Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

В. В. Макеев

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Виктору Абрамовичу Залгаллеру к 80-летию

Цель данной работы – решить несколько экстремальных задач о двумерных сечениях выпуклых тел и сформулировать гипотезу о канонических расслоениях над грассмановыми многообразиями, решение которой известно автору лишь в одном нетривиальном случае и которая обобщает известную теорему Дворецкого.

§1. Плоские сечения выпуклых тел

1.1. Следуя [7], обозначим через $\mathcal{E}(n)$ (соответственно, $\mathcal{E}_1(n)$) наименьшее положительное число такое, что всякое центрально-симметричное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ с центром O (соответственно, произвольное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ с отмеченной внутренней точкой O) обладает двумерным сечением, проходящим через O, содержащим некоторый круг с центром O и содержащимся в гомотетичном круге с тем же центром и коэффициентом гомотетии $1+\mathcal{E}(n)$ (соответственно, $1+\mathcal{E}_1(n)$).

В [9] высказана *гипотеза*, что при $n > 3$

$$\mathcal{E}(n) = \sec \tfrac{\pi}{2n-2} - 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_1(n) = \sec \tfrac{\pi}{n-1} - 1.$$

Там же доказано, что эти оценки асимптотически точны.

Теорема 1. *Если $n-1$ – простое нечетное число, то*

$$\mathcal{E}(n) = \sec \tfrac{\pi}{2n-2} - 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_1(n) = \sec \tfrac{\pi}{n-1} - 1.$$

Заметим, что данная теорема вычисляет $\mathcal{E}(4)$ и $\mathcal{E}_1(4)$. Ниже мы для простоты проводим подробное вычисление $\mathcal{E}_1(n)$ лишь для $n = 4$; случай произвольного n разбирается совершенно аналогично. Заметим также, что в [9] приведены примеры параллелепипедов и симплексов специального вида, показывающие точность данных оценок.

Доказательство. Пусть $p = n - 1$ – простое нечетное число.

(а) Докажем равенство $\mathcal{E}_1(p+1) = \sec \pi/p - 1$. Проведем через O $2p$ лучей, лежащих в одной плоскости и образующих равные углы π/p между соседними лучами. Занумеруем лучи циклически и обозначим через $A_1, B_1, \dots, A_p, B_p$ их точки пересечения с телом K в установленном порядке. Множество M построенных $2p$-угольников (с вершинами A_i и B_j), вписанных в K, очевидно есть не что иное, как многообразие Штифеля $V_2(\mathbb{R}^n)$ 2-реперов в $\mathbb{R}^n$ с началом в точке O.

Определим непрерывное отображение

$$F : M \to \mathbb{R}^{2p},$$

$$F(A_1 B_1 \dots A_p B_p) = (|OA_1|, \dots, |OA_p|, |OB_1|, \dots, |OB_p|).$$

Циклическая группа $\mathbb{Z}_p$ свободно действует в M циклическими перестановками вершин на четное позиций и в $\mathbb{R}^{2p}$ одновременными циклическими перестановками первых и последних p координат. Отображение F по построению $\mathbb{Z}_p$-эквивариантно. Следовательно (см. [9]), для некоторого $2p$-угольника $A_1 B_1 \dots A_p B_p \in M$ выполняются равенства

$$OA_1 = \dots = OA_p \quad \text{и} \quad OB_1 = \dots = OB_p.$$

Считаем для определенности, что $|OA_1| \geqslant |OB_1|$, и для простоты далее считаем, что $p = 3$ (рис. 1).

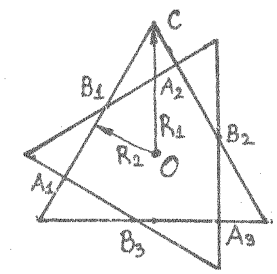

Рис. 1.

Пусть P – плоскость найденного шестиугольника $A_1 \dots B_3$. Покажем, что сечение плоскостью P – искомое. Очевидно, что $P \cap K$ содержится в объединении шестиугольника $A_1 \dots B_3$ с шестью равными треугольниками, полученными продолжением его сторон, один из которых – $\triangle B_1CA_2$ – изображен на рис. 1. Следовательно, $P \cap K$ содержится в круге D_1 радиуса OC с центром O и содержит концентрический круг D_2 радиуса, равного расстоянию от точки O до прямой A_1C. Отношение радиусов этих кругов равно $\operatorname{cosec} \angle A_1CO$. Очевидно, что $\angle A_1CA_2 = 60°$, поэтому четырехугольник A_1CA_2O вписан в окружность и $\angle A_1CO = \angle OC_1A_2 = 30°$, поскольку эти углы опираются на одинаковые дуги этой окружности. Следовательно, отношение радиусов кругов D_1 и D_2 равно $\operatorname{cosec} 30° = 2$, что и требовалось.

(б) Для доказательства равенства $\mathcal{E}(n) = \sec \pi/2p - 1$, действуя совершенно аналогично, построим центральное двумерное сечение центрально-симметричного тела K, в которое вписан $4p$-угольник $A_1B_1 \ldots A_{2p}B_{2p}$ с

$$OA_1 = \cdots = OA_{2p} \quad \text{и} \quad OB_1 = \cdots = OB_{2p}.$$

Количество сторон удваивается благодаря центральной симметрии тела K. Далее доказательство сохраняется. •

§2. Двумерные плоскости в нормированных пространствах

Всюду далее под *нормированным пространством* понимаем вещественное нормированное пространство.

На множестве нормированных пространств фиксированной размерности определена *метрика Банаха–Мазура*:

$$d(E_1, E_2) = \inf_A \{\ln(\|A\| \cdot \|A^{-1}\|)\},$$

где инфимум берется по всем линейным изоморфизмам $A\colon E_1 \to E_2$. Всюду ниже $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное арифметическое пространство со стандартной евклидовой нормой.

Теорема 2. *Всякое трехмерное нормированное пространство E содержит двумерное подпространство E^2 с*

$$d(E^2, \mathbb{R}^2) \leqslant \ln \frac{2}{\sqrt{3}},$$

причем эта оценка точна.

Доказательство. Пусть $B \subset E$ – единичный шар. Докажем, что существует двумерное подпространство $E^2 \subset E$ такое, что пересечение $E^2 \cap B$ содержит некоторый эллипс и содержится в гомотетичном эллипсе с тем же центром и коэффициентом гомотетии $2/\sqrt{3}$.

Пусть $E^2 \subset E$ – произвольная ориентированная плоскость и b – граничная точка центрально-симметричной фигуры $E^2 \cap B$. Легко проверить и хорошо известно (см. [5]), что точка b является первой вершиной A_1 вписанного в $E^2 \cap B$ аффинно-правильного шестиугольника $A_1 \dots A_6$ с центром в нуле, причем в случае, когда пересечение $E^2 \cap B$ строго выпукло, такой шестиугольник – единственный. В дальнейшем считаем единичный шар B строго выпуклым. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Итак, множество M рассматриваемых положительно ориентированных шестиугольников $A_1 \dots A_6$ гомеоморфно группе вращений $SO(3)$.

Определим непрерывное отображение

$$F\colon M \to \mathbb{R}^3.$$

Дополним аффинно-правильный шестиугольник $A_1 \dots A_6$ до аффинно-правильного 12-угольника $A_1B_1 \dots A_6B_6$ и обозначим через x, y и z длины отрезков, высекаемых фигурой $E^2 \cap B$ на лучах OB_1, OB_3 и OB_5, соответственно, а через x', y' и z' – длины отрезков, высекаемых на тех же лучах шестиугольником $A_1 \dots A_6$. Положим

$$F(A_1 \dots A_6) = \left(\frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}, \frac{z}{z'}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

Циклическая группа $\mathbb{Z}_3$ свободно действует в M перестановками вершин шестиугольников $A_1 \dots A_6$ на четное число позиций а в $\mathbb{R}^3$ – циклическими престановками координат точек. Отображение F по построению $\mathbb{Z}_3$-эквивариантно, и, следовательно, $F(M)$ содержит точку с равными координатами (см. [7, 9]). Значит, некоторый аффинный образ сечения $E^2 \cap B$ представляет собой фигуру с таким вписанным центрально-симметричным 12-угольником $A_1B_1 \dots A_6B_6$ с тем же центром, что шестиугольники $A_1 \dots A_6$ и $B_1 \dots B_6$ являются правильными, а соседние лучи образуют равные углы:

$$\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2 = \dots = \angle A_6OB_6.$$

Теперь мы находимся в ситуации, рассмотренной в теореме 1, и заканчиваем рассуждение.

Для доказательства точности полученной оценки рассмотрим норму в E, для которой шар B – параллелепипед. В этом случае сечение $E^2 \cap B$ является параллелограммом или шестиугольником, из которых эллипсом лучше всего приближается аффинно-правильный шестиугольник, что и дает требуемую оценку. $\bullet$

Теорема 2$'$. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – центрально-симетричное тело. У K существует такая ортогональная проекция, которая содержит некоторый эллипс и содержится в гомотетичном эллипсе с тем же центром и коэффициентом гомотетии $2/\sqrt{3}$.*

Пример октаэдра (или параллелепипеда) показывает, что данная оценка точна.

Доказательство. Оно такое же, как у теоремы 2, с той лишь разницей, что вместо двумерных сечений $E^2 \cap B$ нужно брать ортогональные проекции тела K на плоскости E^2. $\bullet$

Замечание. Кажется весьма вероятным, что у всякого центрально-симметричного выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$ существует центральное двумерное сечение $E^2 \cap B$, в которое вписан аффинно-правильный 12-угольник, однако доказательство этого автору неизвестно.

Определим метрику d_1 на множестве норм на фиксированном линейном пространстве E формулой

$$d_1(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) :=$$
$$= \inf\left\{\ln\frac{\alpha}{\beta} \;\middle|\; \alpha,\beta > 0,\ \beta\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \alpha\|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in E\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть на n-мерном вещественном линейном пространстве E заданы $n-1$ норм $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_{n-1}$. Тогда найдется двумерное подпространство $E_1 \subset E$ такое, что для $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ выполняется неравенство*

$$d_1(\|\cdot\|_i, \|\cdot\|_j) \leqslant \ln 2.$$

Данная оценка точна при $n = 3$.

Доказательство. Обозначим через M множество троек единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, составляющих попарно углы в $120°$ (относительно фиксированной евклидовой структуры в $\mathbb{R}^n$). Очевидно, что $M \cong V_2(\mathbb{R}^n)$ – многообразие Штифеля 2-реперов в $\mathbb{R}^n$.

Определим непрерывное отображение

$$F\colon M \to (\mathbb{R}^{n-2})^3.$$

Для $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in M$ обозначим через $E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ плоскость, содержащую векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Впишем эллипсы максимальной площади в единичные круги норм $\|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_{n-1}$ в $E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и обозначим через $\|\cdot\|'_1, \ldots, \|\cdot\|'_{n-1}$ нормы в этой плоскости с указанными эллипсами в качестве единичных кругов. Хорошо известно, что

$$d_1(\|\cdot\|_i, \|\cdot\|'_i) \leqslant \frac{\ln 2}{2}; \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1$$

(см. [5]). Положим

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) =$$
$$= \left(\frac{\|\mathbf{e}_1\|'_2}{\|\mathbf{e}_1\|'_1}, \ldots, \frac{\|\mathbf{e}_1\|'_{n-1}}{\|\mathbf{e}_1\|'_1}, \frac{\|\mathbf{e}_2\|'_2}{\|\mathbf{e}_2\|'_1}, \ldots, \frac{\|\mathbf{e}_2\|'_{n-1}}{\|\mathbf{e}_2\|'_1}, \frac{\|\mathbf{e}_3\|'_2}{\|\mathbf{e}_3\|'_1}, \ldots, \frac{\|\mathbf{e}_3\|'_{n-1}}{\|\mathbf{e}_3\|'_1} \right).$$

Группа $\mathbb{Z}_3$ свободно действует в M циклическими перестановками векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и в $(\mathbb{R}^{n-2})^3$ – циклическими перестановками точек сомножителей $\mathbb{R}^{n-2}$.

Отображение F по построению $\mathbb{Z}_3$-эквивариантно, поэтому для некоторой тройки векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in M$ имеем

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$ (см. [2]). Покажем, что тогда плоскость $E_1 = E(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – искомая. Действительно, по выбору плоскости E_1 эллипсы, задающие штрихованные нормы, гомотетичны, и $d_1(\|\cdot\|'_i, \|\cdot\|'_j) = 0$ для $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ на плоскости E_1. Поэтому

$$d_1(\|\cdot\|_i, \|\cdot\|_j) \leqslant d_1(\|\cdot\|_i, \|\cdot\|'_i) + d_1(\|\cdot\|_j, \|\cdot\|'_j) \leqslant \ln 2.$$

Точность полученной оценки при $n = 3$ демонстрируют нормы в $\mathbb{R}^3$ с шарами

$$B_1 = \{(x, y, z) : |x|, |y|, |z| \leqslant 1\}$$

и

$$B_2 = \{(x, y, z) : |x| + |y| \leqslant 1, |z| \leqslant 100\}. \quad \bullet$$

§3. Финслеровы метрики на векторных расслоениях

Определим на классах изоморфных векторных расслоений над топологическими пространствами неотрицательный скалярный вариант.

Пусть $\gamma\colon E \to B$ – вещественное векторное расслоение с базой B. Обозначим через $\mathcal{F}(\gamma)$ множество финслеровых метрик на γ. Символом E_x будем обозначать слой $\gamma^{-1}(x)$ над точкой x. Соответственно, $E_x^{(f)}$ обозначает этот же слой, снабженный нормой из финслеровой метрики $f \in \mathcal{F}(\gamma)$. Положим

$$m(\gamma) = \sup_{f \in \mathcal{F}(\gamma)} \inf_{x \in B} d_1(E_x^{(f)}, \mathbb{R}^n).$$

Теорема 4. *Инвариант $m(\gamma)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Если $g^*\gamma$ – расслоение, индуцированное отображением $g\colon B_1 \to B$, то*

$$m(g^*\gamma) \geqslant m(\gamma).$$

2. *Если γ – тривиальное расслоение, то*

$$m(\gamma) = \frac{\ln \dim \gamma}{2}.$$

3. *Если $\dim \gamma = n$, а B есть k-мерное клеточное пространство, то*

$$m(\gamma) \geqslant \ln D(n,k),$$

где $D(n,k)$ – минимальный диаметр центрально-симметричного $2(n+k+1)$-гранника, описанного вокруг n-мерного шара единичного диаметра.

Доказательство. 1. Тривиально следует из определения.

2. Это следует из того хорошо известного факта, что для n-мерных нормированных пространств E имеется точная оценка

$$d(E, \mathbb{R}^n) \leqslant \frac{\ln n}{2}.$$

Равенство достигается, например, для пространства , в котором единичный шар является параллелепипедом.

3. Это следует из п. 1 и того хорошо известного факта, что для n-мерного расслоения $\gamma\colon E \to B$ над k-мерной клеточной базой

B существует гауссово отображение $F\colon E \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ (т.е. непрерывное отображение, являющееся на слоях линейным мономорфизмом).

Зададим в $\mathbb{R}^{n+k+1}$ норму с параллелепипедом в качестве единичного шара и индуцируем на γ финслерову метрику посредством отображения F.

Тогда по построению шары B_x в слоях являются центрально-симметричными многогранниками с $\leqslant 2(n+k+1)$ гранями. Для гомотетичных эллипсоидов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ таких, что $\mathcal{E}_1 \subset B_x \subset \mathcal{E}_2$, превратим $\mathcal{E}_1$ аффинным преобразованием в шар единичного диаметра. Тогда $\mathcal{E}_2$ превратится в шар диаметра $\geqslant D(n,k)$. •

Замечания. 1. Утверждение, обратное к утверждению 2, неверно: на касательном расслоении к бутылке Клейна существует финслерова метрика с шарами-параллелограммами, полученная из такой же метрики на торе после надлежащей факторизации.

2. Теорема 2 вычисляет инвариант m для касательного расслоения $T\,S^2$ двумерной сферы S^2:

$$m(T\,S^2) = \frac{\ln(4/3)}{2}.$$

Действительно, если считать шары B_x норм в касательных пространствах T_xS^2 для $x \in S^2$ строго выпуклыми, то пространство M аффинно-правильных положительно ориентированных шестиугольников с центром в нуле слоя T_xS^2 и вписанных в B_x гомеоморфно $SO(3)$. И далее доказательство проводится, как в теореме 2.

3. Из п. 3 теоремы 3 немедленно следует, что для касательных расслоений к n-мерным многообразиям M^n выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} m(TM^n) = +\infty,$$

так как $D(n, n-1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

§4. Случай универсального расслоения

Обозначим через $G_k(\mathbb{R}^n)$ многообразие Грассмана неориентированных k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через нуль. Пусть

$$\gamma_k^n : E_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$$

– тавтологическое расслоение, в котором слоем над k-плоскостью из $G_k(\mathbb{R}^n)$ является она же, рассматриваемая как линейное пространство. Нижеследующая гипотеза обобщает известную теорему Дворецкого.

4.1. Гипотеза. *Для всякого натурального k имеем*

$$\lim_{n\to\infty} m(\gamma_k^n) = 0.$$

Обсуждение. Случай $k = 1$ тривиален. При $k = 2$ гипотеза следует из того, что

$$m(\gamma_2^n) \sim \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

В [9] доказана лемма о непрерывных функциях на многообразии Штифеля $V_2(\mathbb{R}^n)$, из которой следует, что для всякого нечетного простого числа $p < 2n-2$ в единичный круг некоторой плоскости $g \in G_2(\mathbb{R}^n)$ (относительно заданной там нормы) можно вписать правильный $2p$-угольник (относительно евклидовой метрикив в $\mathbb{R}^n$), что и вычисляет асимптотику $m(\gamma_2^n)$.

При $k \geqslant 3$ ни доказательство, ни опровержение гипотезы 2.1 автору не известны. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2 данной работы, позволяют вычислить

$$m(\gamma_2^3) = \frac{\ln(4/3)}{2}.$$

Ясно также, что

$$m(\gamma_3^4) = \ln\sqrt{3} \quad \text{и} \quad m(\gamma_7^8) = \ln\sqrt{7},$$

поскольку благодаря параллелизуемости сфер S^3 и S^7 в слоях расслоений γ_3^4 и γ_7^8 можно построить непрерывные поля из трех- и семимерных параллелепипедов, соответственно.

4.2. Важный пример подрасслоения расслоения γ_2^{2n} дается одномерным комплексным расслоением

$$\mathbb{C}\gamma_1^n : E_1(\mathbb{C}^n) \to G_1(\mathbb{C}^n),$$

база которого состоит из одномерных комплексных подпространств в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Из результатов [7] или [11] следует, что $m(\mathbb{C}\gamma_1^n)$ асимптотически не меньше $\pi/(8n^2)$.

4.3. Обобщение гипотезы 4.1. Задание финслеровой метрики на векторном расслоении равносильно заданию непрерывного поля центрально-симметричных компактных выпуклых тел в его слоях с центрами в нулях этих слоев.

Откажемся от центральной симметрии рассматриваемых тел и для n-мерного вещественного векторного расслоения $\gamma\colon E \to B$ обозначим через $\Pi(\gamma)$ множество таких непрерывных полей $\{K(x) \subset \gamma^{-1}(x)\}_{x \in B}$ из компактных выпуклых тел в слоях расслоения γ, что каждое тело $K(x)$ содержит нуль слоя $\gamma^{-1}(x)$ в качестве своей внутренней точки.

Нам понадобится следующая аффинно-инвариантная метрика на множестве компактных выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ (ср. [5]). Положим

$$d_2(K, K') = \inf_T \left\{ \ln \frac{\beta}{\alpha} \;\middle|\; \alpha,\ \beta > 0,\ \alpha T(K) \subset K' \subset \beta T(K) \right\},$$

где инфимум вычисляется по всем аффинным преобразованиям $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющим ориентацию. По аналогии с инвариантом $m(\gamma)$ естественно определить инвариант

$$m_1(\gamma) = \sup_{K \in \Pi(\gamma)} \inf_{x \in B} d_2(K(x), E(x)),$$

где $E(x)$ – произвольное поле эллипсоидов (шаров) в слоях расслоения γ.

4.4. Гипотеза. *Для всякого натурального k имеем*

$$m_1(\gamma_k^n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

При $k = 2$ эта гипотеза следует из того, что

$$m_1(\gamma_2^n) \sim \frac{\pi^2}{2n^2}.$$

В [10] доказано, что

$$m_1(\gamma_2^3) = \frac{\ln 2}{2}.$$

Там же рассмотрены другие модификации инварианта m и приведены оценки для расслоений γ_2^3 и γ_3^4.

При $k \geqslant 3$ мы не умеем доказывать существование "круглого" тела $K(x)$ в некотором слое расслоения γ_k^n при больших n, однако нетрудно доказать существование тела K_x^p, близкого к $\mathbb{Z}_p$-инвариантному, где p – простое число, а $\mathbb{Z}_p$ – подгруппа в $SO(k)$.

Например, при больших n в некотором слое обязательно найдется тело K_x^p, близкое к центрально-симметричному. Сходные результаты содержатся в [8].

§5. Обобщение задачи о непрерывных функциях на сфере

В заключение рассмотрим задачу о нахождении таких конфигураций точек на евклидовой сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, которые вращением сферы можно поместить в одно множество уровня любой непрерывной функции на S^{n-1} (см. обзор в [9]). Как мы видели выше, именно решения этой задачи, лежащие на большой окружности сферы, доставляют наилучшую оценку асферичности двумерного сечения выпуклого тела [7, 9, 11] и оценки вышеопределенных инвариантов $m(\gamma_k^n)$ и $m_1(\gamma_k^n)$.

5.1. Укажем еще одно решение указанной задачи в случае $n = 4$.

Теорема 5. *Пусть $ABCDE$ – правильная четырехугольная пирамида, вершины которой лежат на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, причем центр сферы S^3, центр основания $ABCD$ и вершина E лежат на одной прямой. Пусть $f\colon S^3 \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная функция. Тогда вращением сферы пятерку точек $ABCDE$ можно поместить в множество уровня функции f.*

Доказательство. По теореме Дайсона для всякой точки $E \in S^3$ найдется такая вышеуказанная пирамида $ABCDE$, что $f(A) = f(B) = f(C) = f(D)$. Пусть функция f достигает минимума в точке $E_0 \in S^3$, а максимума – в E_1. Существует однопараметрическое семейство конгруэнтных пирамид $A_tB_tC_tD_tE_t$ с

$$f(A_t) = f(B_t) = f(C_t) = f(D_t) \quad \text{при} \quad t \in [0;1].$$

Рассмотрим непрерывную функцию $h(t) = f(E_t) - f(A_t)$. По построению $h(0) \leqslant 0 \leqslant h(1)$. Следовательно, $h(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in [0;1]$, и тогда пирамида $A_{t_0}B_{t_0}C_{t_0}D_{t_0}E_{t_0}$ – искомая. Существование указанного однопараметрического семейства пирамид, т.е. *гомотопическая существенность* решений Дайсона, легко выводится из того факта, что для типичной гладкой функции $f \in C^2(S^2)$ число квадратов Дайсона нечетно [3]. •

5.2. Обобщенная задача. Рассматриваемая задача о непрерывных функциях на сфере может быть обобщена по аналогии с теоремой Дворецкого.

Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – стандартная единичная сфера. Обозначим через $S_{l,r}(\mathbb{R}^n)$ множество $(l-1)$-мерных сфер радиуса r на S^{n-1}, где $0 < r \leqslant 1$ и $l < n$. Пусть

$$\gamma^n_{l,r} : E_{l,r}(\mathbb{R}^n) \to S_{l,r}(\mathbb{R}^n)$$

– тавтологическое расслоение над $S_{l,r}(\mathbb{R}^n)$, где слоем над сферой $s \in S_{l,r}(\mathbb{R}^n)$ является она же, рассматриваемая как подмножество сферы S^{n-1}. Очевидно, что $S_{l,1}(\mathbb{R}^n) \cong G_l(\mathbb{R}^n)$, а $\gamma^n_{l,1}$ есть сферизация расслоения γ^n_l.

Группа вращений сферы $SO(n)$ послойно действует в тотальном пространстве $E_{l,r}(\mathbb{R}^n)$.

Вопрос. *Каковы конфигурации точек $A_1, \ldots, A_k$, лежащих на $(l-1)$-мерной сфере $s \in S_{l,r}(\mathbb{R}^n)$, такие, что для любой непрерывной функции $f : E_{l,r}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ найдется вращение $a \in SO(n)$ с*

$$f(a(A_1)) = \cdots = f(a(A_k))\,?$$

5.3. Все решения рассмотренной задачи о непрерывных функциях на сфере, полученные посредством изучения эквивариантных отображений многообразий Штифеля, автоматически являются решениями сформулированной обобщенной задачи. Это относится, например, к теореме Какутани [6], Буржена [2], а также к результатам работ [7, 9, 11, 12].

5.4. Теорема Дайсона [3] о том, что в некотором множестве уровня любой непрерывной функции на двумерной сфере лежат 4 вершины квадрата, вписанного в большую окружность сферы, также обобщается вышеуказанным образом. Действительно, в [3] доказано, что для типичной гладкой функции на сфере S^2 число таких квадратов нечетно. Но так как все гладкие функции на $E^2_1(\mathbb{R}^3)$ гладко гомотопны, то это верно и для типичных гладких функций на $E^2_1(\mathbb{R}^3)$. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

5.5. Теорема Флойда [4] о возможности поместить любую тройку точек сферы S^2 в один уровень непрерывной функции на сфере посредством вращения сферы непосредственно переносится на новую задачу лишь на тройки точек, лежащие на большой окружности сферы. Это происходит потому, что рассматриваемые в доказательстве в [4] инволюции на множестве положений тройки точек $A, B, C \in S^2$, переставляющие пары точек, переводят в себя проходящую через A, B и C окружность лишь в том случае, если это – большая окружность сферы.

5.6. Упомянем также сформулированную в [11] проблему существования для четного p и произвольного натурального d такого числа $N(d,p)$, что при $n \geqslant N(d,p)$ для всякой однородной формы $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ степени p от n переменных найдется такое d-мерное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$, что $F|_E = q^{p/2}$, где $q : E \to \mathbb{R}$ – некоторая квадратичная форма в степени $p/2$.

Проблема. *Верно ли, что для произвольного натурального d и четного p найдется такое $N(d,p)$, что при $n \geqslant N(d,p)$ для всякой непрерывной функции $F : E_d(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ сужение которой на всякий d-мерный слой из $E_d(\mathbb{R}^n)$ есть однородная форма степени p, найдется такой слой $E \subset E_d(\mathbb{R}^n)$, что $F|_E = q^{p/2}$, где $q : E \to \mathbb{R}$ есть некоторая квадратичная форма?*

Из результатов работ [7, 9, 11] легко получается случай $d = 2$. Также легко доказать следующее утверждение:

для натурального d и нечетного p найдется $N(d,p)$ такое, что при $n \geqslant N(d,p)$ для всякой непрерывной на $E_d(\mathbb{R}^n)$ функции F, сужение которой на всякий слой из $E_d(\mathbb{R}^n)$ есть однородная форма степени p, найдется такой слой $E \subset E_d(\mathbb{R}^n)$, что $F|_E \equiv 0$.

Для форм нечетной степени p на $\mathbb{R}^n$ это утверждение доказано в [1].

§6. Применение к аффинным диаметрам

Рассмотрим одно применение указанных в п. 5.3–5.5 решений обобщенной задачи о непрерывных функциях на сфере. Хорда выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ называется его *аффинным диаметром*, если ее концы лежат в параллельных опорных плоскостях тела K.

Теорема 6. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – выпуклое тело.*

1. *Для всякого простого $p \geqslant 5$ у тела K найдутся 4 компланарных аффинных диаметра, составляющих попарно углы, кратные $2\pi/p$.*
2. *Для любых $\alpha, \beta, \gamma > 0$ с $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ у тела K найдутся три компланарных аффинных диаметра, составляющих попарно углы α, β и γ.*

Доказательство. Проведем его в случае, когда тело K – строго выпуклое. В общем случае теорема получается простым предельным переходом.

1. Строго выпуклое тело K имеет ровно один аффинный диаметр заданного направления, который к тому же непрерывно зависит от направления.

Определим на тотальном пространстве расслоения $E_1^2(\mathbb{R}^3)$ следующую непрерывную функцию f. Пусть точка A лежит на большой окружности $S^1 \subset S^2$. Положим $f(A)$ равным расстоянию от параллельного OA аффинного диаметра тела K до плоскости окружности S^1, где O – центр сферы S^2.

Из результатов работы [9] следует, что для некоторых четырех вершин A, B, C, D правильного p-угольника, вписанного в большую окружность $S^1 \subset S^2$, имеют место равенства

$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D),$$

что и доказывает первое утверждение теоремы.

2. Второе утверждение получается применением указанного в п. 5.5 частичного обобщения теоремы Флойда к функции f для троеточий A, B, C большой окружности $S^1 \subset S^2$. $\bullet$

Замечания. 1. Очевидно, что для трехмерного гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ можно получить теорему о нормалях в граничных точках, аналогичную доказанной. В формулировке и доказательстве теоремы нужно лишь заменить аффинный диаметр нормалью.

2. Применяя указанное в п. 5.4 обобщение теоремы Дайсона к функции f, рассмотренной в доказательстве теоремы 4, с заменой аффинного диаметра нормалью, получаем, что у гладкого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ существуют 4 компланарных нормали, каждые две из которых либо параллельны либо перпендикулярны.

Литература

1. B. J. Birch, *Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables.* — Math. **4** (1957), 102–105.
2. D. G. Bourgin, *Deformations and mappings theorems.* — Fund. Math. **46** (1959), 285–303.
3. F. J. Dyson, *Continuous functions defined on spheres.* — Ann. Math. **54** (1951), 534–536.
4. E. E. Floyd, *Real valued mappings of spheres.* — Proc. Am. Math. Soc. **6** (1955), 957–959.

5. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* М., Наука, 1971.
6. S. A. Kakutani, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in* $\mathbb{R}^3$. — Ann. Math. **43** (1942), 285–303.
7. В. В. Макеев, *Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах.* — Мат. заметки **36** (1984), 405–415.
8. В. В. Макеев, *О некоторых свойствах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии.* — В кн.: Геометрические вопросы теории функций и множеств. (Межвуз. мат. сб.), Калинин, 1986, с. 75–85.
9. В. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения.* — Мат. сб. **180**, № 3 (1989), 424–431.
10. В. В. Макеев, *Об аппроксимации плоских сечений выпуклого тела.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **246** (1997), 174–183.
11. V. D. Nilman, *A few observations on the connections between local theory and some other fields.* — Lecture Notes Math. **1317** (1988), 283–289.
12. А. Ю. Воловиков, *Об одном свойстве функций на сфере.* — Мат. заметки (2001), (в печати).

Makeev V. V. Planar sections of convex bodies and universal fibrations.

A conjecture on tautological vector bundles over Grassmannians, which generalizes the well-known Dvoretskii theorem, is stated, discussed, and proved in one nontrivial case: for the Grassmannian of 2-planes. It is also proved that every three-dimensional real normed space contains a two-dimensional subspace with Banach–Mazur distance from the Euclidean plane at most $\frac{1}{2}\ln(4/3)$, and the estimate is sharp.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 23 февраля 2001 г.