Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

В. В. Макеев

О ДВУХ НЕРЕШЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Работа содержит обсуждение двух известных и до сих пор нерешенных родственных геометрических задач, а также близких к ним вопросов.

§1. Одно свойство непрерывных функций на сфере

Известно, что любые три точки стандартной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ можно поместить вращением сферы в одно множество уровня любой наперед заданной непрерывной функции $S^2 \to \mathbb{R}$ (см. [1]). Кажется правдоподобным, что таким свойством обладают все *плоские* четверки точек сферы S^2 (т.е. четверки, состоящие из точек, лежащих на одной окружности), хотя пока это доказано лишь для четверок очень специального вида. Нижеследующая теорема 1.1 также говорит в пользу вышесказанного утверждения.

Для натурального n пусть $\mathfrak{M}_n(f) \subset (S^2)^n$ – множество таких наборов из n точек сферы S^2, которые вращением сферы можно поместить в одно множество уровня функции f. Рассмотрим проекцию

$$\pi : (S^2)^5 \to (S^2)^4, \quad (x_1, \ldots, x_4, x_5) \mapsto (x_1, \ldots, x_4).$$

Пусть $\mathbf{m}_5$ – набор вершин некоторого правильного пятиугольника на сфере S^2.

Теорема 1.1. *Пусть* $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция и* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in (S^2)^4$ *– произвольная четверка точек сферы. Тогда выполняется одно из трех условий:*

(1) $\mathbf{m}_5 \in \mathfrak{M}_5(f)$;

(2) $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_4(f)$;

(3) *точка* $\mathbf{m}_5$ *и сфера* $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ *лежат в различных связных компонентах дополнения* $(S^2)^5 \setminus \mathfrak{M}_5(f)$.

Дополнительные обозначения. Введем числовую функцию

$$\phi\colon (S^2)^5 \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_5) \mapsto \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} f(a(x_i)).$$

Определено непрерывное отображение

$$F_{\mathbf{y}} : SO(3) \to \mathbb{R}^5, \quad a \mapsto \Big(f\big(a(x_1)\big) - \phi(\mathbf{y}), \dots, f\big(a(x_5)\big) - \phi(\mathbf{y})\Big).$$

(Мы рассматриваем $SO(3)$ как множество вращений сферы S^2 вокруг ее центра $O = (0, \dots, 0)$.) По построению

$$F_{\mathbf{y}}(SO(3)) \subset L := \left\{ (z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{5} z_i = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Если $\mathbf{y} \notin \mathfrak{M}_5(f)$, то $F_{\mathbf{y}}(SO(3)) \subset L \setminus \{O\}$. Пусть

$$p\colon L \setminus \{O\} \to S^3_L$$

– центральная проекция на единичную сферу в L с центром O и пусть

$$G_{\mathbf{y}} = p \circ F_{\mathbf{y}} : SO(3) \to S^3_L.$$

Доказательство теоремы 1.1. Допустим, что условия (1) и (3) не выполняются, и пусть $\mathbf{s}\colon [0,1] \to (S^2)^5 \setminus \mathfrak{M}_5(f)$ – путь с $\mathbf{s}(0) = \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_4, x_5) \in \pi^{-1}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{s}(1) = \mathbf{m}_5$. Тогда отображения $G_{\mathbf{y}}$ и $G_{\mathbf{m}_5}$ связаны гомотопией $\{G_{\mathbf{s}(t)}\}_{t=0}^{1}$ и, следовательно, имеют одинаковую целочисленную степень: $\deg G_{\mathbf{y}} = \deg G_{\mathbf{m}_5}$.

Циклическая группа $\mathbb{Z}_5$ свободно действует в $SO(3)$ поворотами на угол $72°$, а в $S^3_L \subset \mathbb{R}^5$ – циклическими перестановками координат. Отображение $G_{\mathbf{m}_5}$ по построению $\mathbb{Z}_5$-эквивариантно, откуда легко следует, что $\deg G_{\mathbf{y}} = \deg G_{\mathbf{m}_5}$ не делится на 5 (см. [3]). Следовательно, $\deg G_{\mathbf{y}} \neq 0$ и $G_{\mathbf{y}}$ сюръективно: $G_{\mathbf{y}}(SO(3)) = S^3_L$. Пусть $a \in SO(3)$ – поворот такой, что

$$G_{\mathbf{y}}(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{4}{\sqrt{20}} \right).$$

Тогда $f(a(x_1)) = \dots = f(a(x_4))$, и, следовательно, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_4(f)$. Теорема 1.1 доказана. $\bullet$

Замечания. 1. Пусть $\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_5)$ – произвольная пятерка точек сферы S^2. По соображениям общего положения ясно, что множество непрерывных функций f на S^2 таких, что $\mathbf{y} \notin \mathfrak{M}_5(f)$, открыто и всюду плотно. Поэтому $\mathbf{m}_5 \notin \mathfrak{M}_5(f)$ для "типичной" непрерывной функции f. Если при этом какая-то плоская четверка точек сферы S^2 не лежит в $\mathfrak{M}_4(f)$, то теорема 1 гарантирует существование "большого количества" вписанных в окружность пятерок точек из $\mathfrak{M}_5(f)$.

2. Рассмотрим циклически упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_n)$ из n точек сферы S^2, лежащих на окружности $\Sigma \subset S^2$ фиксированного радиуса $r > 0$. С точностью до движения он определен циклически упорядоченным набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ угловых мер дуг, на которые $x_1, \dots, x_n$ разбивают Σ. Будем называть набор положительных чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *типом* набора точек $(x_1, \dots, x_n)$ и писать $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}_n(r; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Очевидно, что $\mathbf{m}_5 = \mathbf{x}_5(r; \frac{2\pi}{5}, \dots, \frac{2\pi}{5})$. Из теоремы 1 следует, что если $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 2\pi$, то либо

$$\mathbf{x}_4(r; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) \in \mathfrak{M}_4(f),$$

либо же для некоторого $t \in [0, 1]$

$$\mathbf{x}_5(r; \alpha_1 + t(\tfrac{2\pi}{5} - \alpha_1), \dots, \alpha_5 + t(\tfrac{2\pi}{5} - \alpha_5)) \in \mathfrak{M}_5(f).$$

§2. О многоугольниках, вписанных в гладкую жорданову кривую

Какие плоские четырехугольники Q обладают тем свойством, что в любую плоскую гладкую жорданову кривую γ можно вписать некоторый их подобный образ? (В таком случае мы говорим, что Q *подобно-вписан* в γ.) Очевидно, что все такие четырехугольники должны быть вписаны в окружность, но неизвестно, является ли это условие достаточным. Шнирельман [6] доказал, что таким четырехугольником является квадрат. Обзор результатов по этой задаче см. в [2].

Назовем плоскую жорданову кривую γ *звездной относительно точки* O, если для всякой точки $A \in \gamma$ интервал $[O, A)$ лежит внутри области, ограниченной кривой γ. Нижеследующая теорема 2.1 показывает, что во всякую звездную плоскую гладкую жорданову кривую γ можно вписать достаточно много вписанных в окружность четырехугольников и пятиугольников. Используя конструкцию из [4], мы перенесем теорему 1.1 на рассматриваемую задачу. Ниже мы используем введенное в §1 определение *типа* n-угольника, вписанного в окружность.

Теорема 2.1. *Пусть γ – C^2-гладкая плоская звездная жорданова кривая, и пусть $\alpha_1 + \dots + \alpha_5 = 2\pi$; $\alpha_i > 0$. Тогда имеет место альтернатива: либо четырехугольник типа $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5)$ подобно вписан в кривую γ, либо же, для некоторого $t \in [0, 1]$, пятиугольник типа $(\alpha_1 + t(\frac{2\pi}{5} - \alpha_1), \dots, \alpha_5 + t(\frac{2\pi}{5} - \alpha_5))$ подобно вписан в γ.*

Доказательство. Пусть Π – плоскость, в которой лежит кривая γ, звездная относительно точки $O \in \Pi$, и пусть $Q \subset \Pi$ – круг с центром в O, целиком содержащий γ внутри себя.

Построим непрерывную функцию

$$f \colon \Pi \to \mathbb{R}$$

такую, что на каждом луче OA с $A \in \gamma$ имеем $f(x) = |Ox|/|OA|$ для $x \in [OA]$, а далее вдоль луча OA функция f строго возрастает. Потребуем также, чтобы линии уровня функции f были C^2-гладкими кривыми, а вне Q – окружностями с центром O. Очевидно, что при $0 < c < 1$ линии уровня $\{f(x) = c\}$ лежат внутри γ и являются c-гомотетами кривой γ.

Рассмотрим сферу S, касающуюся плоскости Π "южным полюсом" в точке O. Пусть $q \colon S \setminus \{P\} \to \Pi$ – стереографическая проекция из точки P, диаметрально противоположной точке O. Пусть радиус сферы S не меньше радиуса круга Q. Введем на замкнутой "южной" полусфере функцию $\phi = f \circ q$ и зеркально продолжим ее на "северную" полусферу.

По замечанию 2 к теореме 1.1 для каждого $r > 0$ и сферы S имеем одно из двух: либо $\mathbf{x}_4(r) := \mathbf{x}_4(r; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) \in \mathfrak{M}^4_\phi$, либо же при некотором $t \in [0, 1]$

$$\mathbf{x}_5(r;t) := \mathbf{x}_5\left(r; \alpha_1 + t(\tfrac{2\pi}{5} - \alpha_1), \dots, \alpha_5 + t(\tfrac{2\pi}{5} - \alpha_5)\right) \in \mathfrak{M}^5_\phi.$$

Устремим радиус r к 0.

Зафиксируем $\epsilon > 0$. При всех $c \geqslant \epsilon$ линии уровня $\{\phi(x) = c\}$ будут C^2-гладкими жордановыми кривыми. Следовательно, их кривизны равномерно ограничены, и при достаточно малых $r = r(\epsilon) > 0$ окружность радиуса r будет иметь столь малый размер и столь большую геодезическую кривизну, что не сможет пересекать линию уровня $\{\phi(x) = c \geqslant \epsilon\}$ в 4 точках.

Поэтому вышеуказанные наборы точек $\mathbf{x}_4(r)$ и $\mathbf{x}_5(r;t)$, лежащие в одном множестве уровня функции ϕ, содержатся в множествах уровня вида $\{\phi(x) = c\}$ при $0 < c < \epsilon$. При малых $\epsilon > 0$ такие множества уровня состоят из двух зеркально симметричных компонент, одна из которых лежит вблизи точки O, а другая – вблизи P. Будем рассматривать многоугольники, лежащие вблизи O.

Стереографическая проекция q вместе с надлежащей гомотетией с центром O вписывает в кривую γ плоские многоугольники типа, близкого к исходным. Переходя к пределу при $r \to 0$, получаем утверждение теоремы 2.1. $\bullet$

Теорема 2.2. 1) *Во всякую выпуклую фигуру $K \subset \mathbb{R}^2$ вписан аффинный зеркально симметричный образ правильного пятиугольника.*

2) *Для всякой конечной непрерывно распределенной на плоскости массы $\mathbf{m}$ найдется такой аффинный зеркально симметричный образ правильного пятиугольника, что лучи, исходящие из его центра в вершины, делят $\mathbf{m}$ на 5 равных частей.*

Доказательство. 1) Обозначим через Aff_2^+ группу сохраняющих ориентацию аффинных преобразований плоскости. Пусть $A_1 \ldots A_5$ – правильный плоский пятиугольник. Рассмотрим множества

$$A = \left\{ (a(A_1), \ldots, a(A_5)) \in (\mathbb{R}^2)^5 \;\middle|\; a \in \mathrm{Aff}_2^+ \right\}$$

и

$$B = (\partial K)^5 \subset (\mathbb{R}^2)^5.$$

Пусть $\pi \colon B = (\partial K)^5 \to \partial K$ – проекция на первый сомножитель.

В [5] доказано, что $\pi(A \cap B) = \partial K$ и что для *типичных* фигур K с гладкой границей ∂K, т.е. таких, что A и B пересекаются трансверсально (поэтому $A \cap B$ есть конечный набор гладко вложенных в $(\mathbb{R}^2)^5$ окружностей), сужение проекции имеет степень 1. Это следует из того, что любые две типичные фигуры K_1 и K_2 гладко гомотопны, поэтому корректно определен класс сингулярного бордизма отображения $\pi| \colon A \cap B \to \partial K$ (см. [5]). Легко видеть, что круг K является типичной фигурой и что в этом случае $\pi| \colon A \cap B \to \partial K$ является гомеоморфизмом [5].

Циклическая группа $\mathbb{Z}_5$ действует в пространстве $(\mathbb{R}^2)^5$ циклическими перестановками точек сомножителей $\mathbb{R}^2$.

Утверждение. *Для типичной фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$ множество $A \cap B$ имеет $\mathbb{Z}_5$-инвариантную компоненту S такую, что сужение $\pi|\colon S \to \partial K$ имеет ненулевую степень.*

Действительно, если компонента $S \subset A \cap B$ не $\mathbb{Z}_5$-инвариантна, то степень сужения проекции π на ее орбиту делится на 5. Поскольку степень отображения $\pi|\colon A \cap B \to K$ равна 1, то одна из компонент $\mathbb{Z}_5$-инвариантна. $\bullet$

Внутри компоненты S вписанный пятиугольник $A_1 \dots A_5$ можно непрерывно продеформировать в пятиугольник $A_2A_3A_4A_5A_1$. Обозначим через O центр аффинно-правильного пятиугольника $A_1 \dots A_5$ и рассмотрим разности

$$OA_1 - OA_2,\ OA_2 - OA_3,\ \dots,\ OA_5 - OA_1.$$

Группа $\mathbb{Z}_5$ циклически переставляет их, и одна из них при этой перестановке обязательно поменяет знак, поскольку сумма всех разностей равна нулю. Значит, по соображениям непрерывности при вышеуказанной деформации пятиугольника $A_1 \dots A_5$ какие-то два соседних отрезка OA_i и OA_{i+1} уравняются по длине, и соответствующий вписанный пятиугольник $A_1 \dots A_5$ будет зеркально симметричен.

Для остальных выпуклых фигур первое утверждение теоремы получается предельным переходом с учетом того, что вписанный аффинно-правильный пятиугольник не может вырождаться, если площадь фигуры K отделена от нуля [5].

2) Второе утверждение теоремы будем доказывать совершенно аналогично. Пусть $A_1 \dots A_5$ – правильный пятиугольник с центром $O \in \mathbb{R}^2$, а $\mathbf{m}$ – распределенная на плоскости масса, имеющая дифференцируемую плотность p с компактным носителем. Обозначим через $B_1, \dots, B_5$ секторы, на которые лучи $OA_1, \dots, OA_5$ разбивают плоскость.

Пусть

$$A = \{a \in SL_2^+ \mid \mathbf{m}(a(B_1)) = \dots = \mathbf{m}(a(B_5))\},$$

где $SL_2^+ \subset \mathrm{Aff}_2^+$ – подгруппа, состоящая из преобразований с единичным определителем.

Для типичной плотности p множество A – одномерное гладкое компактное подмногообразие в SL_2^+. Рассмотрим отображение $\pi\colon A \to S^1$, сопоставляющее с преобразованием $a \in A$ луч, сонаправленный с лучом $a(O)a(A_1)$ и отложенный от фиксированной точки плоскости. Как и выше, корректно определен класс сингулярного бордизма отображения $\pi : A \to S^1$, а значит, и степень для распределения массы с типичной плотностью p.

Покажем, что $\deg \pi = 1$, рассмотрев массу с единичной плотностью и круглым носителем K. Иначе говоря, некоторый круг $K \subset \mathbb{R}^2$ с центром O будем делить на равновеликие части аффинными образами секторов $B_1, \dots, B_5$.

Утверждение. *Это возможно лишь когда $B_1, \dots, B_5$ – равные секторы с общей вершиной O.*

Действительно, очевидно, что если секторы $B_1, \dots, B_5$ равны, то их общая вершина – в центре круга K. Осталось доказать, что пять равных секторов $B_1, \dots, B_5$ с общей вершиной O не могут разделить на пять равновеликих частей эллипс K, отличный от круга. Действительно, рассмотрим равновеликий эллипсу K круг K_1 с центром O. По построению границы эллипса K и круга K_1 должны пересекаться внутри всех пяти секторов, что противоречит теореме Безу. •

В рассматриваемом случае легко проверяется независимость условий $\mathbf{m}(a(B_1)) = \dots = \mathbf{m}(a(B_5))$, т.е. типичность данного распределения массы, и, как показано выше, отображение $\pi : A \to S^1$ – гомеоморфизм. Далее рассуждение повторяет приведенное при доказательстве первой части теоремы. •

Литература

1. E. Floyd, *Real-valued mappings of spheres.* — Proc. Am. Math. Soc. **6** (1995), 957–959.
2. V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* Dolciani Math. Exp., vol. 11, Washington, DC, Math. Assoc. Am., 1991.
3. В. В. Макеев, *Задача Кнастера и почти сферические сечения.* — Мат. сб. **180**, № 3 (1989), 424–431.
4. В. В. Макеев, *О четырехугольниках, вписанных в замкнутую кривую.* — Мат. заметки **57** (1995), 129–132.
5. В. В. Макеев, *О пятиугольниках, вписанных в замкнутую выпуклую кривую.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **246** (1997), 184–190.
6. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук. № 10 (1934), 34–44.

Makeev V. V. On two nonsolved geometric problems.

Two familiar geometric problems are discussed: on a property of continuous functions on the 2-sphere and on quadrangles inscribed in a planar Jordan curve, as well as a related question on equipartitioning a mass on a plane.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 октября 2000 г.