Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

О. Р. Мусин

ЭКСТРЕМУМЫ КРИВИЗНЫ И ТЕОРЕМЫ О 4 ВЕРШИНАХ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Введение

0.1. Понятие кривизны всегда играло особую роль в математике и теоретической физике. Несмотря на более чем двухсотлетнюю жизнь этого понятия в науке, поток посвященных ему работ не иссякает, а область приложений – расширяется.

Тема данной статьи помимо математического имеет и сугубо практический аспект. Распределение функции кривизны и ее особые точки представляют интерес во многих прикладных областях. Автору этих строк довелось участвовать в проектах, связанных с картографической генерализацией (обобщение изображения объекта на карте при переходе к более мелкому масштабу), при которой на кривой или поверхности необходимо выделять особые точки, – обычно это нули и (локальные) экстремумы кривизны [6, 12, 22]. Экстремумы кривизны и их распределение являются важными характеристиками и при компьютерном моделировании поверхностей.

0.2. В дифференциальной геометрии понятие кривизны хорошо определено только для класса (C^2-)гладких кривых и поверхностей. В приложениях обычно имеют дело с дискретными моделями, когда кривая представляется ломаной линией, а поверхность – многогранником. Таким образом, возникает задача *корректного* определения понятий кривизны и экстремумов кривизны в дискретном случае.

Что означает корректность в данном случае? На наш взгляд, дискретный аналог кривизны должен удовлетворять какому-то

Работа поддержана грантом РФФИ 00-01-00304.

глобальному свойству кривизны, выполненному для гладкого случая.

0.3. Одним из таких глобальных свойств гауссовой кривизны является теорема Гаусса–Бонне, дискретный аналог которой хорошо известен. Пусть M – многоугольник или замкнутый двумерный многогранник. Будем считать, что его кривизна равна нулю везде, кроме вершин. В первом случае его (*угловой*) *кривизной* в вершине A называют величину

$$\pi - \angle A,$$

а во втором – величину

$$2\pi - (\text{сумма плоских углов граней } M \text{ при вершине } A).$$

Если M – многоугольник, то сумма кривизн в его вершинах равна 2π, а если многогранник – то она равна $2\pi\chi(M)$, где $\chi(M)$ – эйлерова характеристика. Как легко видеть, при таком определения кривизны автоматически верно то же утверждение, что и в теореме Гаусса–Бонне для гладкого случая.

0.4. На наш взгляд, не менее важным свойством кривизны является *теорема о* 4 *вершинах* для плоских кривых. Сошлемся здесь на авторитет В. И. Арнольда. Он неоднократно говорил (и доказывал сказанное многочисленными публикациями, см. [2–5] и др.), что эта теорема – фундаментальное свойство размерности 2.

Мы начнем нашу работу с краткой истории теоремы о 4 вершинах (§1). "Дискретные" варианты этой теоремы для многоугольников хорошо известны в геометрии, – это знаменитые леммы Коши и А. Д. Александрова.

0.5. Для гладких кривых *вершинами* называют критические точки функции кривизны на кривой. В дискретном случае, когда кривая является замкнутой ломаной, имеется несколько определений понятия "вершины", вернее, экстремальной вершины [14, 20, 21, 25]. В этих работах при соответствующих ограничениях на многоугольник получены дискретные варианты теоремы о 4 вершинах. В §2 предлагается такое определение экстремальной вершины ломаной, что соответствующая ей точка каустики (эволюты) будет каспом (точкой возврата). Оказывается, что имеется простая связь между числом экстремальных вершин и индексами кривой и ее каустики. Аналогичная формула связывает число касательных к кривой Γ, проведенных из точки P на плоскости, с индексом кривой и ее индексом относительно P.

0.6. Для выпуклого многогранника справедливо утверждение, аналогичное теореме о 4 вершинах для выпуклого многоугольника [20]. В §3 предлагается многомерный аналог теоремы о 4 опорных вершинах ломаной [21]. В качестве следствия получено обобщение основной теоремы работы [20] для невыпуклых многогранников.

В §4 разбирается топологический вариант теоремы о 4 вершинах для триангуляции шара и формулируется гипотеза об “ушах” триангуляции. Показано, что эта гипотеза верна для регулярных триангуляций.

§1. Теорема о 4 вершинах и ее обобщения

1.1. Будем называть *овалом* выпуклую гладкую плоскую замкнутую кривую. Опубликованная Мухопадхаяя в 1909 г. [13] классическая теорема о 4 вершинах утверждает следующее:

Функция кривизны на овале имеет $\geqslant 4$ локальных экстремумов (вершин).

Как известно, всякая непрерывная функция на компакте имеет по-крайней мере 2 (локальных) экстремума: максимум и минимум. Оказывается, у функции кривизны их $\geqslant 4$.

Несмотря на то, что публикация была в малоизвестном журнале, она оказалась замеченной и почти сразу же появились ее обобщения. В 1912 г. А. Кнезер (A. Kneser) показал, что выпуклость не является необходимым условием и доказал теорему о 4 вершинах для простой замкнутой плоской кривой.

1.2. В знаменитой книге В. Бляшке [8] (первая публикация – 1916 г.) наряду с другими обобщениями приведен “относительный” вариант теоремы о 4 вершинах. Мы сохраним здесь формулировку и обозначения из [8, с. 193].

Пусть C_1 и C_2 – две (положительно ориентированные) выпуклые замкнутые кривые, do_1 и do_2 – элементы дуги в точках с параллельными (и сонаправленными) опорными прямыми. Тогда отношение do_1/do_2 имеет по крайней мере 4 экстремума.

В случае, когда C_2 – окружность, эта теорема превращается в теорему о 4 вершинах овала.

1.3. В 1932 г. Бозе [9] опубликовал замечательный вариант теоремы о 4 вершинах в духе геометрии "в целом". Если в классической теореме о 4 вершинах экстремум определяется "локально", то здесь он определяется только "глобально".

Пусть G – овал, никакие 4 точки которого не лежат на одной окружности. Обозначим через s_- и s_+ (resp., t_- и t_+) число его окружностей кривизны (resp., окружностей, касающихся G ровно в 3 точках), лежащих внутри $(-)$ и вне $(+)$ овала G, соответственно. (*Окружность кривизны* кривой G в точке p касается G в точке p и имеет радиус $1/k_G(p)$, где $k_G(p)$ – кривизна кривой G в точке p.)

В этих обозначениях выполняется равенство

$$s_- - t_- = s_+ - t_+ = 2.$$

Если назвать *вершинами* точки касания с овалом G его окружностей кривизны, лежащих целиком внутри или вне G, то из этих формул получим, что овал G содержит $\geqslant 4$ вершин. Кстати, этот факт установил Х. Кнезер (H. Kneser) за 10 лет до Бозе. (Как пишет М. Умехара [23], Х. Кнезер – сын А. Кнезера, и, таким образом, два интересных усиления теоремы о 4 вершинах принадлежат одной семье.)

1.4. Публикации, связанные с теоремой о 4 вершинах, с тех пор не прекращались и значительно умножились в последние годы (см. [2–5, 18] и др.) во многом благодаря статьям и докладам В. И. Арнольда. В указанных работах изучаются различные варианты теоремы о 4 вершинах для кривых на плоскости и выпуклых кривых в $\mathbb{R}^d$, рассматриваются их особые точки (вершины): критические точки функции кривизны, точки уплощения, точки перегиба, нули высших производных и др. В недавной работе [23] приведен обширный список работ по этому направлению.

1.5. Интересно, что первый дискретный аналог теоремы о 4 вершинах появился почти за 100 лет до ее гладкого варианта. (Пользуюсь случаем поблагодарить В. А. Залгаллера, обратившего мое внимание на этот факт.) В 1813 г. Коши в своей великолепной работе о жесткости выпуклых многогранников воспользовался следующей леммой:

Лемма Коши. *Пусть M_1 и M_2 – выпуклые n-угольники со сторонами и углами a_i, α_i и b_i, β_i, соответственно. Предположим, что $a_i = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда либо $\alpha_i = \beta_i$, либо число перемен знака величин $\alpha_i - \beta_i$ при $i = 1, \ldots, n$* **не меньше 4**.

В книге А. Д. Александрова [1] при доказательстве единственности выпуклого многогранника с заданными площадями граней и нормалями использовалась лемма, в которой в лемме Коши углы заменялись на стороны. Мы приведем ее в несколько меньшей общности, чем в оригинале.

Лемма А. Д. Александрова. *Пусть на плоскости даны два выпуклых многоугольника M_1 и M_2 с соответственно параллельными сторонами, которые никакими параллельными переносами не могут быть расположены так, чтобы один содержался внутри другого. Тогда при обходе M_1 (равно как и M_2) разность длин соответствующих параллельных сторон изменяет знак* **по крайней мере 4 раза**.

Нетрудно заметить сходство приведенной выше относительной теоремы о 4 вершинах для овалов (принадлежащей, по всей видимости, Бляшке) с леммами Коши и Александрова. Более того, приближая овалы многоугольниками, теорему Бляшке легко доказать при помощи любой из этих лемм.

Из лемм Коши и Александрова легко следуют теоремы о 4 вершинах для многоугольника.

Следствие из леммы Коши. *Пусть у выпуклого многоугольника M все стороны равны. Тогда среди углов многоугольника M найдутся по крайней мере 2, не превосходящие соседних углов, и по крайней мере 2, не меньшие соседних углов.*

Следствие из леммы Александрова. *Пусть у многоугольника M все углы равны. Тогда среди сторон многоугольника M найдутся по крайней мере 2, не превосходящие соседних сторон, и по крайней мере 2, не меньшие соседних сторон.*

1.6. В приложениях *радиус кривизны* в вершине многоугольника обычно вычисляется следующим образом. Рассмотрим многоугольник M с вершинами $A_1, \ldots, A_n$. У любой вершины A_i есть два соседа – A_{i-1} и A_{i+1}. Положим $R_i(M) = R(A_{i-1}A_iA_{i+1})$. Это и есть радиус кривизны многоугольника M в вершине A_i.

Теорема [14]. *Пусть M – выпуклый многоугольник и для всякой его вершины A_i точка $O(A_{i-1}A_iA_{i+1})$ лежит внутри угла $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Тогда для (циклической) последовательности чисел $R_1(M)$, $R_2(M)$, …, $R_n(M)$ выполнена теорема о 4 локальных экстремумах, т.е. среди них найдутся по крайней мере 2, не меньшие соседних, и по крайней мере 2, не большие соседних.*

Кстати, эта теорема обобщает теоремы о 4 вершинах, вытекающие из лемм Коши и Александрова.

1.7. Дискретный вариант теоремы Х. Кнезера о 4 вершинах. Хазовем окружность C, проходящую через какие-то вершины многоугольника M *пустой* (соответственно, *полной*), если все остальные его вершины лежат вне (соответственно, внутри) C. Назовем окружность C *экстремальной*, если она – пустая, либо полная.

Теорема. *Пусть $M = A_1 \dots A_n$ – выпуклый n-угольник, $n > 3$, никакие 4 вершины которого не лежат на одной окружности. Тогда среди n окружностей $C_i(M) = C(A_{i-1}A_iA_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$, есть по-крайней мере 2 пустые и по-крайней мере 2 полные, т.е. $\geqslant 4$ экстремальных окружностей.*

(Как сообщил автору С. Е. Рукшин, этот результат уже не одно десятилетие фигурирует в списке задач для подготовки к математическим олимпиадам и хорошо известен петербургским школьникам, посещающим математические кружки.)

1.8. Для многоугольников из условия предыдущей теоремы легко предложить и непосредственное обобщение теоремы Бозе.

Теорема. *Обозначим через s_- и s_+ число пустых и полных окружностей среди окружностей $C_i(M)$, а через t_- и t_+ – число пустых и полных окружностей, проходящих через три попарно несоседние вершины M, соответственно. Тогда, как и выше:*

$$s_- - t_- = s_+ - t_+ = 2.$$

Этот факт был представлен автором на Всероссийской математической олимпиады школьников в 1998 г. в качестве задачи. (При ее решении не очень помогало знание следствия – теоремы п. 1.7 о 4 экстремальных окружностях.)

1.9. Еще одно обобщение теоремы Бозе дано в работе [25], где рассматривается случай *равностороннего* многоугольника, причем не обязательно выпуклого.

1.10. В работе В. Д. Седых [21] доказана теорема о 4 опорных плоскостях для строго выпуклых ломаных в $\mathbb{R}^3$, и основное следствие из нее – также вариант теоремы п. 1.7.

Теорема [21]. *Если каждые две соседние вершины многоугольника M лежат на пустой окружности, то среди окружностей $C_i(M)$ есть по крайней мере 4 экстремальных.*

Ясно, что выпуклые и равносторонние многоугольники удовлетворяют этому условию. Кроме того, В. Д. Седых построил примеры многоугольников показывающих, что без такого условия его теорема не верна.

1.11. В заключение этого небольшого и ни в коем случае не претендующего на полноту обзора приведем основной результат работы [20], стоящий особняком среди вариантов теоремы о 4 вершинах. Дело в том, что до последнего времени это было единственное ее обобщение для многогранников.

Теорема [20]. *Пусть M – выпуклый симплициальный d-мерный многогранник в $\mathbb{R}^{d+1}$. Рассмотрим все сферы, на каждой из которых лежат d вершин какой-то $(d-1)$-мерной грани многогранника M и две соседние к этой грани вершины. Тогда среди этих сфер есть $\geqslant d+1$ пустых и $\geqslant d+1$ полных сфер, т.е. всего $\geqslant 2d+2$ экстремальных сфер.*

Как раньше пустые и полные окружности, здесь *пустые* и *полные* сферы не содержит вершин многогранника M внутри и вне себя, соответственно. Легко видеть, что для $d=1$ эта теорема – не что иное, как теорема п. 1.7.

§2. Экстремальные вершины, каспы и каустики

2.1. Как уже отмечалось, теорема о 4 вершинах верна для любой гладкой простой (т.е. без самопересечений) кривой. Отказаться от условия простоты кривой, вообще говоря, нельзя. Например, у лемнискаты (восьмерки) всего 2 вершины. Заметим, что ее индекс равен нулю. Для сравнения: у эллипса ровно 4 вершины, и его индекс равен 1. Налицо определенная связь между индексом кривой и числом вершин.

Один из подходов к доказательству теоремы о 4 вершинах для овалов опирается на связь между вершинами кривой, каспами и индексом ее каустики. В частности, на этом построено доказательство в [14], а также ряд утверждений в работах В. И. Арнольда (см. [2, 3] и др.).

Мы приводим простую формулу, связывающую число вершин плоской кривой с индексами самой кривой и ее каустики, которая верна и для произвольной замкнутой ломаной. Для ломаной мы определим понятие *вершины* (как точки локального экстремума кривизны), не вводя самого понятия кривизны. Вместе с тем это определение полностью соответствует понятию вершины в гладком случае.

2.2. Рассмотрим на плоскости замкнутую ориентированную конечнозвенную ломаную Γ с вершинами $V_1, \dots, V_n$, занумерованными циклически. Назовем вершину V_i *положительной*, если левый угол в V (при обходе ломаной Γ в соответствии с ориентацией) не превосходит π, и *отрицательной* – в противном случае.

Пусть $C_i = C(V_{i-1}V_iV_{i+1})$. (Для простоты мы считаем, что никакие три последовательные вершины кривой Γ не лежат на одной прямой.)

Предположим, что вершина V_i – положительная. Будем говорить, что *кривизна в вершине* V_i *больше* (соответственно, *меньше*), *чем кривизна в вершине* V_{i+1} и писать $V_i \succ V_{i+1}$ (соответственно, $V_i \prec V_{i+1}$), если вершина V_{i+1} – положительная, а V_{i+2} лежит вне (соответственно, внутри) окружности C_i, или же вершина V_{i+1} – отрицательная, а V_{i+2} лежит внутри (соответственно, вне) окружности C_i.

Для сравнения кривизн в вершинах V_i и V_{i+1}, когда вершина V_i – отрицательная, надо заменить в предыдущем определении слово "больше" на "меньше", а "вне" – на "внутри". Несложно проверить корректность этого определения, т.е. что если $V_i \succ V_{i+1}$, то $V_{i+1} \prec V_i$.

2.3. Экстремальные вершины. Вершина V_i ломаной называется *экстремальной*, если кривизна в ней больше (соответственно меньше), чем кривизны в двух соседних вершинах, т.е.

$$V_{i+1} \prec V_i \succ V_{i-1} \quad \text{или} \quad V_{i+1} \succ V_i \prec V_{i-1}.$$

Замечание. В работе [21] вершина V_i называется *опорной*, если все вершины ломаной Γ лежат по одну строну от окружности C_i. В соответствии с этим определением естественно было бы называть вершину V_i *экстремальной* (или *локально-опорной*), если вершины V_{i-2} и V_{i+2} одновременно лежат внутри или вне окружности C_i. Однако такое определение не всегда согласуется с приведенном выше. Несложно привести пример невыпуклого четырехугольника у которого есть локально-опорная, но не экстремальная вершина.

2.4. Каустики. Следуя В. И. Арнольду, *каустикой* гладкой плоской кривой назовем множество центров кривизны ее точек. (В классической дифференциальной геометрии каустику называют *эволютой*.)

По аналогии с гладким случаем каустику можно определить для произвольной замкнутой ломаной $\Gamma = V_1 \dots V_n$. Положим

$$O_i = O(V_{i-1}V_iV_{i+1}).$$

Тогда ломаную $K(\Gamma) = O_1 \dots O_n$ и будем называть *каустикой* ломаной Γ.

В гладком случае центр кривизны вершины кривой является каспом каустики. Рассмотрим точку V гладкой кривой Γ с ненулевой кривизной. Пусть $V', V'' \in \Gamma$ – близкие к V точки, лежащие на равном расстоянии h по разные стороны от V. Заметим, что при $h \to 0$ точка $O(V'VV'')$ стремится к центру кривизны (т.е. к точке каустики). Несложно доказать, что если V не является вершиной, то $\angle V'VV'' = \angle O(V')O(V)O(V'')$, а если V – вершина, то эти углы отличаются на π. Таким образом, абсолютная величина разности между углами вершины и каспа равна π.

В соответствии с этим дадим определение каспа каустики $K(\Gamma)$ для ломаной.

2.5. Каспы. Вершина O_i каустики $K(\Gamma)$ называется *каспом*, если

$$\angle V_{i-1}V_iV_{i+1} - \angle O_{i-1}O_iO_{i+1} = \pm\pi.$$

Теорема 1. *Вершина V_i ломаной Γ является экстремальной тогда и только тогда, когда вершина O_i является каспом каустики $K(\Gamma)$.*

Эта теорема показывает соответствие определения экстремальности вершины ломаной определению в гладком случае.

Доказательство сводится к простому перебору случаев положительности и отрицательности вершин V_{i-1} и V_{i+1} и расположения вершин V_{i-2} и V_{i+2} относительно окружности C_i. •

2.6. Индекс кривой. Пусть Γ – плоская ориентированная замкнутая гладкая кривая или ломаная. Допускается случай самопересечения кривой. Для простоты изложения будем считать, что Γ – в общем положении, т.е. у гладкой кривой нет прямолинейных участков, а у ломаной – никакие три последовательные вершины не лежат на одной прямой.

Как и выше, назовем экстремальную вершину кривой Γ *положительной*, если ее центр кривизны лежит слева по направлению обхода в положительном направлении, и *отрицательной* – в противном случае. Обозначим через N_+ (соответственно, N_-) число положительных (соотв., отрицательных) экстремальных вершин кривой Γ.

Для Γ определено понятие индекса $\mathrm{ind}(\Gamma)$. Для ломаной индекс можно определить как

$$\frac{1}{2\pi}\sum_i(\pi - \angle V_{i-1}V_iV_{i+1}),$$

а для ориентированной гладкой кривой – как число вращения касательного вектора кривой или как величину

$$\frac{1}{2\pi}\int k(s)ds,$$

где $k(s)$ – кривизна в точке s.

2.7. Индекс каустики кривой. Для формулировки основного результата этого параграфа требуется определить понятие индекса и для каустики. В этом случае вышеуказанное определение индекса формально не годится, так как для точек кривой Γ, в которых кривизна равна нулю, центр кривизны находится в "бесконечно удаленной точке", а в каспах не определен касательный вектор. Однако несложно понять, что и в этом случае можно корректно определить индекс. Заметим лишь, что при обходе кривой вращение касательного вектора к каустике непрерывно везде (включая и те точки кривой, где кривизна обращается в нуль), кроме каспов, где происходит скачок на π. Индекс каустики можно строго определить как предел индекса каустики ломаной, равномерно приближающей кривую.

Теорема 2. $N_+ - N_- = 2\,\mathrm{ind}(\Gamma) - 2\,\mathrm{ind}(K(\Gamma))$.

Доказательство. Доказательство проводится сначала для случая ломаной. Если вершина $V_i \in \Gamma$ не является экстремальной, то

$$\angle O_{i-1}O_iO_{i+1} = \angle V_{i-1}V_iV_{i+1}.$$

Для экстремальной вершины эти углы отличаются на π, если вершина положительная, и на $-\pi$, если отрицательная. Подставляя эти углы в выражение для вычисления индекса ломаной, получим требуемую формулу.

Приближая гладкую кривую ломаной, в пределе получим нашу формулу и для гладкой кривой. •

Как соотносится теорема 2 с теоремой о 4 вершинах? Поясним это для классического случая – овала. Заметим, что для овала $N_- = 0$, а $\mathrm{ind}(\Gamma) = 1$. Поэтому теорема о 4 вершинах для овала получается из теоремы 2 при помощи того дополнительного факта, что $\mathrm{ind}(K(\Gamma)) < 0$ (доказательство см., например, в [14]).

В. И. Арнольд обратил мое внимание на то, что предыдущая формула очень похожа на формулу для индекса Маслова сферических кривых из его работы [3]. Оказывается, что список формул такого типа можно продолжить.

2.8. Задача о числе касательных. Рассмотрим задачу о числе касательных к кривой, проходящих через заданную точку. Пусть Γ – плоская замкнутая гладкая кривая или ломаная, а p – точка на плоскости. Нас интересуют касательные, проведенные из точки p к кривой Γ. В случае, когда Γ – ломаная, касательной считается прямая l, проходящая через вершину V ломаной так, что соседние с V вершины ломаной лежат по одну сторону от l. Зададим, как и выше, знак точек касания согласованно со знаком индекса кривой и обозначим через N_+ число положительных точек касания, а через N_- – отрицательных. Здесь $\mathrm{ind}_p(\Gamma)$ обозначает индекс кривой Γ относительно точки p.

Теорема 3. $N_+ - N_- = 2\,\mathrm{ind}(\Gamma) - 2\,\mathrm{ind}_p(\Gamma)$.

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущей. Сначала она доказывается для ломаной, а потом, путем предельного перехода, – для гладкой кривой. •

Явная схожесть теорем 2 и 3 и формулы Арнольда, на наш взгляд, показывает, что они являются частными случаями какого-то более общего факта о числе касательных.

2.9. Случай полиэдров. В заключение параграфа отметим, что все приведенные в нем определения для ломаных несложно перенести на полиэдры.

Пусть M – симплициальный d-мерный многогранник, погруженный в $\mathbb{R}^{d+1}$. Роль вершин V_i будут играть его $(d-1)$-мерные грани, а роль окружности C_i – сфера, на которой лежат все d вершин соответствующей $(d-1)$-мерной грани и две соседние к ней вершины. Как и в случае $d=1$, по знаку угла грани ($>$ или $<\pi$) и положению (внутри или вне) по отношению к этим сферам соседних вершин можно ввести порядок $\prec$ и $\succ$ для соседних $(d-1)$-мерных граней многогранника M, а стало быть и дать определение (локальной) экстремальности. В добавление к эстремалям, при $d>1$ здесь могут быть и другие "особенности", например, "седла", при $d=2$. Интересно было бы найти обобщение теоремы 2 для многомерного случая.

§3. Экстремальные грани многогранника M^d в $\mathbb{R}^{d+1}$

В этом параграфе приводится обобщение основной теоремы работы [20] об экстремальных сферах на случай невыпуклого многогранника. Случай $d=1$ в точности соответстветствует теореме В. Д. Седых о 4 экстремальных (опорных) окружностях [21].

3.1. Экстремальные сферы и грани. Рассмотрим замкнутый симплициальный d-мерный многогранник M в $\mathbb{R}^{d+1}$. Сфера, проходящая через одну или несколько его вершин, называется *пустой* (соответственно, *полной*), если все остальные вершины многогранника M лежат вне (соответственно, внутри) этой сферы. Назовем сферу *экстремальной*, если она – пустая, либо полная. Назовем $(d-1)$-мерную грань многогранника M *экстремальной*, если экстремальной является описанная сфера симплекса, образованного этой гранью и двумя ее соседними вершинами.

3.2. D-многогранники. Назовем симплициальный многогранник $M\subset\mathbb{R}^{d+1}$ *D-многогранником* (от слова *диск*), если выполнены следующие условия:

1) никакие $d+3$ его вершин не лежат на одной сфере (или плоскости);

2) многогранник M гомеоморфен сфере S^d и ограничивает замкнутый топологический диск, а замыкание его дополнения гомеоморфно проколотому диску;

3) вокруг любой его гиперграни (d-мерной грани) можно описать пустую сферу.

Теорема 4. *У всякого d-мерного замкнутого D-многогранника M имеется $\geqslant 2d+2$ экстремальных $(d-1)$-мерных граней.*

Прежде чем доказывать теорему 4, разберем подробнее, что означают условия 1)–3) в определении D-многогранника. Первое условие – это условие "общего положения" (оно наложено для упрощения формулировки). Условие 2) означает, что M разбивает сферу S^{d+1} на два шара. (Если верна кусочно-линейная гипотеза Шенфлиса, то достаточнор потребовать, чтобы M был гомеоморфен S^d.) Наконец, условие 3) по сути означает, что M является подкомплексом *триангуляции Делоне* множества своих вершин (см. ниже). В частности, если многогранник M – *выпуклый*, то он является D-многогранником в том и только в том случае, если он удовлетворяет условию 1.

Буква D в названии – в честь Б. Н. Делоне, впервые исследовавшего разбиения, сейчас называемые его именем [11]. Поскольку нам необходимы некоторые факты об этих триангуляциях, приведем их здесь. Более подробные сведения о диаграммах Вороного и триангуляциях Делоне можно почерпнуть из работ [11, 15–17, 24] и др.

3.3. Области Вороного. Пусть в $\mathbb{R}^{d+1}$ задано множество S, состоящее из n точек $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Область* (ячейка) Вороного $V_i(S)$ точки p_i – это множество точек из $\mathbb{R}^{d+1}$, находящихся от p_i не дальше, чем от любой другой точки множества S:

$$V_i(S) := \{x \mid \forall\, j \neq i\colon d(x,p_i) \leqslant d(x,p_j)\},$$

где $d(x,y)$ – евклидово расстояние между x и y. Получаемые таким образом n выпуклых областей образуют разбиение пространства, называемое в вычислительной геометрии *диаграммой Вороного*.

(Список альтернативных наименований весьма обширен. В математике области $V_i(S)$ также называют *ячейками Дирихле* и *обла-*

стями Вороного–Дирихле. В географии и метеорологии эти области на плоскости называют *полигонами Тиссена*. В физике и химии области $V_i(S)$ называют *зонами Вигнера–Зейтца*, а в биологии и психологии границы этих областей называют *срединными осями изменения*. По всей видимости, этими названиями список не исчерпывается.)

3.4. Триангуляция Делоне. Рассмотрим структуру, двойственную диаграмме Вороного множества S. Предположим, что d-грань диаграммы Вороного разделяет две области Вороного $V_i(S)$ и $V_j(S)$. Соединим точки p_i и p_j отрезком, который назовем *ребром Делоне*. Далее, если $(d-k)$-мерная грань диаграммы Вороного является общей для $k+2$ областей Вороного, то соответствующие этим областям точки являются вершинами $(k+1)$-*мерного симплекса Делоне*. Если никакие $d+3$ точек из S не лежат на одной сфере, то построенный таким образом симплициальный комплекс задает триангуляцию выпуклой оболочки множества S, причем множество вершин триангуляции совпадает с S. Эту триангуляцию и называют *триангуляцией Делоне* множества S.

Теорема (Б. Н. Делоне [11]). *Триангуляция множества S является триангуляцией Делоне тогда и только тогда, когда вокруг любого ее симплекса можно описать пустую сферу.*

Отсюда сразу вытекает, что, как уже отмечалось, условие 3 в определении D-многогранника означает, что этот многогранник является подкомплексом триангуляции Делоне множества его вершин.

3.5. Конструкция Вороного. Обратимся к конструкции, восходящей к Г. Ф. Вороному [24]. Рассмотрим параболоид

$$\Pi := \{(x_1, \dots, x_{d+2}) \mid x_{d+2} = x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2\} \subset \mathbb{R}^{d+2}.$$

Пусть

$$T\colon \Pi \to \mathbb{R}^{d+1}, \quad (x_1, \dots, x_{d+1}, x_{d+2}) \mapsto (x_1, \dots, x_{d+1}),$$

– его проекция на $\mathbb{R}^{d+1}$.

Обозначение. Если дано множество $A \subset \mathbb{R}^n$, то через $\mathrm{CH}(A)$ обозначим границу его выпуклой оболочки.

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ – множество вершин D-многогранника M. Тогда множество S можно "поднять" на параболоид Π,

$$P := T^{-1}(S).$$

В таком случае $\mathrm{CH}(P) \subset \mathbb{R}^{d+2}$ является выпуклым симплициальным многогранником. Продолжим отображение $T^{-1}: S \to \mathbb{R}^{d+2}$ по линейности на $\mathrm{CH}(S)$:

$$\widetilde{T}\colon\ \mathrm{CH}(S) \to \mathbb{R}^{d+2}.$$

Очевидно, что $\widetilde{T}(\mathrm{CH}(S))$ разбивает многогранник $\mathrm{CH}(P)$ на две части – $\mathrm{CH}_{\pm}(P)$, – называемые *верхней* и *нижней выпуклыми оболочками* множества P. Оказывается, что проекция T задает симплициальный гомеоморфизм $\widetilde{T}$ между $\mathrm{CH}_{-}(P)$ и триангуляцией Делоне множества S, а $\mathrm{CH}_{+}(P)$ симплициально гомеоморфно такой триангуляции многогранника $\mathrm{CH}(S)$, что сфера, описанная вокруг любого $(d+1)$-мерного симплекса триангуляции, будет полной.

По условию, M является D-многогранником, а стало быть – подкомплексом триангуляции Делоне множества S. Из этого следует, что $F = \widetilde{T}(M)$ – многогранник, кусочно-линейно вложенный в $\mathrm{CH}(P)$. Из условия 2 в определении D-многогранника вытекает, что F разбивает $\mathrm{CH}(P)$ на два $(d+1)$-мерных полиэдра P_1 и P_2, каждый из которых гомеоморфен шару D^{d+1}. Границей каждого из них явлется многогранник F, а гиперграни выпуклой оболочки задают триангуляции полиэдров P_1 и P_2.

3.6. Доказательство теоремы 4. Для него, с небольшими изменениями, подходит схема доказательства основной теоремы работы [20], в которой, в свою очередь, используется техника работы [10]. Коротко, идея доказательства состоит в следующем.

Воспользуемся теми же обозначениями, что и выше. По условию теоремы, M является D-многогранником, поэтому многогранник F разбивает выпуклый многогранник $\mathrm{CH}(P)$ на два $(d+1)$-мерных полиэдра P_1 и P_2 (нижняя и верхняя части), каждый из которых гомеоморфен шару D^{d+1}.

Границей каждого из этих полиэдров явлется многогранник F, а гиперграни выпуклой оболочки задают триангуляции полиэдров P_1 и P_2. Симплекс триангуляции полиэдра P_i называют *граничным*, если он образован $(d-1)$-мерной гранью границы P_i и двумя ее соседними вершинами.

Утверждение. *Каждая из этих триангуляций имеет* $\geqslant d+1$ *граничных симплексов.*

Прежде чем доказывать этот факт, поясним, как из него следует утверждение теоремы. Каждый граничный симплекс однозначно определяет проходящую через него гиперплоскость H в $\mathbb{R}^{d+2}$. Поскольку граничный симплекс является гранью выпуклого многогранника $\mathrm{CH}(P)$, то F лежит по одну сторону от H. Несложно показать, что проекция T сечения параболоида Π гиперплоскостью H является сферой, а так как F лежит по одну сторону от H, то и вершины M лежит либо внутри, либо снаружи сферы. Следовательно, эта сфера и соответствующая ей $(d-1)$-мерная грань многогранника M являются экстремальными.

Доказательство утверждения. Чтобы доказать, что у P_i есть $d+1$ граничных симплексов, сначала рассмотрим такую прямую l_i и точку p_i на ней, что P_i является "зоной видимости" из p_i, т.е. отрезок, соединяющий p_i с любой из точек P_i, не содержит внутри других точек P_i, а прямая l_i пересекает P_i в точности по одной точке. (Существование таких точек p_i и прямых l_i почти очевидно. Если в качестве прямой l_i взять ось симметрии параболоида, то нижняя часть $\mathrm{CH}_-(P)$ целиком видна из точек расположенных достаточно далеко в нижней части l_i, а верхняя часть $\mathrm{CH}_+(P)$ – из точек, расположенных достаточно высоко по l_i.)

Рассмотрим пересечение прямой l_i с гиперплоскостями в $\mathbb{R}^{d+2}$, содержащими $(d+1)$-мерные грани (симплексы триангуляции) многогранника P_i. Занумеруем эти грани в соответствии с пересечением с l_i по отношению к P_i. Для этого на l_i задается направление (ориентация) "внутрь" выпуклой оболочки P. Грань, плоскость которой пересекает l_i в самой близкой к P_i точке, получает номер 1, следующая – номер 2, и т.д.

Оказывается, что этот порядок задает такую развертку триангуляции P_i, что объединение первых (по нумерации) n симплексов будет гомеоморфно шару D^{d+1}, а симплекс с самым большим номером является граничным (см. [10]).

Последний шаг доказательства состоит в том, что, изменяя прямую l_i, можно получить $d+1$ различных нумераций симплексов и, таким образом, $d+1$ различных граничных симплексов. Для этого в [20] рассматривается множество N_i – нижняя (по направлению l_i) оболочка гиперплоскостей, проходящих через

$(d+1)$-мерные грани многогранника P_i. Несложно показать, что на N_i найдется точка, в которой пересекаются $\geqslant d+1$ гиперплоскостей. Если провести l через эту точку, то "малое смещение" l_i даст $d+1$ различных граничных симплексов. •

Поскольку у нас два полиэдра P_1 и P_2, и у каждого $\geqslant d+1$ граничных симплексов, то M имеет $\geqslant 2d+2$ экстремальных сфер. Это и есть утверждение теоремы. •

§4. Регулярные и шелушащиеся триангуляции. Гипотеза об "ушах"

Ключевой момент доказательства теоремы 4 – существование $d+1$ граничных симплексов у триангуляции полиэдра P_i. Напомним, что полиэдр P_i гомеоморфен шару D^{d+1}, а все вершины его триангуляции лежат на границе этого шара. Таким образом, в теоремах о 4 вершинах (вернее о $2d+2$ экстремальных сферах) возникает комбинаторно-топологический вопрос:

Вопрос. *Когда у триангуляции $(d+1)$-мерного шара найдется $d+1$ "ушей"?*

Здесь мы назвали граничный симплекс "ухом". Точное определение этого образного (и принятого в вычислительной геометрии) термина следующее: $(d+1)$-мерный симплекс s триангуляции t шара D^{d+1} называется "*ухом*", если по крайней мере 2 его d-мерных грани лежат на границе шара.

Сначала разберем простой случай $d=1$.

Предложение. *Пусть t – какая-то триангуляция n-угольника M, где $n>3$ и все вершины триангуляции являются вершинами M. Тогда число "ушей" триангуляции t ровно на 2 превосходит число внутренних треугольников.*

Доказательство. Обозначим через x число "ушей" в t, через y – число треугольников у которых ровно одна сторона является стороной M, и через z – число внутренних треугольников. Тогда число сторон M равно $2x+y$, т.е.

$$2x+y=n. \qquad (*)$$

С другой стороны, общее число треугольников равно $n-2$, т.е.

$$x+y+z=n-2. \qquad (**)$$

Вычитая (∗∗) из (∗), получим $x - z = 2$, что и требовалось доказать. •

Следствие. *Всякая триангуляция многоугольника M имеет по крайней мере 2 "уха".* •

Это утверждение можно считать топологическим вариантом теоремы о 4 вершинах, а формулу $x - z = 2$ – вариантом теоремы Бозе.

В общей ситуации триангуляция d-мерного шара, где $d > 2$, может не иметь ни одного "уха". В 1958 г. М. Е. Рудин [19] построила первый пример такой триангуляции для выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$.

В действительности она построила пример нешелушащейся триангуляции шара D^3. (Триангуляция t шара D^d, все вершины которой лежат на границе шара, называется *шелушащейся* (shellable), если d-мерные симплексы s_j в триангуляции t можно упорядочить (занумеровать) так, что объединение $P_k = s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_k$ гомеоморфно d-мерному шару для любого $k = 1, \ldots, m$. Здесь m обозначает число d-мерных симплексов триангуляции t.)

Предложение. *Всякая шелушащаяся триангуляция шара D^n имеет хотя бы одно "ухо".*

Доказательство. Рассмотрим последний по порядку симплекс s_m. Тогда, по определению, $P_m = P_{m-1} \cup s_m$, где P_m и P_{m-1} гомеоморфны шару. Это означает, что s_m является "ухом", поскольку в противном случае P_{m-1} не будет гомеоморфно шару. (Только операция "отрезание уха" позволяет в обратном порядке задать шелушение триангуляции.) •

В частности, из этого предложения следует, что если у триангуляции нет ушей, то она не является шелушащейся.

Сформулируем теперь гипотезу, которая является полным топологическим аналогом теоремы 4.

Гипотеза об "ушах". *У всякой шелушащейся триангуляции шара D^d, состоящей по крайней мере из d симплексов, имеется $\geqslant d$ "ушей".*

В пользу этой гипотезы имеется множество аргументов. Однако нам не удалось пока получить ее полное доказательство.

Завершим эту работу результатом, который показывает, что гипотеза об "ушах" верна в довольно общей геометрической ситуации.

Пусть $S = \{p_i\}$ – множество из n точек в $\mathbb{R}^d$ и t – триангуляция множества S. Триангуляция t называется *регулярной*, если существует строго выпуклая кусочно-линейная функция, определенная на выпуклой оболочке множества S и линейная на каждом симплексе триангуляции t (см. [7, 16]).

Несложно увидеть, что триангуляция Делоне множества S регулярна. Для этого зададим в вершинах триангуляции значения $y_i = \|p_i\|^2$ и продолжим функцию на симплексы по линейности. По вышеотмеченному свойству триангуляции Делоне построенная функция будет выпуклой.

Предложение [10]. *Всякая регулярная триангуляция является шелушащейся.*

Этот факт показывает, что та триангуляция, которую построила М. Е. Рудин, не является регулярной. Известны и другие примеры нерегулярных триангуляций [7].

Для регулярных триангуляций гипотеза об "ушах" верна.

Теорема 5. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^d$ – конечное множество, лежащее на границе своей выпуклой оболочки: $S \subset \mathrm{CH}(S)$. Тогда всякая регулярная триангуляция множества S, содержащая $\geqslant d$ симплексов, имеет $\geqslant d$ "ушей".*

Доказательство. Оно по сути повторяет доказательство теоремы 4. Там надо заменить параболоид на график выпуклой функции, существующей согласно определению регулярности, и рассматривать только нижнюю часть $\mathrm{CH}_-(P)$. Из существования d граничных симплексов непосредственно следует существование d "ушей". •

Заключение

Одной из главных целей данной работы было показать, что прогресс в дискретных вариантах теоремы о 4 вершинах не менее значителен, чем в гладком случае. Эти теоремы имеют длинную историю, которая началась с леммы Коши.

Кроме того, в дискретном случае имеются многомерные обобщения. Возможно, они помогут сформулировать и доказать аналогичные теоремы для гладкого случая.

Литература

1. А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники.* М., ГИТТЛ, 1950.
2. V. I. Arnold, *Topological invariants of plane curves and caustics.* Rutgers Univ. Lect. Series, Vol. 5, Providence, Am. Math. Soc., 1994.
3. В. И. Арнольд, *Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов.* — УМН **50:1** (1995), 3–68.
4. V. I. Arnold, *On the number of flattening points of space curves.* — Am. Math. Soc. Transl. **171** (1996), 11–22.
5. В. И. Арнольд, *Замечания об экстатических точках плоских кривых.* — В кн.: Владимир Игоревич Арнольд. Избранное-60. М., ФАЗИС, 1997, с. 605–618.
6. А. М. Берлянт, О. Р. Мусин, Т. В. Собчук, *Картографическая генерализация и теория фракталов.* М., Астрея, 1998.
7. L. J. Billera, P. Filliman, B. Sturmfels, *Construction and complexity of secondary polytopes..* — Adv. Math. **83** (1990.), 155–179.
8. В. Бляшке, *Круг и шар.* М., Наука, 1967.
9. R. C. Bose, *On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed oval.* — Math. Ann. **35** (1932), 16–24.
10. H. Bruggesser, P. Mani, *Shellable decompositions of cells and spheres.* — Math. Scand. **29** (1971), 197–205.
11. Б. Н. Делоне, *Sur la sphere vide. A la memorie de Georges Voronoi, О простом шаре.* — Известия Акад. наук СССР, отд. мат. и естеств. наук. № 6 (1934), 793–800.
12. J. A. Garcia, J. Fdes-Valdivia, *Boundary simplification in Cartography preserving the characteristics of the shape features.* — Computers Geosci. **20** (1994), 349–368.
13. S. Mukhopadhayaya, *New methods in the geometry of a plane arc – I, Cyclic and sextactic points.* — Bull. Calcutta Math. Soc. **1** (1909), 31–37.
14. О. Р. Мусин, *Теорема о четырех вершинах для многоугольника.* — Квант. № 2 (1997), 11–13.
15. O. R. Musin, *Properties of the Delaunay triangulation.* Proc. 13th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. ACM Press, 1997, pp. 424–426.
16. O. R. Musin, *Construction of the Voronoi diagram and secondary polytope.* Voronoi impact on modern science. Book 2. Kiev, Institute of Math., 1998, pp. 105–114.
17. O. R. Musin, *Curvature extreme and Delaunay triangulation.* Voronoi conference on analytic number theory and space tilings, Kiev, September 7–14. Abstracts, 1998, pp. 46–47.
18. О. Р. Мусин, *Системы Чебышева и нули функции на выпуклой кривой.* — Тр. МИАН **221** (1998), 247–256.
19. M. E. Rudin, *An unshellable triangulation of a tetrahedron.* — Bull. Am. Math. Soc. **64** (1958), 90–91.
20. A. Schatteman, *A four-vertex theorem for polygons and its generalization to polytopes.* — Geometriae Dedicata **34** (1990), 229–242.
21. В. Д. Седых, *Теорема о четырех опорных вершинах ломаной.* — Функц. анализ и его прил. **30**, № 3 (1996), 88–90.

22. С. Н. Сербенюк, О. Р. Мусин, Т. В. Собчук, *Кривизна и генерализация линейных объектов на картах.* — Вестник Моск. Ун-та, сер. 5. № 5 (1990), 49–56.
23. M. Umehara, *A unified approach to the four vertex theorems. I.* — Am. Math. Soc. Transl., Ser. 2 **190** (1999), 185–228.
24. G. F. Voronoi, *Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques.* — J. Reine u. Angew. Math. **34** (1908), 198–287.
25. B. Wegner, *Bose's vertex theorem for simply closed polygons.* — Math. Pannon **6** (1995), 121–132.

Musin O. R. Curvature extrema and four-vertex-theorems for polygons and polyhedra.

Discrete analogs of curvature extrema and generalizations of the four-vertex theorem to the case of polygons and polyhedra are suggested and developed. Several interrelated approaches are considered. One of the main results says that a regular triangulation of a d-ball containing $\geqslant d$ simplices has at least d “ears”.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oleg_musin@hotmail.com

Поступило 28 декабря 2000 г.