Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

Р. А. Шарипов

НЬЮТОНОВСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ НОРМАЛЬНОЕ РАЗДУТИЕ ТОЧЕК

В. А. Залгаллеру к 80-летию

В работе реализуется идея А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко, предложивших рассмотреть конструкцию нормального сдвига вдоль траекторий ньютоновской динамической системы для предельно сингулярной начальной гиперповерхности, схлопнувшейся в одну точку. В результате удается определить новый класс ньютоновских динамических систем – класс систем, допускающих нормальное раздутие точек, а также описать этот класс в терминах дифференциальных уравнений нормальности.

§1. Введение

Пусть S – гиперповерхность в римановом многообразии M. Один из способов деформации гиперповерхности S состоит в сдвиге образующих ее точек вдоль траекторий некоторой ньютоновской динамической системы. Такая ситуация возникает, например, при описании распространении электромагнитной волны (света) в неоднородной среде в пределе геометрической оптики. Гиперповерхность S моделирует фронт волны (множество точек с одинаковой фазой), а траектории сдвига изображают лучи света. Динамика точек многообразия M в силу ньютоновской динамической системы в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ на M задается системой из n дифференциальных уравнений

$$\ddot{x}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, \dot{x}^i\, \dot{x}^j = F^k(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n); \qquad k = 1, \ldots, n, \quad (1)$$

где $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь Γ^k_{ij} – компоненты метрической связности для базовой метрики $\mathbf{g}$ многообразия M. Величины F^k – это

Работа поддержана грантами РФФИ (No. 00-01-00068, рук. Я. Т. Султанаев) и АНРБ (рук. проекта Н. М. Асадуллин)..

компоненты вектора силы $\mathbf{F}$, определяющие силовое поле динамической системы (1). Они играют роль возмущающего фактора, из-за которого траектории системы (1) отличаются от траекторий геодезического потока метрики $\mathbf{g}$.

Зададим в каждой точке $p \in S$ вектор начальной скорости $\mathbf{v}(p)$ и определим траектории, исходящие из точек S, поставив следующую задачу Коши для уравнений (1):

$$x^k\big|_{t=0} = x^k(p), \qquad \dot{x}^k\big|_{t=0} = v^k(p); \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь $v^k(p)$ – компоненты вектора $\mathbf{v}(p)$ в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$. Сместившись за время t вдоль траекторий, определенных начальными данными (2), точки гиперповерхности S сформируют новую гиперповерхность S_t. В результате получается семейство гиперповерхностей S_t и семейство отображений сдвига $f_t\colon S \to S_t$, которые при достаточно малых значениях параметра t являются локальными диффеоморфизмами. Все это семейство отображений принято называть *конструкцией сдвига* или просто *сдвигом* гиперповерхности S вдоль траекторий динамической системы (1).

Определение 1.1. Сдвиг $f_t\colon S \to S_t$ гиперповерхности S вдоль траекторий ньютоновской динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$ называется *нормальным сдвигом*, если гиперповерхности S_t ортогональны траекториям сдвига.

Для получения нормального сдвига нужно, как минимум, выбрать начальные скорости $\mathbf{v}(p)$ ортогональными начальной гиперповерхности S, т. е. $\mathbf{v}(p) = \nu(p) \cdot \mathbf{n}(p)$, где $\mathbf{n}(p)$ – единичный вектор нормали к S в точке p:

$$x^k\big|_{t=0} = x^k(p), \qquad \dot{x}^k\big|_{t=0} = \nu(p) \cdot n^k(p); \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Но этого недостаточно. Начальные условия (3) не гарантируют ортогональность S_t и траекторий сдвига при $t \neq 0$. Остаются возможности, связанные с подбором гиперповерхности S, модуля начальной скорости $\nu(p)$ на S и силового поля $\mathbf{F}$ динамической системы (1).

Если заняться подбором S, то, в случае успеха, получится конструкция нормального сдвига, реализованная на некоторой специально подобранной гиперповерхности S (или на некотором классе гиперповерхностей). В работе [1] мы оставили выбор S

произвольным и сосредоточились на подборе функции $\nu(p)$ в (3). Обнаружилось, что нужный выбор $\nu(p)$ на произвольной гиперповерхности S возможен лишь при определенных ограничениях на выбор силового поля динамической системы (1). Так возникает теория динамических систем, *допускающих нормальный сдвиг*. Она была развита в серии работ [1–16], по результатам которых были подготовлена докторская диссертация [17] и кандидатская диссертация [18].

В [1–18] мы ограничивались рассмотрением гладких гиперповерхностей S_t, не имеющих особых точек. Однако в процессе сдвига $f_t\colon S \to S_t$ на гиперповерхностях могут образовываться особые точки (каустики). В частности, возможно одномоментное "схлопывание" гиперповерхностей S_t в точку при $t = t_0$ с последующим их "раздутием" из точки при $t > t_0$. Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$. Тогда сингулярной оказывается начальная гиперповерхность $S = \{p_0\}$, которая состоит из одной точки p_0, а при $t > 0$ происходит раздутие p_0 в семейство гиперповерхностей S_t.

Определение 1.2. Раздутие $f_t\colon S \to S_t$ сингулярной одноточечной гиперповерхности $S = \{p_0\}$ вдоль траекторий ньютоновской динамической системы с силовым полем $\mathbf{F}$ называется *нормальным раздутием*, если при $t > 0$ гиперповерхности S_t ортогональны траекториям раздутия.

Идея рассмотреть раздутие одноточечных множеств в рамках конструкции нормального сдвига была высказана А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко при обсуждении результатов работы [17] на семинаре акад. А. Т. Фоменко в МГУ. Частично она реализована в [19], где показано, что ньютоновские динамические системы, допускающие нормальный сдвиг гиперповерхностей, способны выполнить *нормальное раздутие* любой наперед заданной точки p_0 риманового многообразия M. Более полно указанная идея реализована в данной работе.

§2. Геометрия нормального раздутия

Пусть p_0 – некоторая точка риманового многообразия M. Рассмотрим ее нормальное раздутие $f_t\colon \{p_0\} \to S_t$ вдоль траекторий ньютоновской динамической системы (1). Фиксируем траекторию сдвига. При $t = 0$ она проходит через точку p_0. Пусть $\mathbf{v}(0)$

– вектор скорости на этой траектории, отнесенный к моменту времени $t = 0$. Если $\mathbf{v}(0) \neq 0$, то этот вектор можно нормировать:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}(0)}{|\mathbf{v}(0)|}. \tag{4}$$

Единичные векторы (4), соответствующие различным траекториям, принадлежат одному и тому же касательному пространству $T_{p_0}(M)$. Их можно отождествить с радиус-векторами точек единичной сферы $\sigma \subset T_{p_0}(M)$.

Определение 2.1. Назовем раздутие $f_t\colon \{p_0\} \to S_t$ точки p_0 вдоль траекторий ньютоновской динамической системы (1) *регулярным*, если векторы скорости $\mathbf{v}(0)$ на всех траекторях раздутия в точке p_0 отличны от нуля, а концы соответствующих им единичных векторов (4) заполняют всю поверхность единичной сферы σ в $T_{p_0}(M)$.

В случае регулярного раздутия при достаточно малых $t \neq 0$ гиперповерхность S_t имеет топологию сферы. Точки q единичной сферы $\sigma \subset T_{p_0}(M)$ можно использовать для параметризации точек S_t. Для этого запишем начальные данные, которые определяют регулярное раздутие точки p_0 в следующей форме:

$$x^k\big|_{t=0} = x^k(p_0), \qquad \dot{x}^k\big|_{t=0} = \nu(q) \cdot n^k(q); \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

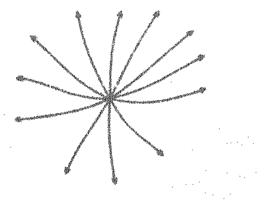

Рис. 1.

Как показано на рис. 1, траектории динамической системы (1), задаваемые начальными условиями (5), определяют семейство отображений $f_t\colon \sigma \to S_t$, являющихся диффеоморфизмами при достаточно малых $t \neq 0$.

Пусть задано регулярное раздутие точки p_0, одновременно являющееся нормальным в смысле определения 1.2. Решение задачи Коши (5) для уравнений (1) – это n функций

$x^1(q,t),\dots,x^n(q,t)$. В силу начальных данных (5) можно выписать тейлоровские разложения этих функций в окрестности точки $t=0$:

$$x^k(q,t)=x^k(p_0)+\nu(q)\,n^k(q)\cdot t+O(t);\qquad k=1,\dots,n. \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{v}(q)=\nu(q)\cdot\mathbf{n}(q)$. Вектор $\mathbf{v}(q)\in T_{p_0}(M)$ имеет смысл начальной скорости на траектории, соответствующей точке $q\in\sigma$. Используя компоненты вектора $\mathbf{v}(q)$, разложение (6) можно переписать так:

$$x^k(q,t)=x^k(p_0)+v^k(q)\cdot t+O(t). \tag{7}$$

Пусть $u^1,\dots,u^{n-1}$ – локальные координаты точки q на единичной сфере σ. В силу локальных диффеоморфизмов раздутия $f_t\colon\sigma\to S_t$ они же могут использоваться как локальные координаты на гиперповерхностях S_t. Запишем функции $x^k(q,t)$ и их разложения (7) в локальных координатах:

$$x^k(u^1,\dots,u^{n-1},t)=x^k(p_0)+v^k(u^1,\dots,u^{n-1})\cdot t+O(t). \tag{8}$$

Производные функций (8) по t определяют вектор скорости на траекториях раздутия, а их производные по $u^1,\dots,u^{n-1}$ – координатные касательные векторы к гиперповерхностям S_t:

$$\mathbf{v}=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad\qquad \boldsymbol{\tau}_i=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{9}$$

Изменение любого параметра $u^1,\dots,u^{n-1}$ приводит к переходу от одной траектории раздутия к другой. Поэтому векторы $\boldsymbol{\tau}_1,\dots,\boldsymbol{\tau}_{n-1}$ называют *векторами вариации траекторий* или просто *векторами вариации*. Для компонент вектора $\mathbf{v}(t)$ и для компонент векторов $\boldsymbol{\tau}_i(t)$ из (8) выводим

$$v^k(u^1,\dots,u^{n-1},t)=\frac{\partial x^k}{\partial t}=v^k(u^1,\dots,u^{n-1})+O(1), \tag{10}$$

$$\tau^k_i(u^1,\dots,u^{n-1},t)=\frac{\partial x^k}{\partial u^i}=\frac{\partial v^k(u^1,\dots,u^{n-1})}{\partial u^i}\cdot t+O(t). \tag{11}$$

Условие нормальности раздутия $f_t\colon\{p_0\}\to S_t$ состоит в ортогональности вектора $\mathbf{v}$ всем векторам $\boldsymbol{\tau}_1,\dots,\boldsymbol{\tau}_{n-1}$ в (9) одновременно. Запишем его как условие обращения в нуль скалярных произведений $(\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i)$:

$$(\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i) = \sum_{k,r} g_{kr}(x^1, \ldots, x^n)\, \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial x^r}{\partial u^i} = 0. \tag{12}$$

(Здесь $g_{kr}(p_0) = g_{kr}(x^1(p_0), \ldots, x^n(p_0))$ – компоненты метрического тензора в точке p_0, вычисленнные в координатах $x^1, \ldots, x^n$ на M.) Подстановка разложений (8), (10) и (11) в полученное равенство (12) определяет асимптотику его левой части при $t \to 0$:

$$\sum_{k,r} g_{kr}(p_0)\, v^k(u^1, \ldots, u^{n-1}) \frac{\partial v^k(u^1, \ldots, u^{n-1})}{\partial u^i} \cdot t + O(t) = 0. \tag{13}$$

Поскльку часть равенства (13) равна нулю тождественно по t, то из (13) вытекает соотношение

$$\sum_{k,r} g_{kr}(p_0)\, v^k(u^1, \ldots, u^{n-1})\, \frac{\partial v^k(u^1, \ldots, u^{n-1})}{\partial u^i} = 0. \tag{14}$$

Хетрудно увидеть, что левая часть (14) есть скалярное произведение вектора начальной скорости $\mathbf{v}(q)$ и его производной по u^i:

$$(\mathbf{v}(q) \mid \mathbf{v}'_{u^i}(q)) = \frac{1}{2}\, \frac{\partial |\mathbf{v}(q)|^2}{\partial u^i} = \nu(q)\, \frac{\partial \nu(q)}{\partial u^i} = 0. \tag{15}$$

Равенство (15) служит доказательством следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы регулярное раздутие $f_t\colon \{p_0\} \to S_t$ точки p_0 вдоль траекторий ньютоновской динамической системы* (1) *было нормальным, необходимо, чтобы оно задавалось начальными данными* (5), *в которых $\nu(q) = \mathrm{const} \neq 0$.* •

Обозначим через ν_0 константу, возникающую в теореме 2.1, и запишем начальные данные (5) в следующей форме:

$$x^k\big|_{t=0} = x^k(p_0), \qquad \dot{x}^k\big|_{t=0} = \nu_0 \cdot n^k(q); \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Следующее определение является центральным для развиваемой ниже теории.

Определение 2.2. Говорят, что ньютоновская динамическая система (1) с силовым полем $\mathbf{F}$ на римановом многообразии M *допускает нормальное раздутие точек*, если для любой точки

$p_0 \in M$ и любой положительной константы $\nu_0 > 0$ начальные данные (16) задают нормальное раздутие точки p_0 вдоль траекторий этой динамической системы.

Определение 2.2 было впервые дано в [19]. Теорема 2.1 показывает, что заложенное в нем условие $\nu(q) = \nu_0 = \mathrm{const}$ является неизбежной необходимостью.

Подставляя $\nu(q) = \nu_0$ в разложения (8), (10) и (11) и используя введенное ранее обозначение $\mathbf{v}(q) = \nu(q) \cdot \mathbf{n}(q)$, получим разложения

$$x^k(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = x^k(p_0) + \nu_0\, n^k(u^1, \ldots, u^{n-1}) \cdot t + O(t), \tag{17}$$

$$v^k(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = \nu_0\, n^k(u^1, \ldots, u^{n-1}) + O(1), \tag{18}$$

$$\tau_i^k(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = \nu_0\, \frac{\partial n^k(u^1, \ldots, u^{n-1})}{\partial u^i} \cdot t + O(t), \tag{19}$$

имеющие место в силу начальных условий (16), определяющих раздутие точки p_0 вдоль траекторий динамической системы (1).

§3. Динамические системы, допускающие нормальное раздутие точек

Определение 2.2 вводит новый специальный класс ньютоновских динамических систем. Этот класс непуст (см. [19, теорема 12.1]).

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 3.1, сформулированной в конце параграфа, которая дает необходимые условия принадлежности системы этому классу.

Пусть $\mathbf{F}$ – силовое поле ньютоновской динамической системы, допускающей нормальное раздутие точек. Тогда, согласно определению 2.2, выбор любой точки $p_0 \in M$ и произвольной константы $\nu_0 > 0$ позволяет построить нормальное раздутие $f_t \colon \{p_0\} \to S_t$. Для его изучения рассмотрим гипреповерхности S_t со сферической топологией, определим на них локальные координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}$, перенесенные с единичной сферы σ, и построим векторы (9) на траекториях раздутия. Затем определим скалярные произведения

$$\varphi_i = (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i). \tag{20}$$

(См. (12). В [17] они были названы *функциями девиации*. Они характеризуют степень отклонения раздутия $f_t\colon \{p_0\} \to S_t$ от нормальности. В случае нормального раздутия все они тождественно равны нулю: $\varphi_i = 0$.

Обращение в нуль функций девиации φ_i в начальный момент времени $t = 0$ вытекает из начальных условий (16) безотносительно к тому, каким выбрано силовое поле $\mathbf{F}$ динамической системы (1):

$$\varphi_i\bigr|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \varphi_i(u^1, \ldots, u^{n-1}, t) = 0. \tag{21}$$

Действительно, при $t \to 0$ вектор скорости стремится к своему предельному значению $\mathbf{v}(0) = \nu_0 \cdot \mathbf{n}(q)$, а вектор $\boldsymbol{\tau}_i$ стремится к нулю, что видно из разложений (11) для его компонент. Следовательно, $\varphi_i = (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i) \to 0$.

Кроме (21), в случае нормального раздутия из тождественного обращения в нуль функций девиации вытекает обращение в нуль производных $\dot{\varphi}_i$:

$$\dot{\varphi}_i\bigr|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial \varphi_i(u^1, \ldots, u^{n-1}, t)}{\partial t} = 0. \tag{22}$$

При вычислении $\dot{\varphi}_i$ дифференцирование по t можно заменить ковариантным дифференцированием по параметру t вдоль траектории:

$$\dot{\varphi}_i = \nabla_t \varphi_i = \nabla_t (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i) = (\nabla_t \mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}_i) + (\mathbf{v} \mid \nabla_t \boldsymbol{\tau}_i). \tag{23}$$

Далее, имеем $\nabla_t \mathbf{v} = \mathbf{F}$, что вытекает из уравнений ньютоновской динамики (1). Поэтому (23) принимает вид

$$\dot{\varphi}_i = (\mathbf{F} \mid \boldsymbol{\tau}_i) + (\mathbf{v} \mid \nabla_t \boldsymbol{\tau}_i). \tag{24}$$

Вектор $\mathbf{F}$ имеет конечный предел при $t \to 0$, определяемый начальными условиями (16): $\mathbf{F} \to \mathbf{F}(p_0, \nu_0 \cdot \mathbf{n}(q))$. А вектор τ_i при этом обращается в нуль. Поэтому первое слагаемое в (24) стремится к нулю при $t \to 0$.

Рассмотрим вектор $\nabla_t \boldsymbol{\tau}_i$ во втором слагаемом. Выпишем его компоненты:

$$\nabla_t \tau_i^k = \frac{\partial \tau_i^k}{\partial t} + \sum_{r,s} \Gamma^k_{rs}\, v^r\, \tau_i^s. \tag{25}$$

Выполняя предельный переход $t \to 0$ в (25) и используя разложения (17)–(19), получаем

$$\lim_{t\to 0} \nabla_t \tau_i^k = \nu_0\, \frac{\partial n^k(u^1, \ldots, u^{n-1})}{\partial u^i}, \tag{26}$$

где $n^k(u^1, \ldots, u^{n-1})$ – компоненты единичного вектора $\mathbf{n}(q)$, являющегося радиус-вектором точки q единичной сферы $\sigma \subset T_{p_0}(M)$. Производные вектора $\mathbf{n}(u^1, \ldots, u^{n-1})$ по $u^1, \ldots, u^{n-1}$ – это координатные касательные векторы сферы σ в локальных координатах $u^1, \ldots, u^{n-1}$. Обозначим их $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_{n-1}$:

$$\mathbf{K}_i(q) = \sum_k \frac{\partial \mathbf{n}^k(u^1, \ldots, u^{n-1})}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{27}$$

Тогда соотношение (26) можно переписать в виде

$$\nabla_t \boldsymbol{\tau}_i \to \nu_0 \cdot \mathbf{K}_i(q) \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{28}$$

А для вектора $\mathbf{v}$, как уже отмечалось выше, имеется соотношение

$$\mathbf{v} \to \nu_0 \cdot \mathbf{n}(q) \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{29}$$

Из (28) и (29) вытекает обращение в нуль второго слагаемого в правой части (24) при $t \to 0$. Действительно, вектор $\mathbf{K}_i(q)$ – касательный к единичной сфере σ в точке q, а вектор $\mathbf{n}(q)$ направлен по радиусу. Эти векторы ортогональны и их скалярное произведение равно нулю.

Итак, оба слагаемых в правой части формулы (24) обращаются в нуль при $t \to 0$, откуда вытекает (22). Подобно (21), соотношение (22) выполнено в силу начальных условий (16) безотносительно к тому, каким выбрано силовое поле $\mathbf{F}$ динамической системы (1).

Поэтому рассмотрим соотношение

$$\ddot{\varphi}_i\big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\partial^2 \varphi_i(u^1, \ldots, u^{n-1}, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{30}$$

которое тоже должно выполняться в случае нормального раздутия точки p_0. Продифференцируем равенство (24) по t. Это дает

$$\ddot{\varphi}_i = (\nabla_t \mathbf{F} \mid \boldsymbol{\tau}_i) + 2\,(\mathbf{F} \mid \nabla_t \boldsymbol{\tau}_i) + (\mathbf{v} \mid \nabla_{tt} \boldsymbol{\tau}_i). \tag{31}$$

Компоненты вектора силы $\mathbf{F}$ зависят от удвоенного набора аргументов – координат точки на траектории $x^1, \ldots, x^n$ и компонент ее вектора скорости $v^1, \ldots, v^n$. Т.е. $\mathbf{F}$ зависит от точки касательного расслоения TM. Такие векторы не укладываются в рамки обычного понятия векторного поля на многообразии M, в связи с чем в [6] было введено понятие *расширенного векторного поля* и, как его обобщение, *расширенного тензорного поля*.

Определение 3.1. Функция $\mathbf{X}$, которая каждой точке $q = (p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM ставит в соответствие некоторый тензор типа (r, s) в точке $p = \pi(q)$ на M, называется *расширенным тензорным полем* типа (r, s) на многообразии M.

Гладкие расширенные тензорные поля образуют алгебру над кольцом гладких функций на касательном расслоении. Она была названа *расширенной алгеброй тензорных полей* на M. Если M – риманово многообразие, то в расширенной алгебре тензорных полей на M естественным образом определены *два* ковариантных дифференцирования ∇ и $\tilde{\nabla}$. Первое из них было названо *пространственным градиентом*, а второе – *скоростным градиентом*. Ковариантная производная $\nabla_t \mathbf{F}$ для вектора силы в (31) может быть выражена через соответствующие градиенты расширенного векторного поля $\mathbf{F}$. Для компонент $\nabla_t \mathbf{F}$ в (31) имеем

$$\nabla_t F^k = \sum_s \nabla_s F^k \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s F^k \, F^s. \tag{32}$$

Мы не станем комментировать формулу (32) и подробно описывать все, что связано с расширенной алгеброй тензорных полей (см. [17, гл. II–IV]). Техника использования расширенных тензорных полей в дальнейшем предполагается известной читателю.

Вторая ковариантная производная $\nabla_{tt}\boldsymbol{\tau}_i$ в (31) выражается через $\boldsymbol{\tau}_i$ и $\nabla_t \boldsymbol{\tau}_i$. Дело в том, что компоненты любого вектора вариации траекторий $\boldsymbol{\tau}$ в случае ньютоновских систем удовлетворяют системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nabla_{tt}\tau^k = -\sum_{m,s,r} R^k_{msr}\,\tau^s v^r v^m + \sum_s \nabla_t \tau^s \tilde{\nabla}_s F^k + \sum_s \tau^s \nabla_s F^k. \tag{33}$$

С учетом (32) и (33) формула (31) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_i = \sum_r \left(2\,F_r + \sum_s v^s\,\tilde{\nabla}_r F_s \right) \nabla_t \tau_i^r \,+ \\ + \sum_r \left(\sum_s v^s\,(\nabla_s F_r + \nabla_r F_s) + \sum_s F^s\,\tilde{\nabla}_s F_r \right) \tau_i^r. \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь и далее, наряду с контравариантными компонентами векторов, используются их ковариантные компоненты, получающиеся в результате опускания индекса:

$$v_i=\sum_j g_{ij}\,v^j,\qquad\qquad F_i=\sum_j g_{ij}\,F^j.$$

Величины F_k, $\tilde\nabla_k F_s$, $\nabla_s F_k$ в (34) суть компоненты гладких расширенных тензорных полей. Все они имеют конечный предел при $t\to 0$, определяемый подстановкой локальных координат точки p_0 и компонент вектора $\mathbf{v}(0)=\nu_0\cdot\mathbf{n}(q)$ в их аргументы. Поэтому для вычисления предела производной $\ddot\varphi_i$ достаточно воспользоваться соотношением (28) и тем, что $\boldsymbol{\tau}_i\to 0$ при $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\ddot\varphi_i=\sum_r\nu_0\left(2\,F_r+\sum_s v^s\,\tilde\nabla_r F_s\right)\,K^r_i.\tag{35}$$

Подставляя (35) в (30), получаем соотношение:

$$\sum_r\left(2\,F_r+\sum_s v^s\,\tilde\nabla_r F_s\right)K^r_i=0,\tag{36}$$

где K^r_i – компоненты вектора $\mathbf{K}_i$ из (27). Заметим, что левая часть (36) линейна относительно компонент вектора $\mathbf{K}_i$, а векторы $\mathbf{K}_1,\ldots,\mathbf{K}_{n-1}$ образуют базис в гиперплоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}(q)$. Последний коллинеарен вектору скорости $\mathbf{v}(0)=\nu_0\cdot\mathbf{n}(q)$. Поэтому, если рассмотреть оператор $\mathbf{P}$ ортогонального проектирования на гиперплоскость, ортогональную вектору $\mathbf{v}$, и обозначить через P^r_i его компоненты, то соотношение (36) можно заменить эквивалентным ему соотношением

$$\sum_r\left(2\,F_r+\sum_s v^s\,\tilde\nabla_r F_s\right)P^r_i=0.\tag{37}$$

Ортогональные проекторы $\mathbf{P}$ образуют расширенное тензорное поле типа $(1,1)$. Его компоненты можно выписать явно:

$$P^r_i=\delta^r_i-N^r\,N_i.\tag{38}$$

Здесь δ^r_i – символ Кронекера, а N_i и N^r – ко- и контравариантные компоненты расширенного векторного поля $\mathbf{N}$, состоящего из единичных векторов, сонаправленных с вектором $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{N}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.\tag{39}$$

В чем смысл выведенных соотношений (38)? Дело в том, что соотношения (30), в отличие от (21) и (22), уже не могут выполняться только в силу начальных условий (16). Они эквивалентны выполнению соотношений (38) в точке p_0 для всех векторов $\mathbf{v}$ с $|\mathbf{v}| = \nu_0$. Если же динамическая система (1) принадлежит к классу систем, допускающих нормальное раздутие точек, как это мы предположили выше, то соотношения (38) для силового поля $\mathbf{F}$ выполнены во всех точках касательного расслоения TM, где $|\mathbf{v}| \neq 0$. В этом случае они представляют собой дифференциальные уравнения в частных производных относительно компонент $\mathbf{F}$.

Продолжим изучение соотношений типа (30). Следующим в ряду соотношений (21), (22) и (30) является условие обращения в нуль третьих производных для функций девиации $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$:

$$\dddot{\varphi}_i\big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\partial^3 \varphi_i(u^1, \ldots, u^{n-1}, t)}{\partial t^3} = 0, \tag{40}$$

Чтобы вычислить $\dddot{\varphi}_i$, продифференцируем (34) по t. Равенство (34) имеет следующую структуру:

$$\ddot{\varphi}_i = \sum_r \alpha_r \, \nabla_t \tau_i^r + \sum_r \beta_r \, \tau_i^r, \tag{41}$$

где α_r и β_r – компоненты расширенных ковекторных полей. Отсюда

$$\begin{aligned}\dddot{\varphi}_i &= \sum_r \alpha_r \, \nabla_{tt} \tau_i^r + \sum_r (\nabla_t \alpha_r + \beta_r) \, \nabla_t \tau_i^r + \sum_r \nabla_t \beta_r \, \tau_i^r = \\ &= \sum_r \alpha_r \, \nabla_{tt} \tau_i^r + \sum_r \left(\sum_s \nabla_s \alpha_r \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \alpha_r \, F^s \right) \nabla_t \tau_i^r + \\ &\quad + \sum_r \beta_r \, \nabla_t \tau_i^r + \sum_r \left(\sum_s \nabla_s \beta_r \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \beta_r \, F^s \right) \tau_i^r.\end{aligned}$$

Для вычисления $\nabla_t \alpha_r$ и $\nabla_t \beta_r$ мы воспользовались формулами, аналогичными (32). Далее учтем, что $\tau_i^r(0) = 0$ (это следует из (19)):

$$\dddot{\varphi}_i(0) = \sum_r \alpha_r \nabla_{tt} \tau_i^r(0) + \sum_r \left(\beta_r + \sum_s \nabla_s \alpha_r v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \alpha_r F^s \right) \nabla_t \tau_i^r(0).$$

Переходя в системе (33) к пределу при $t \to 0$, находим

$$\nabla_{tt}\tau^r_i(0) = \sum_s \tilde{\nabla}_s F^r \, \nabla_t \tau^s_i(0) \tag{42}$$

и, подставляя (42) в выражение для $\dddot{\varphi}_i(0)$, получаем

$$\dddot{\varphi}_i(0) = \sum_r \left(\beta_r + \sum_s \tilde{\nabla}_r F^s \, \alpha_s + \sum_s \nabla_s \alpha_r \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \alpha_r \, F^s\right) \nabla_t \tau^r_i(0).$$

Значение $\nabla_t \tau^r_i$ при $t = 0$ определяется из (28). Поэтому условие (40) обращения в нуль третьих производных приводит к соотношению

$$\sum_r \left(\beta_r + \sum_s \tilde{\nabla}_r F^s \, \alpha_s + \sum_s \nabla_s \alpha_r \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \alpha_r \, F^s\right) K^r_i = 0.$$

Компоненты векторов $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_{n-1}$ можно заменить компонентами ортогонального проектора $\mathbf{P}$. Причина здесь та же самая, что и при замене соотношения (36) на (37):

$$\sum_r \left(\beta_r + \sum_s \tilde{\nabla}_r F^s \, \alpha_s + \sum_s \nabla_s \alpha_r \, v^s + \sum_s \tilde{\nabla}_s \alpha_r \, F^s\right) P^r_i = 0. \tag{43}$$

В полученное соотношение (43) необходимо подставить конкретные выражения для α_r и β_r, взяв их из сравнения формул (34) и (41):

$$\begin{aligned} \alpha_r &= 2\,F_r + \sum_s v^s \, \tilde{\nabla}_r F_s, \\ \beta_r &= \sum_s v^s \,(\nabla_s F_r + \nabla_r F_s) + \sum_s F^s \, \tilde{\nabla}_s F_r. \end{aligned} \tag{44}$$

Но сначала заметим, что выведенные ранее уравнения (37) для компонент вектора силы $\mathbf{F}$ можно записать как

$$\sum_r \alpha_r \, P^r_i = 0. \tag{45}$$

Применим к (45) дифференцирования ∇ и $\tilde{\nabla}$ и свернем получающиеся результаты с компонентами векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$ соответственно:

$$\begin{aligned} &\sum_{r,s} v^s \, \nabla_s \alpha_r \, P^r_i = 0, \\ &\sum_{r,s} F^s \, \tilde{\nabla}_s \alpha_r \, P^r_i = \sum_{r,s} \frac{\alpha_s \, N^s \, P^r_i \, F_r}{|\mathbf{v}|}. \end{aligned} \tag{46}$$

При выводе (46) мы учли (45) и воспользовались соотношениями

$$\nabla_s P_i^r = 0, \qquad \tilde{\nabla}_s P_i^r = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(N_i\, P_s^r + \sum_j g_{ij}\, P_s^j\, N^r\right). \tag{47}$$

Соотношения (47) доказываются непосредственным вычислением на основе формул (38) и (39) (см. [17, гл. 5, §5]).

Используем соотношения (46) для упрощения уравнений (43). В силу первого из этих соотношений третье слагаемое в (43) обращается в нуль. Второе соотношение (46) позволяет преобразовать четвертое слагаемое в (43). В итоге этих преобразований получаем

$$\sum_r \left(\beta_r + \sum_s \tilde{\nabla}_r F^s\, \alpha_s + \sum_s \frac{\alpha_s\, N^s\, F_r}{|\mathbf{v}|}\right) P_i^r = 0. \tag{48}$$

Подставим сюда α_r и β_r из (44):

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} v^s(\nabla_s F_r + \nabla_r F_s)\, P_i^r + \sum_{r,s} F^s \tilde{\nabla}_s F_r\, P_i^r + \\
&+ \sum_{r,s} 2\, F_s\, \tilde{\nabla}_r F^s\, P_i^r + \sum_{r,s,q} v^q\, \tilde{\nabla}_s F_q\, \tilde{\nabla}_r F^s\, P_i^r + \\
&+ \sum_{r,s} \frac{2\, F_r\, N^s\, F_s}{|\mathbf{v}|}\, P_i^r + \sum_{r,s,q} F_r\, N^s\, N^q\, \tilde{\nabla}_s\, F_q\, P_i^r = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Дальнейшее преобразование полученных уравнений начнем с четвертого слагаемого в (49). В силу (38) имеем $\delta_i^r = P_i^r + N^r\, N_i$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s,q} v^q\, \tilde{\nabla}_s F_q\, \tilde{\nabla}_r F^s\, P_i^r = \\
&= \sum_{r,s,q,j} v^q\, \tilde{\nabla}_s F_q\, P_j^s\, \tilde{\nabla}_r F^j\, P_i^r + \sum_{r,s,q,j} v^q\, \tilde{\nabla}_s F_q\, N^s\, N_j\, \tilde{\nabla}_r F^j\, P_i^r = \\
&= -\sum_{r,s,j} 2\, F_s\, P_j^s\, \tilde{\nabla}_r F^j\, P_i^r + \sum_{r,s,q,j} N^q\, \tilde{\nabla}_s F_q\, N^s\, v^j\, \tilde{\nabla}_r F_j\, P_i^r = \\
&= -\sum_{r,s} 2F_s \tilde{\nabla}_r F^s P_i^r + \sum_{r,s,j} 2F_j N^j N_s \tilde{\nabla}_r F^s P_i^r - \sum_{r,s,q} 2N^q N^s \tilde{\nabla}_s F_q F_r P_i^r.
\end{aligned}$$

Кроме соотношения $\delta^r_i = P^r_i + N^r\,N_i$, вытекающего из (38), здесь использовано соотношение (45), записанное в виде

$$\sum_{r,s}|\mathbf{v}|\,N^s\,\tilde{\nabla}_r F_s\,P^r_i = -\sum_r 2\,F_r\,P^r_i.$$

Применим его еще раз для того, чтобы преобразовать второе слагаемое в полученном выше выражении:

$$\sum_{r,s,q} v^q\,\tilde{\nabla}_s F_q\,\tilde{\nabla}_r F^s\,P^r_i =$$

$$= -\sum_{r,s} 2F_s\tilde{\nabla}_r F^s P^r_i - \sum_{r,s}\frac{4F_s N^s F_r}{|\mathbf{v}|}P^r_i - \sum_{r,s,q} 2N^q N^s\tilde{\nabla}_s F_q F_r P^r_i.$$

Подстановка полученного выражения вместо четвертого слагаемого в (49) приводит к сокращению третьего слагаемого и к смене знака в пятом и шестом слагаемых. Уравнения (49) примут вид

$$\begin{gathered}\sum_{r,s} v^s(\nabla_s F_r + \nabla_r F_s)\,P^r_i + \sum_{r,s} F^s\tilde{\nabla}_s F_r\,P^r_i\,-\\ -\sum_{r,s}\frac{2\,F_r\,N^s\,F_s}{|\mathbf{v}|}\,P^r_i - \sum_{r,s,q} F_r\,N^s\,N^q\,\tilde{\nabla}_s\,F_q\,P^r_i = 0.\end{gathered}\tag{50}$$

Произведем небольшие (теперь уже чисто косметические) преобразования в уравнениях (37) и (50) и запишем их, объединив в систему:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_i\left(v^{-1}\,F_i + \sum_j\tilde{\nabla}_i\left(N^j\,F_j\right)\right)P^i_k = 0,\\ &\sum_{i,j}\left(\nabla_i F_j + \nabla_j F_i - 2\,v^{-2}\,F_i\,F_j\right)N^j\,P^i_k\,+\\ &+\sum_{i,j}\left(\frac{F^j\,\tilde{\nabla}_j F_i}{v} - \sum_r\frac{N^r\,N^j\,\tilde{\nabla}_j F_r}{v}\,F_i\right)P^i_k = 0.\end{aligned}\right.\tag{51}$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ньютоновская динамическая система* (1) *на римановом многообразии* M *допускала нормальное раздутие точек, необходимо, чтобы ее силовое поле удовлетворяло уравнениям* (51) *во всех точках* $q = (p, \mathbf{v})$ *касательного расслоения* TM *с* $\mathbf{v} \neq 0$. $\bullet$

§4. Условие слабой нормальности

Выше мы рассмотрели условия обращения в нуль функций девиации φ_i и их производных $\dot{\varphi}_i$, $\ddot{\varphi}_i$ и $\dddot{\varphi}_i$ в начальный момент времени $t = 0$. Оказалось, что условия $\varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = 0$ выполняются в силу начальных данных (16), определяющих раздутие точки, и не накладывают никаких ограничений на силовое поле $\mathbf{F}$ динамической системы. Из условий $\ddot{\varphi}_i(0) = \dddot{\varphi}_i(0) = 0$ мы вывели ограничения на $\mathbf{F}$ в форме уравнений (51) на компоненты вектора силы.

Можно было бы и далее шаг за шагом рассматривать условия обращения в нуль для производных функций девиации более высокого порядка, получая все новые уравнения на $\mathbf{F}$. Однако, как сейчас будет видно, в этом нет необходимости. Дело в том, что уравнения (51) в точности совпадают с уравнениями *слабой нормальности*, возникающими при рассмотрении ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг гиперповерхностей. Для случая $M = \mathbb{R}^2$ они впервые были выведены в [1], затем в [3] были обобщены на случай $M = \mathbb{R}^n$. В форме (51), соответствующей случаю произвольного риманового многообразия, эти уравнения были получены в [6] (ср. [17, гл. V]). Уравнения слабой нормальности эквивалентны следующему условию *слабой нормальности* для ньютоновских динамических систем.

Определение 4.1. Ньютоновская динамическая система (1) на римановом многообразии M удовлетворяет условию *слабой нормальности*, если каждой ее траектории $p = p(t)$ соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} = \mathcal{A}(t)\,\dot{\varphi} + \mathcal{B}(t)\,\varphi, \tag{52}$$

которому удовлетворяет функция девиации $\varphi = (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau})$, отвечающая произвольному выбору вектора вариации $\boldsymbol{\tau}(t)$ на этой траектории.

Слова “любая функция девиации” и “произвольный выбор вектора вариации” в этом определении требуют комментария.

Пусть $p = p(t)$ – какая-нибудь траектория ньютоновской динамической системы (1). Включим ее в некоторое (произвольное) однопараметрическое семейство траекторий $p = p(u,t)$, так, чтобы при нулевом значении $u = 0$ было бы $p(0,t) = p(t)$. Параметр u можно ввести, например, сделав зависящими от u начальные данные в задаче Коши, которая фиксирует траекторию $p(t)$. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ на M семейство $p = p(u,t)$ задается функциями

$$x^1 = x^1(u,t), \quad \ldots\ldots, \quad x^n = x^n(u,t). \tag{53}$$

Производные функций (53) по параметру u определяют вектор $\boldsymbol{\tau}(t)$ на траектории $p(t)$. Для него имеется формула

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u}\Big|_{u=0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{54}$$

(ср. (9)). Он называется *вектором вариации траекторий*. Именно так построенный вектор $\boldsymbol{\tau}(t)$ имеется в виду в определении 4.1. Его скалярное произведение с вектором скорости $\mathbf{v}$ есть соответствующая ему *функция девиации*: $\varphi = (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau})$.

Нетрудно показать, что компоненты любого вектора вариации $\boldsymbol{\tau}(t)$, построенного вышеописанным способом, удовлетворяют дифференциальным уравнениям (33) (см. [6] или [17, гл. V]). И наоборот, любой вектор $\boldsymbol{\tau}(t)$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (33), может быть получен в рамках вышеописанной конструкции по формуле (54). По этой причине под словами "произвольный выбор вектора вариации" в определении 4.1 можно понимать выбор произвольного решения системы линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (33). Отвечающая такому выбору функция девиации

$$\varphi(t) = (\mathbf{v} \mid \boldsymbol{\tau}) = \sum_k v_k\, \tau^k$$

в случае общего положения удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению порядка $2n$ (см. [17, гл. V, теорема 6.1]). В специальных случаях (при специальном выборе силового поля $\mathbf{F}$) порядок этого уравнения может понижаться. Определение 4.1 выделяет случай, когда порядок уравнения для φ понижается до 2. Для этого случая в [6], по сути дела, была доказана следующая теорема (см. [17, гл. V, теорема 6.2]).

Теорема 4.1 [6]. *Ньютоновская динамическая система на римановом многообразии M размерности $n \geqslant 2$ удовлетворяет условию слабой нормальности тогда и только тогда, когда ее силовое поле удовлетворяет уравнениям* (51) *во всех точках $q = (p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM с $\mathbf{v} \neq 0$.*

Заметим, что векторы вариации $\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_{n-1}$, возникающие при раздутии точек, естественным образом укладываются в рамки вышеописанного общего определения (54). Поэтому если силовое поле $\mathbf{F}$ динамической системы (1) удовлетворяет уравнениям (51), то соответствующие функции девиации $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (52) на траекториях раздутия. В этом случае начальные условия задачи Коши

$$\varphi_i\big|_{t=0} = \dot{\varphi}_i\big|_{t=0} = 0, \tag{55}$$

полученные из (21) и (22), обеспечивают тождественное равенство нулю функций девиации. Выполнение же самих условий (55), как замечено выше, обеспечивается только начальными данными (16). По этой причине можно усилить теорему 3.1, сформулировав ее так.

Теорема 4.2. *Ньютоновская динамическая система* (1) *на римановом многообразии M допускает нормальное раздутие точек тогда и только тогда, когда ее силовое поле удовлетворяет уравнениям* (51) *во всех точках $q = (p, \mathbf{v})$ касательного расслоения TM, где $\mathbf{v} \neq 0$.* $\bullet$

Ограничение $n \geqslant 2$ в теореме 4.1 не является существенным. Мы не формулируем его явно, поскольку в размерности $n = 1$ само понятие нормального раздутия точек теряет смысл.

§5. Заключительные замечания

Теорема 4.2 – центральный результат данной работы. Она сводит изучение ньютоновских динамических систем, допускающих нормальное раздутие точек, к анализу системы дифференциальных уравнений в частных производных (51) для их силовых полей. Кроме того, она дает геометрическую интерпретацию достаточно абстрактного условия слабой нормальности, сводя его к геометрически наглядному условию того, что динамическая система способна осуществлять нормальное раздутие точек.

Отметим, что в размерности $n=2$ (этот случай детально изучен в [18]) условие того, что ньютоновская динамическая система допускает нормальный сдвиг гиперповерхностей, также сводится к системе уравнений (51). По этой причине имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.1. *При $n=2$ класс ньютоновских динамических систем, допускающих нормальный сдвиг гиперповерхностей, совпадает с классом ньютоновских динамических систем, допускающих нормальное раздутие точек.* $\bullet$

В размерности $n\geqslant 3$ при изучении динамических систем, допускающих нормальный сдвиг произвольных гиперповерхностей, наряду с уравнениями слабой нормальности (51) возникают так называемые *дополнительные уравнения нормальности*. Они имеют вид

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j} P^i_\varepsilon\,P^j_\sigma\left(\sum_m N^m\,\frac{F_i\,\tilde\nabla_m F_j}{v}-\nabla_i F_j\right)=\\ \displaystyle\qquad=\sum_{i,j} P^i_\varepsilon\,P^j_\sigma\left(\sum_m N^m\,\frac{F_j\,\tilde\nabla_m F_i}{v}-\nabla_j F_i\right),\\ \displaystyle\sum_{i,j} P^j_\sigma\,\tilde\nabla_j F^i\,P^\varepsilon_i=\sum_{i,j,m}\frac{P^j_m\,\tilde\nabla_j F^i\,P^m_i}{n-1}\,P^\varepsilon_\sigma. \end{cases}\tag{56}$$

Анализ полной системы уравнений нормальности, составленной из (51) и (56), был предпринят в [16], где, однако, была допущена ошибка, поэтому часть результатов этой работы неверна. Эта ошибка исправлена в [17, гл. VII] (ср. [19]). В результате удалось получить явную формулу для общего решения полной системы уравнений нормальности (51) и (56).

В [20] показано, что решения уравнений слабой нормальности (51) образуют больший класс по сравнению с решениями полной системы уравнений нормальности (51) и (56). Это означает, что в размерности $n\geqslant 3$ утверждение, аналогичное утверждению 5.1, не выполняется.

Литература

1. Boldin A. Yu., Sharipov R. A., *Dynamical systems accepting the normal shift.* Ufa, Preprint " 0001-M of Bashkir State University, 1993.

2. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* — ТМФ **97** (1993), 386–395.
3. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Многомерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* — ТМФ **100** (1994), 264–269.
4. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* — Докл. РАН **334**, № 2 (1994), 165–167.
5. Шарипов Р. А., *Проблема метризуемости динамических систем, допускающих нормальный сдвиг.* — ТМФ **101** (1994), 85–93 ЛАНЛ.
6. Болдин А. Ю., Дмитриева В. В., Сафин С. С., Шарипов Р. А., *Динамические системы на римановых многообразиях, допускающие нормальный сдвиг.* — ТМФ **105** (1995), 256–266.
7. Болдин А. Ю., Бронников А. А., Дмитриева В. В., Шарипов Р. А., *Условия полной нормальности для динамических систем на римановых многообразиях.* — ТМФ **103** (1995), 267–275.
8. Boldin A. Yu., *On the self-similar solutions of normality equation in two-dimensional case.* Dynamical systems accepting the normal shift. Уфа, BaxGU, 1994, pp. 31–39см. также patt-sol/9407002 в электронном архиве LANL[1].
9. Шарипов Р. А., *Метризуемость динамических систем конформно-эквивалентной метрикой.* — ТМФ **105** (1995), 276–282.
10. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг в финслеровой геометрии.* — Рукопись статьи в архиве кафедры высшей алгебры и геометрии БашГУ (1993).
11. Шарипов Р. А., *Условия нормальности и аффинные вариации связности на римановых многообразиях.* — Рукопись статьи в архиве кафедры высшей алгебры и геометрии БашГУ (1993).
12. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* — Успехи мат. наук **49**, № 4 (1994), 105.
13. Sharipov R. A., *Higher dynamical systems accepting the normal shift.* Dynamical systems accepting the normal shift. Уфа, БашГУ, 1994, pp. 41–65.
14. Дмитриева В. В., *Об эквивалентности двух форм записи уравнений нормальности для динамических систем* $\mathbb{R}^n$. — В кн.: Интегрируемость в динамических системах. Уфа, Инст. математики БНЦ УрО РАН, 1994, с. 5–16.
15. Bronnikov A. A., Sharipov R. A., *Axially symmetric dynamical systems accepting the normal shift in* $\mathbb{R}^n$. Интегрируемость в динамических системах. Уфа, Инст. Математики БНЦ УрО РАН, 1994, pp. 62–69.
16. Болдин А. Ю., Шарипов Р. А., *О решении уравнений нормальности в размерности* $n \geqslant 3$. — Алгебра и анализ **10**, № 4 (1998), 37–62.
17. Шарипов Р. А., *Динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* Дисс. докт. физ.-мат. наук, 1999 англ. перевод размещен в электронном архиве ЛАНЛ, см. матх.ДГ/0002202 .
18. Болдин А. Ю., *Двумерные динамические системы, допускающие нормальный сдвиг.* Дисс. канд. физ.-мат. наук, 2000англ. перевод размещен в

[1]Электронный архив Лос-Аламосской Национальной лаборатории США. Архив доступен через Интернет http://arXiv.org, он имеет зеркальный сайт в Институте теоретической и экспериментальной физики http://ru.arXiv.org

электронном архиве ЛАНЛ, см. матх.ДГ/0011134 .
19. Шарипов Р. А., *Ньютоновский нормальный сдвиг в многомерной римановой геометрии.* — Мат. сб. (принято к печати) см. также math.DG/0006125 в электронном архиве LANL .
20. Sharipov R. A., *On the solutions of weak normality equations in multidimensional case.* — Публикация math.DG/0012110 в электронном архиве LANL (2000).

Sharipov R. A. Newtonian dynamical systems admitting normal blow-up of points.

A construction of normal shift along trajectories of a Newtonian dynamical system in the case of an extremely singular initial hypersurface collapsing to a single point is considered. A new class of Newtonian dynamical systems, namely, systems admitting normal blow-up of points, is introduced. The class is described in terms of differential equations of normality.

Башкирский Государственный
университет, Уфа
e-mail: ruslan-sharipov@usa.net
R_Sharipov@ic.bashedu.ru

Поступило 1 июня 2001 г.