Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

В. В. Макеев

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ АФФИННЫХ ДИАМЕТРОВ И АФФИННЫХ МЕДИАН ВЫПУКЛОЙ ФИГУРЫ

**Виктору Абрамовичу
в день его рождения**

Работа переносит основной результат работы [1] с фигур постоянной ширины на произвольные плоские выпуклые фигуры с C^2-гладкой границей всюду положительной кривизны.

Под *выпуклой фигурой* (*телом*) в дальнейшем понимается компактное выпуклое подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ (пространства $\mathbb{R}^n$) с непустой внутренностью. В дальнейшем $V(K)$ обозначает объем множества $K \subset \mathbb{R}^n$, $S(K)$ – площадь множества $K \subset \mathbb{R}^2$, а

$$\Delta K = \{\mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}$$

– его *разностное множество*.

§1. Аффинные диаметры

Хорда выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *аффинным диаметром*, если ее концы лежат в параллельных опорных гиперплоскостях тела K.

Для $1 \leqslant i \leqslant +\infty$ обозначим через K_i множество точек тела $K \subset \mathbb{R}^n$, через которые проходит ровно i его аффинных диаметров, и положим при $n = 2$

$$\mathbb{S}_{\mathrm{diam}}(K) := S(K_1) + 3S(K_3) + 5S(K_5) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)S(K_{2n+1})\,.$$

Теорема 1.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклое тело с C^2-гладкой границей ∂K всюду положительной гауссовой кривизны. Тогда*

1) $V(K_2) = V(K_4) = \cdots = V(K_\infty) = 0$*; в частности, при* $n = 2$

$$S(K_2) = S(K_4) = \cdots = S(K_\infty) = 0;$$

2) *при* $n = 2$ *имеют место неравенства*

$$\frac{S(\Delta K)}{4} \leqslant \mathbb{S}_{\text{diam}}(K) \leqslant \frac{S(\Delta K)}{2}.$$

Вопрос. Верно ли многомерное обобщение указанного неравенства:

$$\frac{V(\Delta K)}{2^n} \leqslant V(K_1) + 3V(K_3) + \cdots \leqslant \frac{V(\Delta K)}{2}?$$

Доказательство. 1) Ограничимся случаем $n = 2$. Пусть $\mathbb{R}P^1$ – множество прямых, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим тавтологическое линейное расслоение γ над $\mathbb{R}P^1$, слоем которого над прямой $l \subset \mathbb{R}^2$ является она же, рассматриваемая как одномерное векторное пространство. Обозначим через E объединение единичных, симметричных относительно O отрезков прямых в тотальном пространстве расслоения γ. Очевидно, что, с топологической точки зрения, E – обычный лист Мебиуса.

В условиях теоремы определено гладкое отображение $f\colon E \to K$, при котором всякий единичный отрезок из E посредством гомотетии с положительным коэффициентом (или параллельного переноса) отображается на единственный параллельный ему аффинный диаметр фигуры K.

По построению $f(\partial E) \subset \partial K$ и, следовательно, определено непрерывное отображение пар $f\colon (E, \partial E) \to (K, \partial K)$, которое на границе является гомеоморфизмом, а следовательно имеет степень 1 modulo 2. Поэтому точки фигуры K, имеющие четное число прообразов при отображении f, т.е. точки из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_{2i}$, являются критическими значениями отображения f и по лемме Сарда образуют множество меры нуль, что и доказывает первую часть теоремы.

2) Обозначим через $d(\phi)$ длину аффинного диаметра $l(\phi)$ фигуры K, наклоненного под углом $\phi \in [0, \pi]$ к оси Ox. Ясно, что близкий аффинный диаметр $l(\phi + \Delta\phi)$ пересекает диаметр $l(\phi)$ и делит его в отношении, близком к $R(\phi)/R(\phi + \pi)$, где $R(\phi)$ и $R(\phi + \pi)$ – радиусы кривизны границы ∂K в концах аффинного диаметра $l(\phi)$. Поэтому при повороте на малый угол $\Delta\phi$ аффинный диаметр заметает площадь, примерно равную

$$\frac{R^2(\phi) + R^2(\phi + \pi)}{2\big(R(\phi) + R(\phi + \pi)\big)^2} d^2(\phi)\Delta\phi.$$

Следовательно,

$$\mathbb{S}_{\text{diam}}(K) = \int\limits_0^{\pi} \frac{R^2(\phi) + R^2(\phi + \pi)}{2\big(R(\phi) + R(\phi + \pi)\big)^2} d^2(\phi)\, d\phi.$$

Поскольку значения подынтегральной функции находятся между $d^2(\phi)/4$ и $d^2(\phi)/2$, получаем неравенство

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} d^2(\phi)\, d\phi \leqslant \mathbb{S}_{\text{diam}}(K) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} d^2(\phi)\, d\phi$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\pi} d^2(\phi)\, d\phi = S(\Delta K),$$

получаем требуемое неравенство. $\bullet$

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$2S(K_3) + 4S(K_5) + \dots \leqslant \frac{S(\Delta K)}{2} - S(K).$$

Это так, поскольку через каждую точку фигуры K проходит аффинный диаметр и, следовательно,

$$S(K_1) + S(K_3) + S(K_5) + \dots = S(K). \qquad \bullet$$

Следствие 2. *Имеет место неравенство*

$$S(K_3) + 2S(K_5) + 3S(K_7) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n\, S(K_{2n+1}) < S(K). \qquad (*)$$

Это вытекает из предыдущего следствия с учетом известного неравенства $S(\Delta K) < 6\, S(K)$, выполняющегося для отличных от треугольника выпуклых фигур. $\bullet$

Оценка $(*)$ неулучшаема, поскольку для сглаженного треугольника K площадь $S(K_3)$ может быть сколь угодно близка к $S(K)$.

§2. Аффинные медианы

Привлекаемый в §1 и в [1] подход можно использовать в задаче об *аффинных медианах* – хордах выпуклой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$, делящих ее площадь пополам [2]. Очевидно, что через каждую точку фигуры K проходит хотя бы одна аффинная медиана. Пусть $K_i' \subset K$ – множество тех точек фигуры K, через которые проходит ровно i ее медиан. Положим

$$\mathbb{S}_{\mathrm{med}}(K) := S(K_1') + 3S(K_3') + 5S(K_5') + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)S(K_{2n+1}')\,.$$

Теорема 2.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ – гладкая выпуклая фигура. Тогда*

1) *имеем*

$$S(K_2') = S(K_4') = \cdots = S(K_\infty') = 0;$$

2) *имеет место неравенство*

$$\mathbb{S}_{\mathrm{med}}(K) \leqslant \frac{S(\Delta K)}{4}.$$

Доказательство. 1) См. доказательство теоремы 1.1.

2) Для $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ обозначим через $m(\phi)$ длину медианы $l(\phi)$ фигуры K, наклоненной под углом ϕ к оси Ox. Так как множество $K_i' \subset K$ заметается медианами i-кратно и две близкие медианы пересекаются вблизи своих середин, то

$$\mathbb{S}_{\mathrm{med}}(K) = \int_0^\pi \frac{m^2(\phi)}{4}d\phi \leqslant \int_0^\pi \frac{d^2(\phi)}{4}d\phi = \frac{S(\Delta K)}{4}. \quad \bullet \qquad (**)$$

Из первого равенства в (**) вытекает очевидное следствие:

Следствие. *Пусть M – наибольшая из длин аффинных медиан фигуры K. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathbb{S}_{\mathrm{med}}(K) \leqslant \frac{\pi M^2}{4}.$$

В частности,

$$S(K) \leqslant \frac{\pi M^2}{4}. \quad \bullet$$

Как я узнал от В. А. Залгаллера, последнее неравенство было давно высказано Пойя в качестве гипотезы.

Литература

1. В. В. Макеев, *Одно экстремальное свойство треугольника Релло.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **267** (2000), 152–155.
2. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* М., Наука, 1971.

Makeev V. V. A kinematic formula for affine diameters and affine medians of a convex set.

For a planar convex set K with C^2-smooth boundary, the area of the set of the points lying on a given number of affine diameters of K is estimated. As a corollary, it is proved that the area of K is at most $\pi M^2/4$, where M is the largest length of a chord of K halving the area of K.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 декабря 2000 г.