Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

П. В. Светлов

ГРАФ–МНОГООБРАЗИЯ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ВИРТУАЛЬНО РАССЛОЕНЫ НАД ОКРУЖНОСТЬЮ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Введение

Известно, что всякое трехмерное многообразие неположительной секционной кривизны неприводимо и имеет бесконечную фундаментальную группу. Согласно гипотезе Терстона о геометризации такое многообразие – либо гиперболическое, либо зайфертово, либо хакеново.

Зайфертово многообразие допускает метрику неположительной секционной кривизны (NPC-метрику) тогда и только тогда, когда оно геометризуемо "по образцу" $\mathbb{E}^3$ или $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$.

Либ [3] показал, что незайфертово хакеново многообразие M с краем (возможно пустым) нулевой эйлеровой характеристики допускает NPC-метрику если а) $\partial M \neq \emptyset$ и б) в JSJ-разложении многообразия M присутствует хотя бы одна гиперболическая компонента. Замкнутые незайфертовы хакеновы многообразия без гиперболических компонент являются неприводимыми граф-многообразиями. NPC-метрики на таких многообразиях были изучены Буяло и Кобельским [1, 2] (ср. лемму 2.1).

Другая гипотеза Терстона утверждает, что всякое гиперболическое трехмерное многообразие *виртуально* расслоено над окружностью, т.е. имеет конечнолистное накрывающее, расслаивающееся над окружностью. В данной заметке мы анонсируем доказательство "похожего" результата.

Теорема A. *Если замкнутое граф-многообразие допускает* NPC-*метрику, то оно виртуально расслоено над окружностью.*

Утверждение теоремы A тривиально для граф-многообразий с непустым краем. А именно, *всякое* такое многообразие виртуально расслоено над окружностью [8] и допускает NPC-метрику [3]. С другой стороны, существует бесконечно много замкнутых граф-многообразий, не являющихся виртуально расслоенными, и в некотором смысле имеется "еще больше" таких многообразий без NPC-метрик.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. В. Буяло за постоянное внимание к работе.

§1. Основные определения

1.1. Пусть $\mathfrak{M}_0$ – класс замкнутых ориентируемых граф-многообразий, склеенных из прямых произведений типа $F \times S^1$, вдоль их краевых торов (здесь F – поверхность отрицательной эйлеровой характеристики с краем).

Как уже было отмечено, граф-многообразие M, допускающее NPC-метрику, неприводимо, и поэтому конечнолистно накрывается многообразием $\widetilde{M}$ класса $\mathfrak{M}_0$ [1, 8], которое естественным образом снабжается (поднятой) NPC-метрикой. Переходя при необходимости к дополнительному двулистному накрывающему, можно считать, что граф многообразия $\widetilde{M}$ (см. п. 1.2) не имеет петель. Отсюда следует, что теорему A достаточно доказать для многообразий класса $\mathfrak{M}_0$, с графами без петель. Далее рассматриваются только такие многообразия.

1.2. Граф Γ_M. Пусть M – граф-многообразие, $\{M_v\}_{v\in V}$ – множество его зайфертовых компонент (*блоков*), $\mathcal{T} = \bigcup_{e\in E} T_e$ – JSJ-поверхность в M (минимальный набор несжимаемых торов). Таким образом $M = \bigcup_{\mathcal{T}} M_v$ получается склеиванием многообразий M_v вдоль их краевых торов. Элементы множеств V и E являются, соответственно, вершинами и ребрами графа $\Gamma_M(V,E)$, дуального JSJ-разложению многообразия M. А именно, вершины $v, v' \in V$ соединены ребром $e \in E$, если блоки M_v, $M_{v'}$ разделяются тором T_e. В этом случае мы пишем $v' = e(v)$. Ориентированный граф, соответствующий графу $\Gamma_M(V,E)$, будем обозначать через $\Gamma_M(V,W)$. На множестве ориентированных ребер W имеется естественная инволюция, действие которой на ребро $w \in W$ будем обозначать через $-w$. Через ∂v обозначим множество ребер (ориентированных или нет – это ясно из контекста), исходящих из вершины v.

1.3. Инварианты граф-многообразий. Зафиксировав ориентацию многообразия M, мы получим ориентацию на каждом блоке M_v, $v \in V$, и соответственно на каждом краевом торе $T_e \subset \partial M_v = \bigcup_{e \in \partial v} T_e$. Описанная ориентация тора T_e канонически определяет изоморфизм

$$\mathrm{is}_w : \Lambda^2 H_1(T_e; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q},$$

где ориентированное ребро $w \in W$ соответствует ориентации ребра $e \in E$ *от* вершины $v \in V$ (что для краткости обозначается $w = (v, e)$). Пусть $a \wedge_w b = \mathrm{is}_w(a \wedge b) \in \mathbb{Q}$ – образ элемента $a \wedge b \in \Lambda^2 H_1(T_e; \mathbb{Q})$ при этом изоморфизме. Заметим, что $a \wedge_{-w} b = -a \wedge_w b$, так как ориентации на T_e, "приходящие" с разных сторон, противоположны.

Здесь и далее мы фиксируем некоторую ориентацию зайфертовых слоев в каждом блоке многообразия M. Слоение Зайферта блока M_v индуцирует линейные слоения на краевых торах $\{T_e\}_{e \in \partial v}$. Пусть $f_w \in H_1(T_e, \mathbb{Z})$, $w = (v, e)$ – элементы, представляющие эти слоения. Заметим, что элемент $f_v = \iota_*(f_w)$, где гомоморфизм $\iota_*\colon H_1(\partial M_v) \to H_1(M_v)$ индуцирован включением края, не зависит от ребра $w \in \partial v$ и представляет слой слоения Зайферта блока M_v. Мы определим целое число b_w для всех $w \in W$ формулой

$$b_w = f_w \wedge_w f_{-w}.$$

Легко видеть, что $b_w = b_{-w}$. Целые числа $b_e = |b_w|$, $w = (v, e)$ не зависят от произвола в выборе ориентаций.

Для того, чтобы определить другой инвариант, нам понадобится следующая лемма, доказательство которой легко извлечь из работы [5].

1.4. Лемма. *Пусть для каждого $w \in \partial v$ задан элемент $z_w \in H_1(T_e)$, $w = (v, e)$ такой, что $f_w \wedge_w z_w = 1$. Тогда имеет место равенство*

$$\iota_*(z) = E(z) \cdot f_v, \qquad \text{где } z = \bigoplus_{w \in \partial v} \overline{z}_w$$

и $E(z)$ – некоторое рациональное число (число Эйлера). Здесь $\overline{z}_w$ – класс в $H_1(M_v)$, "приходящий" из элемента $z_w \in H_1(T_e)$.

Замечание. Этот инвариант впервые появился в работе [6]. В работе [5] $E(z)$ имеет противоположный знак.

Зарядом максимального блока M_v в граф-многообразии M называется рациональное число

$$k_v = E\left(\bigoplus_{w\in\partial v}\frac{\overline{f_{-w}}}{b_w}\right).$$

Заряд k_v блока $M_v \subset M$ не зависит от выбранных ориентаций слоев Зайферта в блоках многообразия M и меняет знак, когда многообразие M меняет ориентацию. Ср. [1].

§2. Схема доказательства теоремы A

Используя инварианты, определенные выше, мы приводим нужные нам результаты работ [1, 2] в следующей лемме.

2.1. Лемма. *Пусть M – граф-многообразие класса $\mathfrak{M}_0$ и $\Gamma_M(V,E)$ – его граф. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *M допускает* NPC-*метрику;*

(2) *уравнение*

$$k_v a_v = \sum_{\substack{w\in\partial v\\ w=(v,\,e)}}\frac{\gamma_e a_{e(v)}}{b_e} \tag{GE}$$

над графом Γ_M с неизвестными $\{a_v,\gamma_e \mid v\in V,\ e\in E\}$ имеет решение $\{a,\gamma\}$, такое, что $a_v>0$, $|\gamma_e|<1$ для всех $v\in V$, $e\in E$.

Уравнение (GE) из второго пункта леммы называется *уравнением геометризации над графом* $\Gamma_M(V,E)$ [1].

Замечание. Без потери общности можно считать, что решение $\{a,\gamma\}$ уравнения (GE) из второго пункта леммы рационально (и даже целочисленно). Действительно, условия $a_v>0$, $|\gamma_e|<1$ являются “открытыми”, а (GE) есть система из $|V|$ квазилинейных уравнений над $\mathbb{Q}$ с $|V|+|E|$ переменными. Будем предполагать, что все числа a_v являются целыми.

2.2. Предложение. *Пусть M – граф-многообразие класса $\mathfrak{M}_0$ и $\Gamma_M(V,E)$ – его граф. Если уравнение* (GE) *над $\Gamma_M(V,E)$ имеет рациональное решение $\{a,\gamma\}$ такое, что $a_v>0$ и $|\gamma_e|<1$ для всех $v\in V$ и $e\in E$, то найдется горизонтальное погружение $g\colon S\to M$*

некоторой замкнутой поверхности S отрицательной эйлеровой характеристики.

(Погружение называется *горизонтальным*, если оно трансверсально слоям Зайферта в каждом блоке многообразия M.)

Доказательство этого предложения почти дословно повторяет рассуждения в [5, с. 421–422].

Рубинштейн и Ванг [7] доказали простой критерий, позволяющий установить, является ли данная погруженная горизонтальная поверхность виртуально вложенной, т.е. поднимается ли она до вложения в некотором конечнолистном накрытии.

Этот критерий является основным инструментом доказательства следующего предложения.

2.3. Предложение. *Пусть $g\colon S \to M$ – горизонтальное погружение, построенное в доказательстве предложения 2.2. Тогда существует конечнолистное накрытие $p\colon \widetilde{M} \to M$ и вложение $\tilde{g}\colon S \to \widetilde{M}$ такие, что $p \circ \tilde{g}$ изотопно g.*

Доказательство будет дано в подробной публикации.

2.4. Окончание доказательства теоремы А. Как уже было упомянуто выше, можно считать, что $M \in \mathfrak{M}_0$. Если M допускает NPC-метрику, то по лемме 2.1 уравнение (GE) имеет решение. Согласно предложению 2.2 в M найдется горизонтальная поверхность, которая поднимается до *вложенной* в некотором конечнолистном накрывающем многообразия M (предложение 2.3). Для завершения доказательства теоремы А осталось заметить, что если граф-многообразие содержит горизонтальную вложенную поверхность, то либо оно само, либо его двулистное накрывающее расслоено над окружностью [4]. $\bullet$

Литература

1. С. Буяло, В. Кобельский, *Геометризация граф-многообразий I. Конформная геометризация.* — Алгебра и анализ **7**, № 2 (1995), 3–45.
2. С. Буяло, В. Кобельский, *Геометризация граф-многообразий II. Изометрическая геометризация.* — Алгебра и анализ **7**, № 3 (1995), 96–117.
3. B. Leeb, *Manifolds with(out) metrics of non-positive curvature.* — Invention. Math. **122** (1995), 277–289.
4. W. D. Neumann, *Commensurability and virtual fibration for graph manifolds.* — Topology **39** (1996), 355–378.
5. W. D. Neumann, *Immersed and virtually embedded surfaces in graph manifolds.* — Algebraic and Geometric Topology **1** (2001), 411–426.

6. W. D. Neumann, F. Raymond, *Seifert manifolds, plumbing, μ-invariant and orientation reversing maps.* Springer, Berlin, — Lect. Notes in Math. **664** (1978), 162–195.
7. J. H. Rubinstein, S. C. Wang, *π_1-injective surfaces in graph-manifolds.* — Comment. Math. Helv. **73** (1998), 499–515.
8. S. C. Wang, F. C. Yu, *Graph-manifolds with non-empty boundary are covered by a surface bundle over the circle.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **122** (1997), 447–455.

Svetlov P. V. Nonpositively-curved graph manifolds are virtually fibered over the circle.

A proof of the following result is announced. Each nonpositively-curved closed graph manifold has a finite cover that fibers over the circle.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: svetlov@pdmi.ras.ru

Поступило 1 июня 2001 г.