = a X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_n^{a_n} + \dots$$
(см. [19, 20]). Пусть Δ – оператор Фробениуса, действующий на коэффициенты ряда, как обычный оператор Фробениуса Fr в кольце W, а переменные $X_1,\dots,X_n$ возводящий в степень p.

Рассмотрим взаимно обратные функции E и l, задаваемые формулами
$$\begin{aligned} E(f(X)) &= \exp\left(1 + \frac{\Delta}{p} + \frac{\Delta^2}{p^2} + \dots\right)(f(X)) \\ l(g(X)) &= \frac{1}{p}\log(g^p/g^{\Delta}), \end{aligned} \tag{5}$$

где ряды f и g имеют целые коэффициенты из кольца $W(k)$, и ряд $f(X) = c_{(r)}X_1^{r_1}\dots X_n^{r_n} + \dots$ удовлетворяет условию: $(r_1,\dots,r_n) > (0,\dots,0)$ (для одномерного случая см. [3], а для многомерного случая см. [20]).

Предложение 1.1. *Элемент*

$$\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^{p^N} - 1))\Big|_{X=(t_1,\dots,t_n)}, \quad a \in W,$$

является p^N-примарным. Он не зависит, с точностью до p^N-ых степеней, от выбора системы локальных параметров $(t_1,\dots,t_n)$ поля K и от способа разложения корня ζ в ряд по локальным униформизующим. При этом

$$\omega(a) \in K^{*p^N} \Longleftrightarrow a \in p^N W + \mathfrak{p}(W), \tag{6}$$

группа Ω_N порождена элементами $\omega(a)$ и

$$(t_1,\dots,t_n,\omega(a))_N = \omega(a)$$

для любой системы локальных параметров $t_1,\dots,t_n$.

Доказательство. В работах [3, 4] (одномерный случай) и [20] (многомерный случай) доказано, что

$$\omega(a) = H(a)\varepsilon^{p^N}, \quad \varepsilon \in K^*,$$

где

$$H(a) = E(p^N A\, l(\underline{\zeta}(X)))\Big|_{X=(t_1,\dots,t_n)} \tag{7}$$

и $\mathfrak{p}(A) = a$. Элемент A при этом принадлежит пополнению кольца $W(\overline{k})$.

Корректность подстановок в ряды и сходимость для примарных элементов были подробно изучены в работах [23, 24]. Далее, в уже упоминавшихся работах [3, 4, 20] показано, что элемент $H(a)$, а вместе с ним и $\omega(a)$, являются p^N-примарными, что дает первое утверждение нашего предложения.

Докажем теперь (6). Пусть T – поле отношений кольца $W = W(k)$, тогда $T(A)$ лежит в пополнении некоторого Г-расширения K_A/K и если σ – образующий автоморфизм этого расширения, то

$$A^\sigma - A = \varkappa \in \mathbb{Z}_p \tag{8}$$

(см. [13, стр. 180]).

Пусть $H_1(a) = E(A\,l(\underline{\zeta}))\Big|_{X=(t_1,\dots,t_n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega(a)\in\Omega_N^{p^N} &\iff H_1(a)\in K \iff H_1(a)^\sigma = H_1(a) \\ &\iff E((A^\sigma - A)l(\underline{\zeta}))\Big|_{X=(t_1,\dots,t_n)} = 1 \\ &\iff E(l(\underline{\zeta}))\Big|^{\varkappa}_{X=(t_1,\dots,t_1)} = \underline{\zeta}(X)\Big|^{\varkappa}_{X=(t_1,\dots,t_n)} = \zeta^{\varkappa} = 1 \\ &\iff \varkappa\in p^N\mathbb{Z}_p, \end{aligned} \tag{9}$$

т.е. $A^\sigma = A + p^N\varkappa'$, $\varkappa'\in\mathbb{Z}_p$. Последнее условие означает, что

$$A = a' + p^N A', \quad \text{где} \quad a'\in W(k), \quad A'\in W(\overline{k})\cap T(A).$$

Поэтому $a = \mathfrak{p}(A) = \mathfrak{p}(a') + p^N\mathfrak{p}(A') = \mathfrak{p}(a') + p^N b \in p^N W(k) + \mathfrak{p}(W(k))$, и мы доказали условие (6).

Из условия (6) и изоморфизма (4) следует, что группа p^N-примарных элементов Ω_N порождена элементами $\omega(a)$, $a\in W$. Пусть $H'(a)$ – элемент, полученный точно таким же способом, что и $H(a)$ (см. (7)), только либо при другой системе локальных параметров, либо при другом способе разложения ζ в ряд по этим параметрам.

Пусть $\widetilde{K}$ – максимальное неразветвленное расширение поля K, соответствующее максимальному абелеву p-расширению последнего поля вычетов k. Тогда, по теории Витта, имеет место изоморфизм

$$\Omega_N \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\operatorname{Gal}(\widetilde{K}/K),\mu_N)$$
$$\omega \mapsto \left(\tau\mapsto \sqrt[p^N]{\omega}^{\,\tau-1}\right).$$

При этом изоморфизме примарные элементы $H(a)$ и $H'(a)$ имеют одинаковые образы. Действительно, пусть $\tau\in\operatorname{Gal}(\widetilde{K}/K)$ и $\tau\big|_{K_A} = \sigma^c$, $c\in\mathbb{Z}_p$, тогда согласно (8), так же как и в (9), получаем

$$\sqrt[p^N]{H(a)}^{\,\tau-1} = \sqrt[p^N]{H'(a)}^{\,\tau-1} = \zeta^{c\varkappa}$$

и, значит, $H(a) = H'(a)\eta^{p^N}$, $\eta\in K^*$. Последнее равенство предложения следует из определения символа Гильберта. □

Следствие 1. *Изоморфизм f (см. (4)) имеет следующий явный вид*

$$f : \Omega_N \longrightarrow W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$$
$$\omega(a) \mapsto \overline{a}.$$

Нам удобнее будет работать с образом символа Гильберта в фактор-группе $W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$, который будем обозначать $[\ ,\dots,\ ]$. Таким образом, $[\ ,\dots,\ ]$ является гомоморфизмом

$$[\ ,\dots,\ ] : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$$

с нормированием $[t_1,\dots,t_n,\omega(a)] = a$. При этом $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}] = f((\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}))$.

4°. Определим теперь символ Гильберта другим способом – с помощью отображения взаимности. Пусть сперва K – n-мерное локальное поле (последнее поле вычетов – конечное поле). Тогда существует непрерывное и инъективное отображение взаимности

$$\Psi_K : K_n^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(K^{ab}/K).$$

Отображение Ψ_K индуцирует изоморфизм

$$\Psi_{L/K} : K_n^{\mathrm{top}}(K)/N_{L/K}(K_n^{\mathrm{top}}(L)) \cong \mathrm{Gal}\,(L/K)^{ab}$$

для произвольного конечного расширения L/K, где $N_{L/K}$ – норменное отображение на K-группе (см. [21, 14, 15, 22, 18]).

Символ Гильберта определяется при этом как спаривание

$$\begin{aligned}(\ ,\ )_N :& K_n^{\mathrm{top}}(K) \times K^* \longrightarrow \mu_N \\ &\alpha,\beta \mapsto (\alpha,\beta)_N = \sqrt[p^N]{\beta}^{\,\Psi_K(\alpha)-1},\end{aligned} \tag{10}$$

и обладает следующими свойствами:

1) линейность по каждому аргументу, т.е.

$$(\alpha+\alpha',\beta) = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha',\beta), \quad \alpha,\alpha' \in K_n^{\mathrm{top}}(K),$$
$$(\alpha,\beta\cdot\beta') = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta'), \quad \beta,\beta' \in K^*;$$

2) $(\{\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n\},1-\alpha_i) = 1$;

3) $(\{t_1,\dots,t_n\},\omega) = \chi(\omega) = \sqrt[p^N]{\omega}^{\,\varphi-1}$, где $t_1,\dots,t_n$ – произвольная система локальных параметров поля K, ω – p^N-примарный элемент в K и χ – характер на группе p^N-примарных элементов Ω_N (см. (2)).

Построенный таким образом символ Гильберта индуцирует, очевидно, гомоморфизм

$$\langle\ ,\dots,\ \rangle_N : K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K) \longrightarrow \mu_N, \tag{11}$$

нормированный соотношением $\langle t_1,\dots,t_n,\omega\rangle = \chi(\omega)$.

Предложение 1.2. *Отображение* (11) *совпадает с композицией символа Гильберта* $(\ ,\dots,\ )_N$*, определенного в* (3)*, и характера* χ.

Замечание 1. Это предложение показывает единственность символа Гильберта в смысле определения (3). Второе определение символа Гильберта с помощью отображения взаимности (см. (10)) дает теорему существования такого символа. В явном виде такое существование будет доказано ниже (см. теорему 2.1).

Доказательство. Проверим сперва, что

$$\chi((t_1,\dots,t_n,\beta)_N) = \langle t_1,\dots,t_n,\beta\rangle_N \tag{12}$$

для любой системы локальных параметров $t_1,\dots,t_n$ и любого элемента $\beta\in K^*$. Согласно арифметике поля K^*, любой элемент $\beta\in K^*$ можно представить в виде

$$\beta = t_1^{a_1}\dots t_n^{a_n}\theta\prod_{\substack{\overline{r}>0\\ p\nmid\overline{r}}}(1-\theta_{\overline{r}}t_1^{r_1}\dots t_n^{r_n})^{b_{\overline{r}}}\cdot\omega_\beta,$$

где $\theta\in\mathcal{R}^*$, $\theta_{\overline{r}}\in\mathcal{R}$, $\overline{r}=(r_1,\dots,r_n)$ – набор мультииндексов $b_{\overline{r}}\in\mathbb{Z}_p$, а $\omega_\beta\in\Omega_N$ – примарный элемент, соответствующий β (см. [19, 20]).

Стандартным рассуждением с применением соотношения Стейнберга получаем (см. [20])

$$\langle t_1,\dots,t_n,\beta\rangle_N = \langle t_1,\dots,t_n,\omega_\beta\rangle_N = \chi(\omega_\beta)$$

$$\chi((t_1,\dots,t_n,\beta)_N) = \chi((t_1,\dots,t_n,\omega_\beta)_N) = \chi(\omega_\beta),$$

что доказывает (12).

Равенство $\chi((\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta)_N) = \langle\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta\rangle_N$ в общем случае вытекает из того, что элемент $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta\}$ из $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$ можно представить в виде конечной суммы элементов вида $\{t_1,\dots,t_n,\beta\}$ с разными системами локальных параметров, и далее применить (12). $\square$

Если K – полное многомерное поле с совершенным последним полем вычетов k, то отображение взаимности на группе

$$V\,K_n^{\mathrm{top}}(K)=\{\mathcal{U}_K\}K_{n-1}^{\mathrm{top}}(K),$$

было описано в работе [18] и, действуя так же, как в предложении 1.2, можно показать, что построенный из этого отображения взаимности символ Гильберта совпадает с символом Гильберта из (3). Отметим при этом, что символ Гильберта (3) определен на всем множестве $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$, а не на его части $V\,K_n^{\mathrm{top}}(K)\times K^*$, как символ в работе [18].

§2. Одномерный случай

1^0. В этом параграфе K – полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики с совершенным полем вычетов характеристики p. Цель параграфа – дать явную формулу для символа Гильберта

$$(\ ,\ )_N : K_2^{\mathrm{top}}(K)\to\Omega_N. \tag{13}$$

Для этого мы построим в явном виде спаривание

$$\langle\ ,\ \rangle : K^*\times K^*\to W\big/(p^N W+\mathfrak{p}(W)),$$

образ которого при изоморфизме f^{-1} (см. (4)) дает символ Гильберта (13).

Фиксируем простой элемент π в K и элементу $\alpha=a_m\pi^m+\dots$, $a_i\in W$, $a_m\in W^*$ сопоставим ряд $\underline{\alpha}(X)=a_mX^m+\dots\in W((X))^*$.

Рассмотрим ряды

$$\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}(X)=l(\underline{\beta})\alpha^{-1}\mathrm{d}\,\underline{\alpha}-l(\underline{\alpha})\frac{1}{p}\beta^{-\Delta}\mathrm{d}\,\beta^{\Delta}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi^{(2)}_{\alpha,\beta}(X)&=\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\,\delta(l(\underline{\alpha}))\delta(l(\underline{\beta}))\\ \Phi^{(3)}_{\alpha,\beta}(X)&=v(\alpha)v(\beta)l(1+s_{N-1})X^{-1}dX\end{aligned}\right\}\text{ для }\ p=2,$$

где $\delta=1+\Delta+\Delta^2+\dots$; v – нормирование в поле K; ряд s_m, $m\geqslant 0$, определен следующим образом по формуле

$$s_m=\underline{\zeta}^{p^m}-1,\quad s=s_N.$$

Пусть

$$h=\frac{s_{N-1}^{\Delta}-s}{p^N}. \tag{15}$$

Определим ряд $V(X)$ из кольца $W\{\{X\}\}$ по формуле

$$V(X) = \begin{cases} 1/s + 1/2, & p \neq 2 \\ 1/s + 1/2 + 2^{N-1}\chi_0/s, & p = 2, \end{cases} \tag{16}$$

где χ_0 – многочлен из $W[X]$ степени, не превосходящей e (e – абсолютный индекс ветвления поля K), являющийся единственным решением сравнения

$$\chi_0^{\Delta^2} + (1 + (2^{N-1} - 1)s_{N-1})\chi_0^{\Delta} + s_{N-1}\chi_0 \equiv h \operatorname{mod}_{2m}(2, \deg 2e),$$

которое означает сравнимость по $\operatorname{mod} 2$ коэффициентов при четных степенях, больших $2e$ (см. [6, 9]).

Определим спаривание

$$\langle , \rangle_N : K^* \times K^* \to W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$$

по формуле

$$\langle \alpha, \beta \rangle_N = \operatorname{res} \Phi_{\alpha,\beta}(X) V(X), \tag{17}$$

где

$$\Phi_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \Phi^{(1)}, & \text{для} \quad p \neq 2, \\ \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)}, & \text{для} \quad p = 2, \end{cases}$$

а под $\operatorname{res} \Psi$ подразумевается коэффициент при X^{-1} $\operatorname{mod}(p^N W + \mathfrak{p}(W))$.

Теорема 2.1. 1) *Спаривание* $\langle\ ,\ \rangle$ *инвариантно относительно замены переменной* X, *а также не зависит от способа разложения элементов в ряды по простому элементу* π *с коэффициентами из* W; *тем самым спаривание* $\langle\ ,\ \rangle$ *корректно определено на множестве* $K^* \times K^*$.

2) *Спаривание* $\langle\ ,\ \rangle$ *индуцирует гомоморфизм из* $K_2^{\mathrm{top}}(K)$ *в* $W/(p^N W + \mathfrak{p}(W))$ *с нормированием*

$$\langle \pi, \omega(a) \rangle = a \tag{18}$$

для любого простого элемента π *и любого* p^N*-примарного элемента вида* $\omega(a)$.

Замечание 1. В случае $p = 2$ элемент a из кольца W^* мы всегда будем представлять в виде

$$a = 2^m \theta \zeta^{2^{N-1}c} \varepsilon,$$

где $c = 0, 1$; $\theta \in \mathcal{R}$, $\varepsilon \in 1 + 4W$. Это связано с тем, что мы должны согласовывать разложение -1 с выбором разложения корня ζ.

2° План доказательства.

1. Соотношение нормирования (18) (см. п. 3°).
2. Кососимметричность спаривания (см. п. 4°).
3. Пропорциональность спаривания на паре π^m, $-\pi^m$ (см. п. 5°).
4. Соотношение Стейнберга $\langle\alpha, 1-\alpha\rangle = 0$ для $v(\alpha) > 0$ (см. п. 6°).
5. Независимость спаривания (см. п. 7°).
6. Инвариантность спаривания (см. п. 8°).
7. Пропорциональность спаривания в общем случае (см. п. 9°).
8. Соотношение Стейнберга в общем случае (см. п. 10°).
9. Доказательство теоремы 2.1.

3°. Докажем сперва, что наше спаривание удовлетворяет нормированию (18). Мы докажем более сильное условие для любого простого p.

Предложение 2.2. *Имеет место равенство*

$$\langle\alpha, \omega(a)\rangle = v(\alpha)a.$$

Доказательство. Представим α в виде $\alpha = \pi^m\varepsilon$, где $m = v(\alpha)$, а ε – единица в K. Тогда

$$\langle\alpha, \omega(a)\rangle = v(\alpha)\langle\pi, \omega(a)\rangle + \langle\varepsilon, \omega(a)\rangle.$$

Непосредственно из определения следует:

$$\langle\pi, \omega(a)\rangle = \operatorname{res} X^{-1} l(E(a\, s(X)))V(X) = \operatorname{res} aX^{-1} = a.$$

Осталось проверить, что

$$\langle\varepsilon, \omega(a)\rangle = 0. \tag{19}$$

Из определения спаривания получаем

$$\Phi_{\varepsilon,\omega(a)}(X) = as\mathrm{d}\,\log\underline{\varepsilon} - l(\underline{\varepsilon})\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{p}\log\omega(a) +$$

$$+\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\delta(l(\underline{\varepsilon}))\cdot\delta(as).$$

Последнее слагаемое появляется лишь при $p = 2$.
Из определения ряда V следует, что

$$sV \equiv 1 \bmod \deg 1,$$

поэтому нам достаточно проверить

$$\Phi_{\varepsilon,\omega(a)}/s \equiv 0 \bmod (p^N, \deg 0). \tag{20}$$

Ясно, что

$$as\mathrm{d}\,\log \underline{\varepsilon}/s = a\mathrm{d}\,\log \underline{\varepsilon} \equiv 0 \bmod \deg 0. \tag{21}$$

Далее,

$$\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{p}\log\omega(a) = \mathrm{d}\sum_{m\geqslant 1}\frac{(as)^{\Delta^m}}{p^m} = X^{-1}\sum_{m\geqslant 1}(aX\mathrm{d}\,s)^{\Delta^m}.$$

В последнем переходе мы использовали очевидное равенство

$$\mathrm{d}\,h^{\Delta} = X^{-1}(X\mathrm{d}\,h)^{\Delta},$$

выполненное для любого ряда $h \in W((X))$. Осталось заметить, что $\mathrm{d}\,s \equiv 0 \bmod p^N$, и, следовательно

$$l(\underline{\varepsilon})\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{p}\log\omega(a) \equiv 0 \bmod p^N. \tag{22}$$

Таким образом, сравнение (20) доказано в случае $p \neq 2$. При $p = 2$ последнее слагаемое расписываем следующим образом:

$$\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\delta(l(\underline{\varepsilon}))\delta(as) =$$

$$= X^{-1}(\delta(l(\underline{\varepsilon})))^{\Delta}\left(\sum_{m\geqslant 1}\mathrm{d}\,(as)^{\Delta^m}\right) + X^{-1}(\mathrm{d}\,\delta(l(\underline{\varepsilon})))^{\Delta}\left(\sum_{m\geqslant 1}(as)^{\Delta^m}\right).$$

При этом $\mathrm{d}\,s \equiv 0 \bmod 2^N$, значит, $\mathrm{d}\,(as)^{\Delta^m} \equiv 0 \bmod 2^N$. Тем самым, первая сумма делится на 2^N. Далее, $s^{\Delta^m} \equiv s_{N+m} (\bmod 2^{N+1})$ (см. (1)), и при этом s_{N+m}/s – степенной ряд из $W[[X]]$, поэтому

$$X^{-1}(\mathrm{d}\,(\delta l(\underline{\varepsilon})))^{\Delta}\sum_{m\geqslant 1}a^{\Delta^m}s^{\Delta^m}/s \equiv$$

$$\equiv X^{-1}(\mathrm{d}\,(\delta l(\underline{\varepsilon})))^{\Delta}\sum_{m\geqslant 1}a^{\Delta^m}s_{N+m}/s \equiv 0 \bmod (2^N, \deg 0).$$

Значит,

$$\left(\mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\delta(l(\underline{\varepsilon}))\delta(as)\right)/s \equiv 0 \bmod (2^N, \deg 0). \tag{23}$$

Поэтому из сравнений (21), (22) и (23) мы получаем (20) и (19). Предложение доказано.

4°. Проверка кососимметричности спаривания проводится так же, как и в [3, §2, п. 2].

5°. Проверим пропорциональность

$$\langle \pi^m, -\pi^m \rangle_\pi = 0, \quad m \geqslant 1. \tag{24}$$

При $p \neq 2$ пропорциональность очевидна. При $p = 2$ из формулы (14) получаем

$$\Phi_{\pi^m, -\pi^m}(X) = X^{-1}(m^2 + m)l(-\underline{1}) =$$

$$= X^{-1}\frac{m^2+m}{2} \cdot 2l(1 + s_{N-1}) = X^{-1}\frac{m^2+m}{2}l(1+s),$$

так как $\langle \pi^m, -\pi^m \rangle = m\langle \pi, -1 \rangle + m^2\langle \pi, \pi \rangle$, ряд $-\underline{1} = 1 + s_{N-1}$, согласно (1), и

$$2l(1 + s_{N-1}) = l((1 + s_{N-1})^2) = l(1+s).$$

По определению ряда V, ряд $sV \equiv 1 \bmod \deg 1$, поэтому нам достаточно показать, что

$$l(1+s)/s \equiv 0 \bmod (2^N, \deg 1), \tag{25}$$

так как тогда

$$\operatorname{res} \Phi_{\pi^m, -\pi^m}(X) \cdot V(X) =$$

$$= \operatorname{res} X^{-1}\frac{m^2+m}{2}l(1+s)/s \cdot (sV) \equiv 0 \bmod 2^N. \tag{26}$$

Проверим (25). Во-первых, $\log(1+s)/s \equiv 0 \bmod \deg 1$ и, значит,

$$l(1+s)/s \equiv \left(-\frac{\Delta}{2}\log(1+s)\right)/s = \sum_{m \geqslant 1}(-1)^m \frac{s^{m\Delta}}{2m}/s \bmod \deg 1.$$

Известно, что $s_{N-1}^{\Delta} \equiv s \bmod p^N$ (см. (1)), поэтому, в нашем случае,

$$s_{N-1}^{\Delta} = s + 2^N h, \quad \text{где} \quad h \in XW[[X]].$$

С другой стороны, по определению ряда s, имеем

$$s = (1 + s_{N-1})^2 - 1 = s_{N-1}^2 + 2s_{N-1},$$

откуда

$$s^{\Delta} = (s + 2^N h)^2 + 2(s + 2^N h) = sf + 2^{N+1}g$$

при некоторых f и g из $XW[[X]]$. Значит,

$$\frac{s^{m\Delta}}{2m} = sf_1 + \frac{2^{m(N+1)}}{2m} g_1, \quad f_1, g_1 \in XW[[X]],$$

поэтому

$$\frac{s^{m\Delta}}{2m} \Big/ s \equiv 0 \bmod (2^N, \deg 1), \quad m, N \geqslant 1.$$

Отсюда получаем сравнение (25), а вместе с ним (26), и пропорциональность $\langle \pi^m, -\pi^m \rangle_\pi = 0$ доказана.

6°. Соотношение Стейнберга

$$\langle \alpha, 1-\alpha \rangle = 0, \quad v(\alpha) > 0. \tag{27}$$

В случае, когда $v(\alpha) > 0$, ряд $\Phi_{\alpha, 1-\alpha}(x)$ имеет вид

$$\Phi_{\alpha, 1-\alpha}(X) = \Phi^{(1)}_{\alpha, 1-\alpha} + \Phi^{(2)}_{\alpha, 1-\alpha},$$

так как $v(1-\alpha) = 0$. Мы будем доказывать на самом деле равенство

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\alpha) \rangle = 0, \quad v(\alpha) > 0, \tag{28}$$

где $\mathcal{E}(\alpha) = \exp\left(\alpha + \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\alpha^{p^2}}{p^2} + \dots\right)$. Исходное равенство (27) будет следовать из последнего, так как

$$1 - \alpha = \prod_{(i,p)=1} \mathcal{E}(\alpha^i)^{1/i}$$

(см. [13]). Для удобства ряд $\alpha(X)$, для которого $\alpha(\pi) = \alpha$, будем записывать просто как α. Из определения функции l получаем

$$l(\mathcal{E}(\alpha)) = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right) \frac{\alpha^{p^k}}{p^k} = \alpha + \sum_{k \geqslant 1} \frac{\alpha^{p^k} - \alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k}. \tag{29}$$

Поэтому

$$\Phi_{\alpha, \mathcal{E}(\alpha)} = \mathrm{d}\,\alpha + \left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{\alpha^{p^k} - \alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k} \alpha^{-1} \mathrm{d}\,\alpha - l(\alpha) \mathrm{d}\, \frac{\alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k} \right) +$$

$$+ \mathrm{d}\, \frac{\Delta}{2} \delta(l(\alpha)) \delta(l(\mathcal{E}(\alpha))).$$

Несложным вычислением (см. [3, предл. 2, с. 1295]) проверяется равенство

$$\frac{\alpha^{p^k}-\alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k}\alpha^{-1}\mathrm{d}\,\alpha - l(\alpha)\mathrm{d}\,\frac{\alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k} =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{\alpha^{p^k}-\alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^{2k}} - l(\alpha)\frac{\alpha^{p^{k-1}\Delta}}{p^k}\right) =: \mathrm{d}\,g_k$$

и, значит,

$$\Phi_{\alpha,\mathcal{E}(\alpha)} = \mathrm{d}\left(\alpha + \sum_{k\geqslant 1} g_k + \frac{\Delta}{2}\delta(l(\alpha))\delta(l(\mathcal{E}(\alpha)))\right). \qquad (30)$$

Лемма 2.3. *Для ряда* $h \in W\{\{X\}\}$ *имеем*

$$\operatorname{res}(\mathrm{d}\,h)V \equiv 0 \bmod p^N. \qquad (31)$$

Доказательство. Из определения ряда s следует сравнение $\mathrm{d}\,1/s \equiv 0 \bmod p^N$, а значит, $\mathrm{d}\,V \equiv 0 \bmod p^N$, откуда (31) следует непосредственно. □

Согласно этой лемме, нам достаточно оценивать ряд, стоящий в скобках в (30), по модулю ряда с целыми коэффициентами, т.е. по $\bmod W((X))$.

По определению функции l имеем

$$g_k = \alpha^{p^{k-1}\Delta}\left(\frac{\exp p^k l(\alpha)-1}{p^{2k}} - \frac{l(\alpha)}{p^k}\right) =$$

$$= \alpha^{p^{k-1}\Delta}\sum_{m\geqslant 2}\frac{p^{k(m-2)}l(\alpha)^m}{m!}. \qquad (32)$$

Несложными вычислениями можно проверить, что при $p \neq 2$ $g_k \in W((X))$. Рассмотрим теперь случай $p = 2$.

При $k = 1$:

$$g_1 \equiv \frac{\Delta}{2}(\alpha\delta(l(\alpha))) \bmod W((X)).$$

При $k \geqslant 2$:

$$g_k \equiv \frac{\Delta}{2}(\alpha^{2^{k-1}}l(\alpha)) \bmod W((X)).$$

Поэтому

$$\sum_{k\geqslant 1} g_k \equiv \frac{\Delta}{2}(\alpha\delta(l(\alpha)) + l(\alpha)\delta(\alpha^{\Delta})) \bmod W((X)).$$

Тем самым

$$\Phi_{\alpha,\mathcal{E}(\alpha)}(X) \equiv$$
$$\equiv \mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\{\alpha\delta(l(\alpha)) + l(\alpha)\delta(\alpha^{\Delta}) + \delta(l(\alpha))\delta(l(\mathcal{E}(\alpha)))\} = \mathrm{d}\,\frac{\Delta}{2}\Psi. \tag{33}$$

Из равенства (29) так же, как в преобразовании g_k (см. (32)), получаем

$$l(\mathcal{E}(\alpha)) \equiv \alpha + \delta(l(\alpha))\alpha^{\Delta} + l(\alpha)\delta(\alpha^{\Delta^2}) \bmod 2,$$

поэтому

$$\delta(l(\alpha))\delta(l(\mathcal{E}(\alpha))) =$$
$$\equiv \delta(l(\alpha))\delta(\alpha + \delta(l(\alpha))\alpha^{\Delta} + l(\alpha)\delta(\alpha^{\Delta^2})) =$$
$$= \sum_{k,m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^m} l(\alpha)^{\Delta^k} + \sum_{j,k,r\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{r+1}} l(\alpha)^{\Delta^{j+r}+\Delta^k} +$$
$$+ \sum_{j,k,r\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{j+r+2}} l(\alpha)^{\Delta^k+\Delta^r} \bmod 2$$

и, значит, ряд Ψ из (33) имеет вид:

$$\Psi \equiv \left(\sum_{k\geqslant 0} \alpha l(\alpha)^{\Delta^k} + \sum_{m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+1}} l(\alpha) + \sum_{k,m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^m} l(\alpha)^{\Delta^k}\right) +$$
$$+ \sum_{j,k,r\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{r+1}} l(\alpha)^{\Delta^{j+r}+\Delta^k} + \sum_{j,k,r\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{j+r+2}} l(\alpha)^{\Delta^k+\Delta^r}. \tag{34}$$

Легко видеть, что сумма в скобках удовлетворяет сравнению

$$(\dots) \equiv \sum_{k,m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+1}} l(\alpha)^{\Delta^{k+1}} \bmod 2. \tag{35}$$

Оставшиеся две суммы в (34) расписываем следующим образом:

$$\alpha^{\Delta} \sum_{j,k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} + \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 0\leqslant m<j}} \alpha^{\Delta^{m+2}} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} + \sum_{\substack{k\geqslant 0\\ 0\leqslant j\leqslant m}} \alpha^{\Delta^{m+2}} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} =$$

$$= \alpha^{\Delta} \sum_{j,k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} + \sum_{m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+2}} \sum_{j,k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+1}} \sum_{j,k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k}.$$

Отсюда и из (35), используя тот факт, что $\alpha^{\Delta} \equiv \alpha^2 \bmod 2$, получаем

$$\Psi \equiv \sum_{m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+1}} \left(\sum_{k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^{k+1}} + \sum_{j=k\geqslant 0} l(\alpha)^{\Delta^{k+1}} + \sum_{\substack{j,k\geqslant 0\\ j\neq k}} l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} \right) \equiv$$

$$\equiv \sum_{m\geqslant 0} \alpha^{\Delta^{m+1}} \sum_{0\leqslant k\leqslant j} 2l(\alpha)^{\Delta^j+\Delta^k} \equiv 0 \bmod 2.$$

Поэтому ряд

$$\frac{\Delta}{2}\Psi \equiv 0 \bmod W((X))$$

и мы, воспользовавшись леммой 2.3, получаем

$$\operatorname{res} \Phi_{\alpha,\mathcal{E}(\alpha)}(X)V(X) \equiv 0 \bmod (2^N W(X) + \mathfrak{p}(W)),$$

что дает нам равенство (28) и соотношение Стейнберга (27). Точно таким же способом получаем

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\alpha^i) \rangle = 0, \quad i \text{ – нечетное}, \quad v(\alpha) > 0. \tag{36}$$

7°. Независимость спаривания. Проверим сперва независимость на паре π, ε, где ε – единица поля K (не обязательно главная) при $p \neq 2$. Нам надо проверить следующее условие: пусть $\varepsilon(X) \in W[[X]]^*$ и $\varepsilon(\pi) = 1$, тогда

$$\langle X, \varepsilon(X) \rangle \equiv 0 \bmod (p^N W + \mathfrak{p}(W)). \tag{37}$$

В работе [3, лемма 6] было доказано, что

$$\varepsilon(\pi) = 1 \Longleftrightarrow \varepsilon(X) = 1 - u(X)\psi(X),$$

где $u(X) = s(X)/s_{N-1}(X)$ (см. Обозначения) и $\psi(X) \in W[[X]]$. Заметим, что $\psi(0) = 0 \Longleftrightarrow \varepsilon(X) \equiv 1 \bmod X$.

Мы будем считать, что свободный член ряда $\varepsilon(X)$ сравним с 1 по $\operatorname{mod} p$, так как иначе он отличается от такого элемента на представитель Тейхмюллера $\theta \in \mathcal{R}^*$, и при этом

$$\langle X, \theta\rangle = \langle X, \theta_1^{p^N}\rangle \equiv 0 \operatorname{mod} p^N, \quad \theta_1 \in \mathcal{R}^*.$$

Для доказательства сравнения (37) нам потребуются следующие сравнения (см. [3, лемма 7; 6])

$$\frac{u^{m\Delta}}{pm}(1 - p\Delta)(V) \equiv 0 \operatorname{mod}(p^N, \deg 1), \quad m \geqslant 1. \tag{38}$$

Далее, по определению спаривания, получаем

$$\langle X, \varepsilon(X)\rangle = \operatorname{res} X^{-1} l(1 - u\psi)V =$$

$$= -\operatorname{res} X^{-1} \sum_{m \geqslant 1} \left(\frac{(u\psi)^m}{m} - \frac{(u\psi)^{m\Delta}}{pm} \right) V. \tag{39}$$

Заметим, что для $\varphi \in W\{\{X\}\}$ имеет место сравнение

$$\operatorname{res} X^{-1} \varphi(X) \equiv \operatorname{res} X^{-1} \varphi^{\Delta}(X) \operatorname{mod} \mathfrak{p}(W).$$

Используя его, перепишем (39) в виде

$$\langle X, \varepsilon(X)\rangle = \operatorname{res} X^{-1} \sum_{m \geqslant 1} \psi^{m\Delta} \frac{u^{m\Delta}}{pm}(1 - p\Delta)(V).$$

Осталось воспользоваться сравнениями (38), чтобы получить (37), и независимость $\langle \pi, \varepsilon\rangle$ доказана. Независимость спаривания на произвольной паре при $p \neq 2$ проверяется так же, как в [9, гл. VII, Пред. 2.2]. Для случая $p = 2$ см. [9, гл. VII', Upraß. 5].

Замечание 3. Если требовать, чтобы разложения элементов α, β в спаривании $\langle\ ,\ \rangle$ имели первый коэффициент из системы Тейхмюллера, то ряд V можно упростить, убрав $1/2$, и использовать сравнения (38) лишь по $\operatorname{mod}(p^N, \deg 0)$. Таким образом, в этом случае

$$V = \begin{cases} 1/s & \text{для} \quad p \neq 2, \\ 1/s + 2^{N-1}\chi_0/s, & \text{для} \quad p = 2. \end{cases}$$

Предложение 2.4. *Если* $a, b \in W^*$, *то* $\langle a, b\rangle = 0$.

Доказательство. Согласно независимости спаривания мы можем в качестве рядов $\underline{a}(X)$, $\underline{b}(X) \in W((X))^*$, для которых $\underline{a}(\pi) = a$, $\underline{b}(\pi) = b$ взять просто элементы a и b. Тогда в формуле (14) для ряда $\Phi_{a,b}(X)$ все производные будут равны 0, и поэтому $\Phi_{a,b}(X) = 0$, т.е. $\langle a, b\rangle = 0$. □

8°. Инвариантность спаривания. Рассмотрим сперва случай пары π, ε, где ε – главная единица поля K. Нам надо проверить, что при замене π на другой простой элемент τ, такой, что $\pi = g(\tau) = \tau \cdot \eta$, где η – единица из K (не обязательно главная), или что то же самое, переменной X на ряд $g(Y)$, значение спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ не меняется, т.е.

$$\langle \pi, \varepsilon\rangle_\pi = \langle g(\tau), \varepsilon(g(\tau))\rangle_\tau. \tag{40}$$

Из арифметики поля K следует, что любую главную единицу можно представить в виде

$$\varepsilon = \prod_{\substack{i-\ \text{нечетное} \\ \theta_i \in \mathcal{R}}} \mathcal{E}(\theta_i \pi^i) \cdot \omega(a_\varepsilon) \tag{41}$$

(см. [3, §6, (56)]; [4, п. 11°, (26)]). Воспользуемся уже доказанной в п. 7° независимостью спаривания, и разложим ε в виде (41). По доказанному в п. 6° соотношению Стейнберга имеем при нечетном i (см. (36)):

$$\langle \pi, \mathcal{E}(\theta_i \pi^i)\rangle_\pi = \frac{1}{i}\langle \theta_i \pi^i, \mathcal{E}(\theta_i \pi^i)\rangle_\pi = 0,$$

$$\langle g(\tau), \mathcal{E}(\theta_i g(\tau)^i)\rangle_\tau = \frac{1}{i}\langle \theta_i g(\tau)^i, \mathcal{E}(\theta_i g(\tau)^i)\rangle_\tau = 0.$$

Поэтому

$$\langle \pi, \varepsilon\rangle_\pi = \langle \pi, \omega(a_\varepsilon)\rangle_\pi = a_\varepsilon$$

$$\langle g(\tau), \varepsilon(g(\tau))\rangle_\tau = \langle g(\tau), \omega(a_\varepsilon)_\tau\rangle_\tau.$$

По предложению 1 имеет место сравнение

$$\omega(a_\varepsilon)_\pi \equiv \omega(a_\varepsilon)_\tau \bmod K^{*p^N}.$$

Поэтому, учитывая предложение 2.2, получаем

$$\langle g(\tau), \omega(a_\varepsilon)\rangle_\tau = \langle \tau, \omega(a_\varepsilon)\rangle_\tau + \langle \eta, \omega(a_\varepsilon)\rangle_\tau = a_\varepsilon,$$

и инвариантность на паре π, ε доказана.

Проверим теперь случай пары π, a, где $a \in W^*$. Пусть $\pi = g(\tau)$, тогда

$$\langle \pi, a\rangle_\pi = \operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{a}) \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X} V(X)$$

$$\langle g(\tau), a\rangle_\tau = \operatorname{res}_Y l(\underline{a}(g)) g^{-1} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}Y} V(g(Y)) = \operatorname{res}_X X^{-1} l(\underline{a}) \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}X} V(X).$$

Элемент $l(\underline{a}) \in W^*$, так как, согласно независимости спаривания, в качестве ряда $\underline{a}(X)$, $\underline{a}(\pi) = a$, можем выбрать просто элемент a. Поэтому

$$\langle \pi, a\rangle_\pi = \langle \pi, a\rangle_\tau. \tag{42}$$

Если теперь $\beta = \pi^m \varepsilon$, ε – единица в K, то

$$\langle \pi, \beta\rangle_\pi = m\langle \pi, \pi\rangle_\pi + \langle \pi, \varepsilon\rangle_\pi = m\langle \pi, -1\rangle_\pi + \langle \pi, \varepsilon\rangle_\pi = \langle \pi, (-1)^m \varepsilon\rangle_\pi$$

(мы воспользовались пропорциональностью (24)). Далее, используя (40) и (42), получаем

$$\langle \pi, \beta\rangle_\pi = \langle \pi, \beta\rangle_\tau. \tag{43}$$

Инвариантность спаривания в общем случае. Пусть π и τ – простые элементы в K, $\pi = h(\tau)$, где $h(Z) \in W[|Z|]$. Простому π соответствует переменная X, а τ – переменная Z, т.о. $X = h(Z)$ и мы должны проверить равенство

$$\langle \alpha(X), \beta(X)\rangle_X = \langle \alpha(h(Z)), \beta(h(Z))\rangle_Z \tag{44}$$

для любых $\alpha(X)$, $\beta(X) \in W((X))^*$.

Пусть сперва $\deg \alpha(X) = 1$, тогда $\pi' = \alpha(\pi)$ – простой элемент в K, и пусть Y – переменная, соответствующая π', т.о. $Y = \alpha(X)$. Из инвариантности (43) получаем

$$\langle \alpha(X), \beta(X)\rangle_X = \langle Y, \beta(\alpha^{-1}(Y))\rangle_Y. \tag{45}$$

Элементы π' и τ – простые элементы в K, значит, $\pi' = g(\tau)$, где $g(Z) \in W[|Z|]$, $\deg g = 1$. Опять используем инвариантность (43) и получаем

$$\langle \alpha(X), \beta(X)\rangle_X = \langle g(Z), \beta(\alpha^{-1}(g(Z)))\rangle_Z.$$

Ясно, что $\alpha(h(Z))\big|_{Z=\tau} = \alpha(\pi) = \pi'$, $g(Z)\big|_{Z=\tau} = \pi'$, и, кроме того,

$$\beta(h(Z))\big|_{Z=\tau} = \beta(\pi),$$

$$\beta(\alpha^{-1}(g(Z))\big|_{Z=\tau} = \beta(\alpha^{-1}(\tau)) = \beta(\pi).$$

Поэтому свойство независимости дает равенство

$$\langle \alpha(X), \beta(X) \rangle_X = \langle g(Z), \beta(\alpha^{-1}(g(Z)) \rangle_Z = \langle \alpha(h(Z)), \beta(h(Z)) \rangle_Z,$$

т.е. равенство (44) для всех α, таких что $\deg \alpha = 1$.

Если $\deg \alpha(X) = m$, то напишем

$$\alpha(X) = X^{m-1}\alpha'(X), \quad \text{где} \quad \deg \alpha'(X) = 1,$$

тогда, по только что доказанному, получим

$$\langle \alpha(X), \beta(X) \rangle_X = (m-1)\langle X, \beta(X) \rangle_X + \langle \alpha'(X), \beta(X) \rangle_X =$$

$$= (m-1)\langle h(Z), \beta(h(Z)) \rangle_Z +$$

$$+ \langle \alpha'(h(Z)), \beta(h(Z)) \rangle_Z = \langle \alpha(h(Z)), \beta(h(Z)) \rangle_Z,$$

и инвариантность полностью доказана.

9°. Пропорциональность спаривания в общем случае. Нам надо проверить, что для любого $\alpha \in K^*$

$$\langle \alpha, -\alpha \rangle_\pi = 0,$$

или, представляя α в виде ряда $\alpha(X) \in W((X))^*$, $\alpha(\pi) = \alpha$,

$$\langle \alpha(X), -\alpha(X) \rangle_X = 0.$$

Пусть сперва $\deg \alpha(X) = 1$, тогда если $Y = \alpha(X)$, то используя инвариантность и пропорциональность (24), получаем

$$\langle \alpha(X), -\alpha(X) \rangle_X = \langle Y, -Y \rangle_Y = 0. \tag{46}$$

Пусть $\alpha(X) = X^{m-1}\alpha'(X)$, где $m = \deg \alpha(X)$, $\deg \alpha'(X) = 1$, тогда

$$\langle \alpha(X), -\alpha(X) \rangle_X = \langle X^{m-1}, -X^{m-1} \rangle_X +$$

$$+ \langle X^{m-1}, \alpha'(X) \rangle_X + \langle \alpha'(X), X^{m-1} \rangle_X +$$

$$+ \langle \alpha'(X), -\alpha'(X) \rangle_X = \langle X^{m-1}, -X^{m-1} \rangle_X + \langle \alpha'(X), -\alpha'(X) \rangle_X = 0,$$

согласно (46), и пропорциональность доказана.

10°. Соотношение Стейнберга. Общий случай. Мы уже доказали, что $\langle\alpha, 1-\alpha\rangle = 0$, если $v(\alpha) > 0$ (см. (27)).

Пусть $v(\alpha) < 0$, тогда, используя пропорциональность $\langle\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\rangle = 0$, получаем

$$\langle\alpha, 1-\alpha\rangle = -\langle\alpha^{-1}, 1-\alpha\rangle - \langle\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\rangle =$$

$$= -\langle\alpha^{-1}, (1-\alpha)(-\alpha^{-1})\rangle = -\langle\alpha^{-1}, 1-\alpha^{-1}\rangle = 0.$$

Остался случай $v(\alpha) = v(1-\alpha) = 0$. В этом случае $\alpha = a\cdot\beta$, где $a \in W^*$, $a \neq 1$, β – главная единица, т.е. $v(1-\beta) > 0$.

Рассмотрим два элемента $\alpha_1 = \frac{a(1-\beta)}{a-1}$ и $\alpha_2 = \frac{(1-\beta)}{1-a\beta}$. Легко видеть, что $v(\alpha_1) > 0$ и $v(\alpha_2) > 0$. Тогда, из (27) получаем

$$\langle\alpha_1, 1-\alpha_1\rangle = \left\langle \frac{a(1-\beta)}{a-1}, -\frac{1-a\beta}{a-1} \right\rangle = 0,$$

$$\langle\alpha_2, 1-\alpha_2\rangle = \left\langle \frac{(1-\beta)}{1-a\beta}, -\frac{(1-a)\beta}{1-a\beta} \right\rangle = 0.$$

Используя первое равенство, получаем

$$0 = \left\langle \frac{a(1-\beta)}{a-1}, -\frac{1-a\beta}{a-1} \right\rangle = \langle 1-\beta, -(1-a\beta)\rangle -$$

$$-\left\langle \frac{a-1}{a}, 1-a\beta \right\rangle - \langle 1-\beta, a-1\rangle + \langle a-1, -(a-1)\rangle - \langle a, 1-a\rangle.$$

Последние два слагаемых равны нулю, согласно предложению 2.4, поэтому

$$\langle 1-\beta, -(1-a\beta)\rangle - \left\langle \frac{a-1}{a}, 1-a\beta \right\rangle - \langle 1-\beta, a-1\rangle = 0. \qquad (47)$$

Далее,

$$0 = \left\langle \frac{1-\beta}{1-a\beta}, \frac{(1-a)\beta}{1-a\beta} \right\rangle = \langle 1-\beta, 1-a\rangle + \left\langle \frac{1-a}{a}, 1-a\beta \right\rangle -$$

$$-\langle 1-\beta, 1-a\beta\rangle + \langle 1-a\beta, 1-a\beta\rangle + \langle a\beta, 1-a\beta\rangle =$$

$$= \langle 1-\beta, a-1\rangle + \left\langle \frac{a-1}{a}, 1-a\beta \right\rangle - \langle 1-\beta, -(1-a\beta)\rangle +$$

$$+\langle 1-\beta, -1\rangle - \langle 1-\beta, -1\rangle + \langle -1, 1-a\beta\rangle +$$

$$+\langle 1-a\beta,-(1-a\beta)\rangle+\langle 1-a\beta,-1\rangle+\langle a\beta,1-a\beta\rangle.$$

Поэтому

$$\langle a\beta,1-a\beta\rangle+\langle 1-\beta,a-1\rangle+\left\langle\frac{a-1}{a},1-a\beta\right\rangle-\langle 1-\beta,-(1-a\beta)\rangle=0.$$

Складывая последнее равенство с (47), получаем

$$\langle\alpha,1-\alpha\rangle=\langle a\beta,1-a\beta\rangle=0,$$

и соотношение Стейнберга полностью доказано.

11°. Доказательство теоремы 2.1. Инвариантность и независимость спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ (см. п. 10°; 9°) означают, что спаривание корректно задано. Билинейность и соотношение Стейнберга (см. п. 10°) означают, что спаривание $\langle\ ,\ \rangle$ задает гомоморфизм на группе $K_2^{\text{top}}(K)$. Нормирование (18) этого гомоморфизма проверено в п. 3. Теорема доказана.

Следствие 3. *Образ спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ при изоморфизме f^{-1} (см. (4)) является символом Гильберта на поле K, т.е.*

$$f^{-1}(\langle\ ,\ \rangle_N)=(\ ,\ )_N$$

и, тем самым, задает последний в явном виде.

12°. Конструктивная теория полей классов, для $p=2$.

В этом пункте мы покажем, как спаривание $\langle\ ,\ \rangle$ позволяет построить теорию полей классов для Куммеровых расширений полного дискретно нормированного поля K с конечным полем вычетов k при $p=2$ (для $p>2$ такая теория была построена в работе [20, §7], см. также [9, гл. VII, теорема 3.5]).

Пусть π – простой элемент в K и $\omega_*=\omega(a)$ – фиксированный примарный элемент из Ω_N, для которого $\operatorname{tr} a\equiv 1 \bmod p^N$ ($\operatorname{tr}=\operatorname{tr}_{W/\mathbb{Z}_p}$). Для любого элемента $\alpha\in K^*$ имеет место разложение Шафаревича, однозначно определенное по модулю p^N-ых степеней:

$$\alpha=\pi^m\theta\varepsilon\omega_*^r,\quad m\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant r<p^N,$$
$$\theta\in\mathcal{R},\quad \varepsilon=E(w(X))\big|_{X=\pi},$$

где $w(X)\in W[X]$ – многочлен, степени меньшей $pe/(p-1)$, все коэффициенты которого при степенях, кратных p, делятся на p^N (см. [9, гл. XI, §5]).

Пусть в случае $p = 2$:

$$-1 = \varepsilon \cdot \omega_*^{2^{N-1} c_\pi},$$

где $c_\pi = 0, 1$. Тогда, так же, как в [9, гл. VII, (3.4)], проверяется следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть* $\alpha = \pi^m \theta \varepsilon \omega_*^r$, $\beta = \pi^k \theta' \varepsilon' \omega_*^t$, *где* $\theta, \theta' \in \mathcal{R}$. *Тогда*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\pi = 1 \iff mt - kr + 2^{N-1} c_\pi mk \equiv 0 \bmod 2^N \iff$$

$$\iff \alpha \in \operatorname{Nm} K\left(\sqrt[2^N]{\beta}\right)$$

(здесь $\operatorname{Nm} L = N_{L/K} L^*$*).*

Используя эту лемму так же, как в теореме 3.4, гл. VII, [9], проверяем норменное свойство спаривания $\langle\ ,\ \rangle$.

Предложение 2.6. *Пусть* $p = 2$. *Тогда*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\pi = 1 \iff \alpha \in \operatorname{Nm} K\left(\sqrt[2^N]{\beta}\right) \iff \beta \in \operatorname{Nm} K\left(\sqrt[2^N]{\alpha}\right).$$

Практически так же, как и в предложении 3.5, гл. VII, [9] проверяется невырожденность спаривания $\langle\ ,\ \rangle$:

Предложение 2.7. *Пусть* $\alpha \in K^*$, $\alpha \notin K^{*p}$. *Тогда существует элемент* $\beta \in K^*$ *такой, что* $\langle \alpha, \beta \rangle = \omega_*$.

Используя эти два предложения и метод доказательства теоремы 5.2, гл. IV, [9], получаем основное утверждение.

Теорема 2.8. *Пусть* K *– как в начале пункта,* $p \geqslant 2$. *Пусть* A *– подгруппа в* K^* *такая, что* $K^{*p^N} \subset A$. *Пусть* $B = A^\perp$ *– ортогональное дополнение относительно спаривания* $\langle\ ,\ \rangle$. *Тогда* $A = \operatorname{Nm}_{L/K} L^*$, *где* $L = K\left(\sqrt[p^N]{B}\right)$ *и* $B^\perp = A$ *(для нечетного* p *см.* [3] *и* [9, *гл.* VII]*).*

§3. Многомерное полное поле

В этом параграфе мы формулируем основные результаты и даем набросок доказательства для спаривания Гильберта в многомерном полном поле.

Пусть K – многомерное полное поле, т.е. последовательность полей $k = K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)} = K$, где k – совершенное поле характеристики $p > 0$; $K^{(i)}$ – полное дискретно нормированное поле такое, что $K^{(i-1)}$ – поле вычетов поля $K^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Предполагаем, что $\operatorname{char} K = \operatorname{char} K^{(n-1)} = \ldots = \operatorname{char} K^{(s)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(s-1)} = p > 0$.

1°. Пусть K – разнохарактеристическое n-мерное поле, т.е. $s = n$, $\operatorname{char} K^{(n-1)} = p$. Построим в этом случае в явном виде отображение

$$\langle\ ,\ldots,\ \rangle : K^{*(n+1)} \longrightarrow W/(p^N W + \mathfrak{p}(W)).$$

Для элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ из K^* зададим ряды

$$\Phi^{(1)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n-i+1} l(\underline{\alpha}_i) \times$$

$$\times \underline{\alpha}_1^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}_{i-1}^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{i-1} \wedge \frac{1}{p} \alpha_{i+1}^{-\Delta} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{i+1}^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \frac{1}{p} \underline{\alpha}_{n+1}^{-\Delta} \mathrm{d}\alpha_{n+1}^{\Delta},$$

$$\Phi^{(2)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{n-j+1} \underline{\alpha}_1^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}_{i-1}^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{i-1} \wedge$$

$$\wedge \mathrm{d}\nu(\alpha_i, \alpha_j) \wedge \underline{\alpha}_{i+1}^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{i+1} \wedge \ldots \wedge \underline{\alpha}_{j-1}^{-1} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{j-1} \wedge$$

$$\wedge \frac{1}{p} \underline{\alpha}_{j+1}^{-\Delta} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{j+1}^{\Delta} \wedge \ldots \wedge \frac{1}{p} \underline{\alpha}_{n+1}^{-\Delta} \mathrm{d}\underline{\alpha}_{n+1}^{\Delta},$$

где

$$l(\underline{\alpha}) = \frac{1}{p} \log \underline{\alpha}^p / \underline{\alpha}^{\Delta},$$

$$\nu(\alpha, \beta) = \frac{\Delta}{2} \delta(l(\underline{\alpha})) \delta(l(\underline{\beta})).$$

Ряд $\Phi^{(3)}$ определим следующим образом:

$$\Phi^{(3)}(t_{r_1}, \ldots, t_{r_m}, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{n+1}) = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$

если $r_1 > r_2 > \ldots > r_m$ и ε_i – главные единицы поля K. Если в наборе $r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_m$ есть одинаковые индексы и $u_1 > u_2 > \ldots > u_k$ – наибольшее подмножество в $\{r_1, \ldots, r_m\}$ с попарно различными индексами, то

$$\Phi^{(3)}(t_{r_1}, \ldots, t_{r_m}, \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{n+1}) =$$

$$= (\Phi^{(1)} + \Phi^{(2)})(t_{u_1}, t_{u_2}, \ldots, t_{u_k}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1,}_{m-k\geqslant 1} \varepsilon_{m+1}, \ldots, \varepsilon_{n+1}).$$

В общем случае $\Phi^{(3)}$ определяется по полилинейности и кососимметричности $\langle\ , \ldots,\ \rangle$.

Пусть

$$\Phi = \begin{cases} \Phi^{(1)}, & p \neq 2 \\ \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \Phi^{(3)}, & p = 2. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{O} = W\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}$ и χ_0 – многочлен из кольца $\mathcal{O}[X]$ степени, меньшей e, ($e = v(p)$ – абсолютный индекс ветвления поля K относительно одномерного нормирования v), однозначно определенный сравнением

$$\chi_0^{\Delta^2} + (1 + (2^{N-1} - 1)s_{N-1})\chi_0^{\Delta} + s_{N-1}\chi_0 \equiv h \bmod{}_{2m}(2, \deg 2e).$$

Положим

$$V = \begin{cases} 1/s + 1/2, & p \neq 2 \\ 1/s + 1/2 + 2^{N-1}\chi_0/s, & p = 2. \end{cases}$$

Тогда для $\alpha_i \in K^*$ зададим отображение

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle = \operatorname{res}_{t_1, \ldots, t_n} \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})V. \tag{48}$$

Теорема 3.1. 1) *Отображение $\langle\ , \ldots,\ \rangle$ корректно определено, т.е. оно инвариантно относительно выбора системы локальных параметров и независимо относительно разложения элементов в ряды по этим локальным параметрам.*

2) *Отображение $\langle\ , \ldots,\ \rangle$ индуцирует гомоморфизм из топологической K-группы $K_{n+1}^{\mathrm{top}}(K)$.*

3) *Отображение $\langle\ , \ldots,\ \rangle$ полилинейно, пропорционально, т.е. $\langle \ldots, \alpha_i, \ldots, -\alpha_i, \ldots \rangle = 0$, и удовлетворяет соотношению Стейнберга*

$$\langle \ldots \alpha, 1 - \alpha, \ldots \rangle = 0.$$

4) *Отображение $\langle\ , \ldots,\ \rangle$ нормировано соотношением*

$$\langle t_1, \ldots, t_n, \omega(a) \rangle = a,$$

где $\omega(a) \in \Omega_N$ – примарный элемент в K.

2°. Определим теперь спаривание $\langle\ ,\ldots,\ \rangle$ для полного n-мерного поля K смешанной характеристики, т.е. $\operatorname{char} K = \ldots = \operatorname{char} K^{(s)} = 0$, $\operatorname{char} K^{(s-1)} = p > 0$, $s \geqslant 1$. Заметим, что поле $K^{(s)}$ является полным s-мерным разнохарактеристическим полем, так как $\operatorname{char} K^{(s)} = 0$, $\operatorname{char} \overline{K^{(s)}} = \operatorname{char} K^{(s-1)} = p$. Очевидно, что

$$K^*/K^{*p^N} \cong (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^{(n-s)} \times (K^{(s)*}/K^{(s)p^N})$$

и локальные параметры $t_{s+1}, t_{s+2}, \ldots, t_{n-1}, \pi$ вместе с элементами группы $K^{(s)*}$ порождают K^*/K^{*p^N}. Любой элемент α поля K представим в виде ряда Лорана

$$a = at_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots t_{n-1}^{i_{n-1}} \pi^{i_n} + \ldots,$$

с коэффициентами из поля $K^{(s)}$, при этом a определен однозначно выбором локальных параметров $t_{s+1}, \ldots, t_{n-1}, \pi$ и поэтому получаем (неканонический) гомоморфизм

$$\begin{aligned} \tau : K^* &\longrightarrow K^{(s)*} \\ \alpha &\mapsto \tau(\alpha) = a. \end{aligned}$$

Пусть $I = (i_1, \ldots, i_{n-s})$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{n-s} \leqslant n+1$ – некоторый набор индексов. Для элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ из K^* зададим определитель

$$\mathrm{D}_I = \begin{vmatrix} v_{s+1}(\alpha_{i_1}), \ldots, v_n(\alpha_{i_1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{s+1}(\alpha_{i_{n-s}}), \ldots, v_n(\alpha_{i_{n-s}}) \end{vmatrix}.$$

Зададим отображение

$$\langle\ ,\ldots,\ \rangle_K : K^{*(n+1)} \to W/p^N W + \mathfrak{p}(W)$$

по формуле

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \rangle_K = \\ = (-1)^{\frac{(n-s)(n+s+1)}{2}} \sum_I (-1)^{i_1 + \cdots + i_{n-s}} \mathrm{D}_I \langle \tau(\alpha_{j_1}), \ldots, \tau(\alpha_{j_{s+1}}) \rangle_{K^{(s)}},$$

где $\{i_1, \ldots, i_{n-s}\} \cup \{j_1, \ldots, j_{s+1}\} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Теорема 3.2. *Для спаривания $\langle\ ,\ldots,\ \rangle_K$ имеют место все утверждения теоремы* 3.1.

Теорема 3.3. *Образ отображения* $\langle\ ,\ldots,\ \rangle_K$ *на множестве* $K^{*(n+1)}$ *при изоморфизме* f^{-1} *(см. (4)) совпадает с символом Гильберта*

$$f^{-1}(\langle,\ldots,\rangle_K) = (\ ,\ldots,\ ),$$

и тем самым задает последний в явном виде.

Доказательство теоремы 3.1 проводится по схеме, аналогичной схеме доказательства теоремы 2.1. Теоремы 3.2 и 3.3 выводятся из теоремы 3.1 аналогично тому, как это было сделано в работе [2, §2] для случая $p \neq 2$. Доказательства будут приведены во второй части работы.

Литература

1. С. В. Востоков, *Спаривание на K-группах многомерных полных полей.* Труды С.-Петерб. Мат. Общ., **3** (1994), 140–184; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **165** (1995), 111–148.
2. С. В. Востоков, *Спаривание Гильберта в полном многомерном поле.* Труды МИАН им. В. А. Стеклова, **208** (1995), 80–92; Engl. transl. in Proc. of the Steklov Institute of Math., **208** (1995), 72–83.
3. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **42**, вып. 6 (1978), 1287–1320.
4. С. В. Востоков, *Символ Гильберта в дискретно нормированном поле.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **94** (1979), 50–69; Engl. transl. in J. Sov. Math., **19**, No. 1 (1982), 1006–1019.
5. H. Brückner, *Hilbertsymbole zum Exponenten* p^n *und Pfaffische Formen.* Hamburg, 1979, 78s.
6. G. Henniart, *Sur les lois de recipocité explicites. I.* J. reine und angew. Math. **329** (1981), 172–203.
7. С. В. Востоков, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тэйта I.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **114** (1982), 77–95; Engl transl. in J. Sov. Math., **27**, No. 4 (1984), 2885–2901.
8. С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, *Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тэйта II.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **132** (1983), 85–96; Engl. transl. in J. Sov. Math., **30**, No. 1 (1985), 1854–1862.
9. I. Fesenko, S. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions: a constructive approach.* AMS, Providence, RI (1993).
10. E. Witt, *Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad* p^n*. Struktur diskret bewerteter perfekten Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik p.* J. reine und angew. Math., Bd. **176** (1937), 126–140.
11. H. L. Schmid, *Über das Reziprozitätsgesetz in relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörpern mit endlichem Konstantenkörper.* Math. Zeitschrift Bd. **40** (1935), 94–109.
12. O. Teichmüller, *Zerfallende zyklische p-Algebren.* J. reine und angew. Math., Bd. **176** (1937), 157–160.

13. H. Hasse, *Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler $\mathfrak{p}$ von p.* J. reine und angew. Math., Bd. **176** (1936), 174–183.
14. А. Н. Паршин, *Локальная теория полей классов.* Труды МИАН, **165** (1984), 143–170.
15. K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups, I.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. Math., **26** (1979), 303–376; *II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I. A Math., **27** (1980), 603–683.
16. И. Жуков, *Структурная теорема для полных полей.* Труды С.-Петерб. Мат. Общ., **3** (1994), 215–234; Engl. transl. in Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **165** (1995).
17. И. Жуков, А. Мадунц, *Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия.* Труды С.-Петерб. Мат. Общ., **3** (1994), 4–46; Engl. transl. in Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **165** (1995).
18. I. Fesenko, *Abelian local p-class field theory.* Math. Ann., **301** (1995), 561–586.
19. С. В. Востоков, И. Жуков, И. Фесенко, *К теории многомерных полных полей. Методы и конструкции.* Алгебра и анализ, **2**, No. 4 (1990), 91–118; Engl. transl. in Leningrad Math. J., **2**, No. 4 (1991), 775–800.
20. С. В. Востоков, *Явная конструкция теории полей классов для многомерных локальных полей.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **49**, вып. 2 (1985), 283–308; Engl. transl. in Math. USSR–Izv., **26**, No. 2 (1986), 263–288.
21. А. Паршин, *К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты.* Изв. АН СССР. Сер. мат., **40** (1976), 736–773; Engl. transl. in Math. USSR–Izv., **10** (1976).
22. И. Б. Фесенко, *Локальная теория полей классов: случай совершенного поля вычетов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **57**, No. 4 (1993), 79–91.
23. А. Мадунц, *О сходимости рядов над локальными полями.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **198** (1991), 28–30.
24. А. Мадунц, *О сходимости формальных сумм рядов над двумерными полными полями.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **227** (1995), 89–92.
25. M. Kneser, *Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von I. R. Schafarevič.* Math. Nachrichten, Bd. **6** (1951), 89–96.

Beliaeva T. B., Vostokov S. B. Hilbert symbol in a complete multidimensional field for an arbitrary prime number. Part I.

In the first part of this article we discuss two different definitions of Hilbert symbol and prove their equivalence.

The second part is devoted to the detailed consideration of the one-dimensional case for an arbitrary prime number p (odd as well as even).

At the end of the article we give the explicit formulas in the general case of a multidimensional local field for the both different and mixed characteristic cases for an arbitrary prime number.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail sergei@vostokov.usr.pu.ru

Поступило 25 апреля 2001 г.