Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

А. И. Курносенко

НЕРАВЕНСТВА НА ПЛОСКИХ КРИВЫХ В ОКРЕСТНОСТИ ОДНОЙ ИЛИ ДВУХ ВЕРШИН

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Предметом исследования в статье являются соотношения между кривизнами и углами наклона касательных на концах малой дуги плоской кривой в зависимости от количества заключенных в ней вершин. Близкие задачи рассматривались на подходах к доказательству теоремы о четырех вершинах замкнутой кривой [1, 2]. Автора привели к ним исключительно прикладные вопросы метрологии и качества проектирования криволинейных профилей. Здесь мы почти не касаемся этих приложений, предлагая заинтересованному читателю работы [3] и [4].

§1. Классы исследуемых кривых

Под *окрестностью* вершины кривой понимается дуга кривой, однозначно проектирующаяся на хорду. Кривую при этом можно рассматривать как функцию $y(x)$ в локальной системе координат, в которой хорда длины $2c$ является отрезком $[-c, c]$ оси абсцисс.

Исследование удобно свести к отрезку $[-1, 1]$, понимая под координатами безразмерные отношения x/c и y/c, а под кривизной – *нормированную кривизну* $k_{\rm norm} = kc$, также безразмерную. Так, функциональное представление дуги постоянной кривизны k, выходящей под углом α и опирающейся на хорду $[-1, 1]$, имеет вид

$$A(x;\alpha) := \frac{\sin\alpha\,(1-x^2)}{\cos\alpha + \sqrt{1-x^2\sin^2\alpha}} = \\ = \frac{-k\,(1-x^2)}{\sqrt{1-k^2}+\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad k=-\sin\alpha, \quad |x|\leqslant 1. \qquad (1)$$

К классам $\mathcal{V}_n^{\pm}$ отнесем функции (кривые) $y(x)$, обладающие следующими свойствами:

- функция задана на отрезке $[-1, 1]$, непрерывна и $y(\pm1)=0$;

- существует непрерывная функция $\tau(x)$ – угол наклона касательной к кривой:
$$\tau(x) = \operatorname{arctg} y'(x), \quad |\tau(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{2}$$
- функция кривизны $k(x) = y''/(1+{y'}^2)^{3/2}$ кусочно-непрерывна; она может иметь конечные разрывы и обращаться в бесконечность;
- у кривой класса $\mathcal{V}_n^{\pm}$, $n \geqslant 0$, функция кривизны имеет n экстремумов (а кривая – n вершин); верхний индекс указывает на возрастание ($\mathcal{V}_n^{+}$) или убывание ($\mathcal{V}_n^{-}$) кривизны на первом участке монотонности. Так, у кривой класса $\mathcal{V}_2^{+}$ первая из двух вершин является вершиной-максимумом. Кривые классов $\mathcal{V}_0^{\pm}$ (с монотонной функцией кривизны) мы, как и в [4, 5], называем *спиральными*.

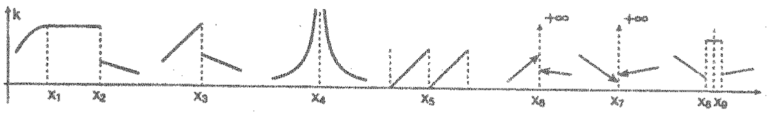

Рис. 1.

Уточним понятие вершины кривой. Помимо традиционной трактовки, подразумевающей (локальный) экстремум кривизны в точке, мы допускаем *протяженную вершину*, т.е. отрезок $[x_1, x_2]$, в пределах которого кривизна постоянна и экстремальна, а слева и справа характер ее монотонности противоположен (рис. 1). Кроме того, мы не требуем непрерывности кривизны в вершине (точки x_2, x_3 и x_4) и допускаем вершины с бесконечной кривизной: точка x_4 – вершина гладкой кривой $y = \sqrt{|x|^3} - 1 \in \mathcal{V}_1^{+}$. Ситуация в точке x_5 может рассматриваться как *двойная вершина* – максимум и минимум кривизны слева и справа от одной точки.

§2. Граничные условия

Под *граничными условиями* кривых классов $\mathcal{V}_n$, помимо $y(\pm 1) = 0$, будем понимать углы наклона касательных на концах отрезка $\alpha = \tau(-1)$ и $\beta = \tau(1)$ и кривизны $k_1 = k(-1)$ и $k_2 = k(1)$. Подклассы кривых с заданными граничными условиями обозначим $\mathcal{V}(\alpha, \beta)$ или $\mathcal{V}(\alpha, \beta, k_1, k_2)$.

На хорде $[-1,1]$ построим две дуги постоянной кривизны, выходящие из точки $(-1,0)$ под углами ξ и η (рис. 2). Область $\mathcal{L}(\xi,\eta)$, ограниченную этими дугами, назовем *линзой*, а дугу, выходящую под углом $(\xi+\eta)/2$, – *биссектрисой* линзы.

С граничными углами кривой класса $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$ связана линза $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$ (рис. 2). Ее угловая полуширина ω и угол выхода биссектрисы γ равны

$$\omega=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad \gamma=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

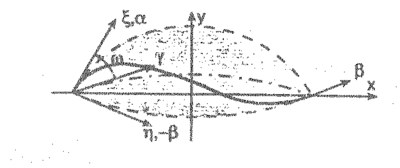

Рис. 2.

Граничные условия (α,k_1) и (β,k_2) позволяют построить ориентированные круги кривизны в начальной и конечной точках кривой. Привлечем *инверсный инвариант* пары окружностей [5], равный $Q=\sin^2(\Delta\tau/2)$, где $\Delta\tau$ – угол между касательными к окружностям в точке пересечения. При $Q=0$ окружности касаются. Отсутствию пересечения соответствуют мнимое значение $\Delta\tau$ и значения $Q<0$ либо $Q>1$. Инвариант пары граничных кругов кривизны равен

$$\begin{aligned}Q(\alpha,\beta,k_1,k_2)&=k_1k_2+k_2\sin\alpha-k_1\sin\beta+\sin^2\gamma=\\&=(k_1+\sin\alpha)(k_2-\sin\beta)+\sin^2\omega.\end{aligned}\tag{3}$$

График функции $z(x):=\sin\tau(x)$ назовем *синус-образом* кривой $y(x)$:

$$z(x)=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\quad\Longrightarrow\quad z'(x)=k(x).\tag{4}$$

Последнее равенство справедливо и в точках разрыва кривизны, где $z(x)$ имеет изломы с односторонними производными. Для функции $z(x)$ граничные условия принимают вид

$$z(-1)=\sin\alpha,\quad z(1)=\sin\beta,\qquad z'(-1)=k_1,\quad z'(1)=k_2.\tag{5}$$

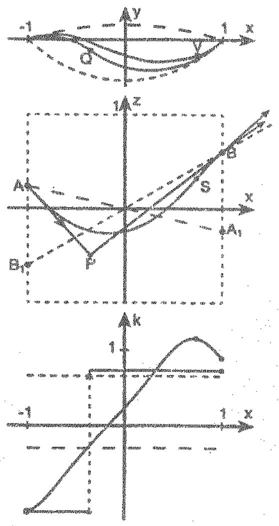

Рис. 3.

Из (4) следует, что возрастание (убывание) кривизны соответствует выпуклости вниз (вверх) синус-образа кривой. Его свойства иллюстрирует рис. 3. Окружности $A(x;\alpha)$ и $A(x;-\beta)$ (1), ограничивающие линзу, имеют в качестве синус-образов прямые AA_1 ($z=-x\sin\alpha$) и B_1B ($z=x\sin\beta$), $A=(-1,\sin\alpha)$, $B=(1,\sin\beta)$. Кривая с кусочно-постоянной возрастающей функцией кривизны (Q – точка разрыва кривизны) принадлежит к классу $\mathcal{V}_0^+(\alpha,\beta)$; ее синус-образ – кусочно-линейная выпуклая вниз ломаная APB. В [4] мы подробно рассмотрели эти кривые, образующие трехпараметрическое семейство

$$B(x;\alpha,\beta,k_1,k_2). \tag{6}$$

Четыре указанных параметра связаны соотношением

$$Q(\alpha,\beta,k_1,k_2)=0 \tag{7}$$

– условием касания двух окружностей (3). В англоязычной литературе кривые этого типа называют *biarc curves* [6].

Кривая с вершиной в точке V (рис. 3) принадлежит к классу $\mathcal{V}_1^+(\alpha,\beta)$; вершине соответствует точка перегиба S синус-образа кривой (линия перегиба в случае протяженной вершины).

По известному синус-образу $z(x)$ функция $y(x)$ получается интегрированием

$$y(x) = \int\limits_{-1}^{x} \operatorname{tg} \tau(u) du = \int\limits_{-1}^{x} \frac{z(u)}{\sqrt{1-z(u)^2}} du. \tag{8}$$

Чтобы на правом конце отрезка выполнялось условие $y(1) = 0$, функция $z(x)$ должна обращать в нуль функционал $\mathcal{Y}(z)$:

$$\mathcal{Y}(z) := \int\limits_{-1}^{1} \frac{z(x)}{\sqrt{1-z(x)^2}} x = 0. \tag{9}$$

Из монотонности функции $t \mapsto t/\sqrt{1-t^2}$ следует неравенство

$$\mathcal{Y}(u) > (v) \quad \text{при} \quad u(x) \gneqq v(x), \tag{10}$$

где символ "$\gneqq$" обозначает отношение, исключающее тождественное равенство функций: $\{u(x) \geqslant v(x) \wedge u(x) \not\equiv v(x)\}$.

Заметим, что граничные условия типа $\alpha = \pi/2$, $k_1 > 0$ не допускают существования кривой класса $\mathcal{V}_n$, поскольку они нарушают требование однозначного проектирования на хорду. Далее мы исключаем такие ситуации без соответствующих оговорок в формулировках теорем.

§3. Неравенства для спиральных кривых

Приведем основные результаты, полученные в [4] для классов $\mathcal{V}_0^{\pm}$. Отметим, что в этой работе условие (2) однозначного проектирования кривой на хорду было ужесточено строгим неравенством $|\tau(x)| < \pi/2$ во избежание особенностей подынтегральной функции в (8) при $|z(x)| = 1$. Однако интеграл (8), становясь при этом несобственным, остается конечным, что позволяет распространить результаты и на случай $|\tau(x)| \leqslant \pi/2$, допускающий "мгновенные" вертикальные касательные.

Теорема 1. *Граничные условия кривой класса* $\mathcal{V}_0^{\pm}(\alpha, \beta; k_1, k_2)$ *удо-*

влетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_0^+ : \begin{cases} Q(\alpha,\beta,k_1,k_2) \leqslant 0, \\ k_1 < k_2, \\ \omega > 0 \ (\textit{т.е.}\ \ \alpha{+}\beta > 0); \end{cases} \\ &\mathcal{V}_0^- : \begin{cases} Q(\alpha,\beta,k_1,k_2) \leqslant 0, \\ k_1 > k_2, \\ \omega < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

При этом равенство $Q = 0$ достигается только на кривых семейства *biarc curves* (6).

Зафиксируем углы α и β, понизив тем самым размерность пространства граничных условий (α,β,k_1,k_2) с 4 до 2. Тогда в плоскости (k_1,k_2) можно указать область $\mathbf{V}_n^{\pm}(\alpha,\beta)$ значений граничных кривизн, допускающих построение кривой класса $\mathcal{V}_n^{\pm}(\alpha,\beta)$. Согласно (11), область $\mathbf{V}_0^+$ ограничена одной из ветвей гиперболы (7), а именно той, которая расположена в полуплоскости $k_1 < k_2$ (левая верхняя ветвь на рис. 4a). Условие $\omega > 0$, т.е. $-\sin\alpha < \sin\beta$, означает, что в этой же полуплоскости лежит и центр гиперболы – точка $(k_1,k_2) = (-\sin\alpha, \sin\beta)$. При $\omega < 0$ правая нижняя ветвь гиперболы является границей области $\mathbf{V}_0^-$ (рис. 4c). При $\omega = 0$ классы $\mathcal{V}_0^{\pm}$ пусты, точка $k_1 = k_2(= -\sin\alpha = \sin\beta)$ соответствует случаю постоянства кривизны (рис. 4b).

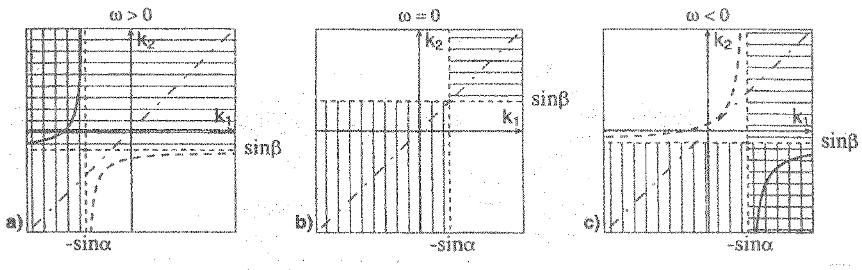

Рис. 4.

Теорема 2. *Если углы α, β и кривизны k_1, k_2 удовлетворяют условиям (11) для одного из классов $\mathcal{V}_0^{\pm}$, то в этом классе существует кривая с заданными граничными условиями.*

Теорема 3. *Кривая класса* $\mathcal{V}_0(\alpha,\beta)$ *находится внутри линзы* $\mathcal{L}(\alpha, -\beta)$. *Если известны граничные кривизны* k_1, k_2, *то при* $-1 < x < 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^+ : A(x;-\beta) &< B(x;\alpha,\beta,k_1,g_2) \leqslant y(x) \leqslant \\ &\leqslant B(x;\alpha,\beta,g_1,k_2) < A(x;\alpha), \\ \mathcal{V}_0^- : A(x;-\beta) &> B(x;\alpha,\beta,k_1,g_2) \geqslant \\ &\geqslant y(x) \geqslant B(x;\alpha,\beta,g_1,k_2) > A(x;\alpha). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь g_1 и g_2 определяются из уравнений

$$Q(\alpha,\beta,k_1,g_2) = Q(\alpha,\beta,g_1,k_2) = 0. \tag{13}$$

§4. Кривые с единственной вершиной

Рис. 4 иллюстрирует также неравенства (14) – области $\mathbf{V}_1^{\pm}(\alpha,\beta)$ существования кривых с единственной вершиной. Они ограничены асимптотами гиперболы (7) и не включают границу. Области $\mathbf{V}_1^+$ показаны вертикальной штриховкой, $\mathbf{V}_1^-$ – горизонтальной. При $\omega \neq 0$ это – полуплоскости, включающие область монотонности. При $\omega = 0$ области $\mathbf{V}_1^{\pm}$ ограничены и по k_1, и по k_2.

Теорема 4. *Если кривая принадлежит к одному из классов* $\mathcal{V}_1^{\pm}(\alpha, \beta, k_1, k_2)$, *то*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^+ &: \begin{array}{lll} k_1 < -\sin\alpha & \text{при} & \omega \geqslant 0, \\ k_2 < \sin\beta & \text{при} & \omega \leqslant 0; \end{array} \\ \mathcal{V}_1^- &: \begin{array}{lll} k_2 > \sin\beta & \text{при} & \omega \geqslant 0, \\ k_1 > -\sin\alpha & \text{при} & \omega \leqslant 0. \end{array} \end{aligned} \tag{14}$$

В этой записи предполагается, что при $\omega = 0$ *действуют оба ограничения.*

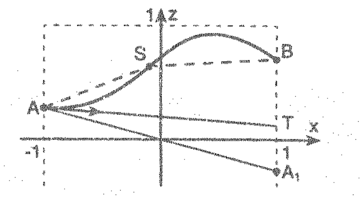

Рис. 5.

Доказательство. Пусть $y(x) \in \mathcal{V}_1^+(\alpha, \beta, k_1, k_2)$ и $\omega \geqslant 0$. Докажем невозможность существования такой кривой при $k_1 \geqslant -\sin\alpha$, для чего обратимся к ее синус-образу (рис. 5). Согласно (4)–(5) график $z(x)$ соединяет точки $A = (-1, \sin\alpha)$ и $B = (1, \sin\beta)$ и имеет точку перегиба $S = (x_S, z_S)$, порожденную вершиной кривой $y(x)$. Наклон его левой касательной AT равен k_1.

На участке AS $k(x) = z'(x)$ возрастает, и выпуклый вниз график $z(x)$ уходит вверх от касательной AT. Неравенство $k_1 \geqslant -\sin\alpha$ означает, что отрезок AT лежит не ниже отрезка AA_1 прямой $z_1(x) = -x\sin\alpha$. Следовательно, $z(x) \gneqq z_1(x)$ при $x \in [-1, x_S]$, а точка перегиба S лежит строго выше AA_1. Не ниже AA_1 лежат и точка B (поскольку $\omega \geqslant 0$, т.е. $z_B = \sin\beta \geqslant -\sin\alpha = z_{A_1}$), и хорда SB, и весь выпуклый вверх участок графика $z(x)$, $x \in [x_S, 1]$. Таким образом, $z(x) \gneqq z_1(x)$ на всем отрезке $[-1, 1]$. Так как $\mathcal{Y}(z_1) = 0$, то $\mathcal{Y}(z) > 0$ (10), и построение функции $y(x)$ невозможно (9).

Тем самым доказана "четверть теоремы". Пусть, по-прежнему, кривая $y(x)$ принадлежит к классу $\mathcal{V}_1^+(\alpha, \beta, k_1, k_2)$, но $\omega \leqslant 0$. Тогда $y(-x) \in \mathcal{V}_1^+(\alpha', \beta', k_1', k_2')$, где $\alpha' = -\beta$, $\beta' = -\alpha$, $k_1' = k_2$, $k_2' = k_1$ и $\omega' = -\omega \geqslant 0$. По доказанному, существование такой кривой возможно лишь при $k_1' < -\sin\alpha'$, т.е. при $k_2 < \sin\beta$. Для класса $\mathcal{V}_1^+$ утверждение теоремы доказано полностью.

Неравенства для кривых с вершиной-минимумом получаются умножением функции на -1, что переводит ее из класса $\mathcal{V}_1^-(\alpha, \beta, k_1, k_2)$ в уже исследованный класс $\mathcal{V}_1^+(-\alpha, -\beta, -k_1, -k_2)$. $\square$

Следствие. *Кривая класса $\mathcal{V}_n$, имеющая на концах касание второго порядка с линзой (т.е. $k_1 = -\sin\alpha$, $k_2 = \sin\beta$), содержит не менее двух вершин.*

Теорема 5. *Если углы α, β и кривизны k_1, k_2 удовлетворяют условиям (14) для одного из классов $\mathcal{V}_1^\pm$, то в этом классе существует кривая с заданными граничными условиями.*

Доказательство. Применение симметрии относительно координатных осей позволяет ограничиться построением искомой кривой в классе $\mathcal{V}_1^+$ при $\omega \geqslant 0$. Построим ее из гладко сопряженных дуг окружностей, первая и последняя из которых совпадают с граничными кругами кривизны и, следовательно, удовлетворяют граничным условиям. Обозначим через $Q_{12} = Q(\alpha, \beta, k_1, k_2)$ инверсный инвариант (3) этой пары окружностей. Рассмотрим четыре случая:

$$\omega > 0 \ (Q_{12} > 0, \ Q_{12} = 0, \ Q_{12} < 0) \quad \text{и} \quad \omega = 0.$$

1) $\omega > 0$, $Q_{12} > 0$. Пусть α, β, k_1, k_2 удовлетворяют условиям (14), т.е. $k_1 < -\sin\alpha$, $k_2 < \sin\beta$. В [4] показано, что в этом случае существует кривая $y_0(x) = B(x; \alpha, \beta, k_1, g_2) \in \mathcal{V}_0^+$ семейства *biarc curves* (6), где g_2 определяется из (13). Ее синус-образ $z_0(x)$ имеет вид выпуклой вниз ломаной APB (рис. 6a). Наклоны ее звеньев равны k_1 и g_2. В силу $Q_{12} > 0$ и $k_1 + \sin\alpha$, имеем $k_2 < g_2$:

$$k_2 \overset{(3)}{=} \frac{Q_{12}}{k_1 + \sin\alpha} - \frac{\sin^2\omega}{k_1 + \sin\alpha} + \sin\beta < -\frac{\sin^2\omega}{k_1 + \sin\alpha} + \sin\beta = g_2.$$

Это означает, что отрезок T_2B правой касательной к графику $z(x)$ расположен выше звена PB. Выберем произвольно точку K внутри области BPT_1EB и точку N внутри отрезка T_2B правее K: $x_N > x_K$. Ломаная $APKNB$ – хороший кандидат на роль искомой функции $z(x)$: на ней соблюдены граничные условия (5) и требуемые направления выпуклости. Легко добиться и равенства нулю функционала (9). Если $\mathcal{Y}(z_{APKNB}) > 0$, то, перемещая N в сторону B, мы по пути найдем нуль:

$$z_{APKB}(x) \lneqq z_0(x), \quad \mathcal{Y}(z_{APKB}) < \mathcal{Y}(z_0) = 0.$$

Если же $\mathcal{Y}(z_{APKNB}) < 0$, то, поднимая K в положение K_1, мы непрерывно перейдем к положительному значению функционала на ломаной $z_{APK_1NB}(x) \gneqq z_0(x)$. Интегрирование (8) завершает построение.

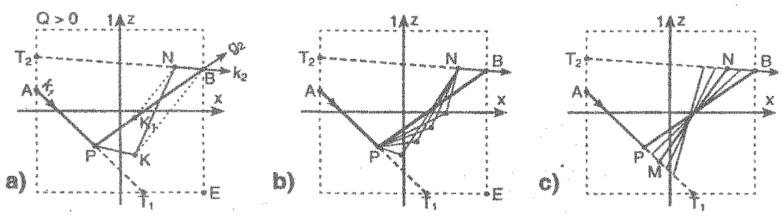

Рис. 6.

Семейство решений для фиксированной точки N показано на рис. 6b. Рис. 6c иллюстрирует другое построение, при котором достаточно трехзвенной ломаной $AMNB$. Однако такое построение невозможно при $\omega = \alpha = \beta = \pm\pi/2$, поскольку $|z_P = 1|$ и отрезок PT_1 вырождается в точку.

2) $\omega > 0$, $Q_{12} = 0$ (рис. 7a). Согласно [4] при этих условиях граничные круги кривизны искомой кривой касаются и образуют кривую $y_0(x) \in \mathcal{V}_0^+(\alpha, \beta, k_1, k_2)$ из семейства *biarc curves*. Ее синус-образ $z_0(x)$ – выпуклая вниз ломаная APB, $\mathcal{Y}(z_0) = 0$. Выберем точку M внутри отрезка AP, точку N внутри PB и точку K внутри области BPT_1EB левее N $(x_K < x_N)$. При этом на ломаной $AMKNB$ достигаются требуемые направления выпуклости и сохраняются граничные условия. Существование точек K и M, доставляющих нулевое значение функционалу $\mathcal{Y}(z_{AMKNB})$, очевидно.

3) $\omega > 0$, $Q_{12} < 0$ (рис. 7b). Базовая функция $z_0(x)$ – трехзвенная ломаная $ACDB$, порождающая некую кривую класса $\mathcal{V}_0^+(\alpha, \beta, k_1, k_2)$. Ее существование установлено в [4] при доказательстве теоремы 2. Деформируя ее, получаем искомые четырехзвенные ломаные $AMKNB$.

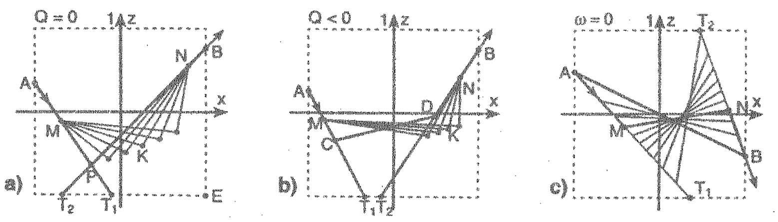

Рис. 7.

Отметим, что построения из трех дуг окружностей, средняя из которых с кривизной k_0 дает искомую вершину, возможны только при $Q_{12} > 0$: как показано в [5] (задача о сопряжении трех дуг), при $Q_{12} < 0$ последовательность k_1, k_0, k_2 монотонна, а при $Q_{12} = 0$ сопряжений нет.

4) $\omega = 0$. Тогда $\alpha = -\beta = \gamma$ и существует дуга $y_0(x) = A(x;\gamma)$ постоянной кривизны с требуемыми граничными углами. Ее синус-образом является прямая AB – функция $z_0(x) = -x \sin\gamma$ (рис. 7c). Условия (14) для класса $\mathcal{V}_1^+$ при $\omega = 0$ принимают вид $k_1 < -\sin\gamma$ и $k_2 < -\sin\gamma$ (откуда $Q_{12} > 0$). Это означает, что прямая AT_1, левая касательная к графику $z(x)$, находится ниже, а правая касательная T_2B – выше отрезка AB. Выбрав $M \in AT_1$ и $N \in T_2B$, мы построим функцию $z(x)$ в виде ломаной $AMNB$ с требуемым характером выпуклости и заданными граничными условия-

ми. Поскольку $\mathcal{Y}(z_0) = 0$, мы имеем достаточную свободу выбора точек M и N, чтобы удовлетворить и условие $\mathcal{Y}(z_{AMNB}) = 0$. $\square$

§5. Координатные ограничения для кривых с единственной вершиной

При дискретно-точечном представлении спиральной кривой участки между соседними узлами интерполяции можно рассматривать как кривые класса $\mathcal{V}_0$. Координатные ограничения (12) позволили построить область, покрывающую исходную (неизвестную) спираль [4]. Ширина области дает оценку детерминированности кривой данным дискретным представлением.

Теоремы этого раздела представляют интерес в плане поиска аналогичных оценок для неспиральных кривых, при разбиении которых появятся участки типа $\mathcal{V}_1$. Разбиение, при котором хорда содержит $\geqslant 2$ вершин, мы считаем некорректным.

Теорема 6. *Кривая $y(x) \in \mathcal{V}_1^+(\alpha,\beta)$ лежит строго ниже верхней границы линзы $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$; кривая $y(x) \in \mathcal{V}_1^-(\alpha,\beta)$ лежит строго выше нижней границы линзы. Если граничные условия таковы, что*

$$(k_1, k_2) \in \mathbf{V}_1^+(\alpha,\beta) \cap \mathbf{V}_1{-}(\alpha,\beta), \tag{15}$$

то кривая класса $\mathcal{V}_1^\pm(\alpha,\beta,k_1,k_2)$ находится внутри линзы $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\mathcal{V}_1^+$ при $\omega \geqslant 0$. Формулировка теоремы при этом принимает вид: *если $y(x) \in \mathcal{V}_1^+(\alpha,\beta)$, то*

$$y(x) < A(x;\alpha) \quad (-1 < x < 1); \tag{16}$$

если дополнительно к условию $k_1 < -\sin\alpha$ выполнено $k_2 > \sin\beta$, то кривая находится внутри линзы $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$, т.е.

$$A(x;-\beta) < y(x) < A(x;\alpha) \quad (-1 < x < 1). \tag{17}$$

Докажем неравенство (16), т.е. убедимся, что разность

$$\delta_1(x) = A(x;\alpha) - y(x)$$

положительна. Прямая $z_1(x) = -x\sin\alpha$ (AA_1 на рис. 8) и кривая ASB – синус-образы дуги $A(x;\alpha)$ и кривой $y(x)$ (UVW). Условие экстремума $\delta_1(x)$ принимает вид

$$\delta_1'(x) \overset{(8)}{=} \frac{z_1(x)}{\sqrt{1-z_1(x)^2}} - \frac{z(x)}{\sqrt{1-z(x)^2}} = 0,$$

что, ввиду монотонности функции $t \mapsto t/\sqrt{1-t^2}$, возможно только при $z(x) = z_1(x)$. Внутри интервала $(-1, 1)$ это уравнение имеет хотя бы одно решение, поскольку график $z(x)$ пересекает прямую $z_1(x)$: в точке A он уходит строго вниз от прямой в силу условий

$$z(1) = z_1(1), \quad z'(-1) = k_1 < -\sin\alpha = z_1'(-1);$$

на правом конце график лежит строго выше прямой AA_1 в силу одного из следующих условий:

$$\omega > 0 \implies \quad \sin\beta > -\sin\alpha, \quad \text{т.е.} \quad z(1) > z_1(1);$$
$$\omega = 0 \implies \begin{cases} \sin\beta = -\sin\alpha, \\ k_2 < \sin\beta, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} z(1) = z_1(1), \\ z'(1) < z_1'(1). \end{cases}$$

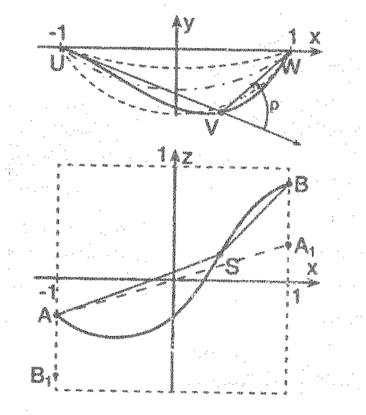

Рис. 8.

Кроме того, это пересечение единственно: иначе график $z(x)$ имел бы несколько точек перегиба, а кривая $y(x)$ – более одной вершины. Следовательно, $\delta_1(x)$ имеет единственный экстремум – максимум. Поскольку $\delta_1(\pm 1)$, в интервале $(-1, 1)$ имеем $\delta_1(x) > 0$.

Второе утверждение теоремы относится к областям (15), показанным на рис. 4а, с двойной штриховкой: при $\omega > 0$ полуплоскость $\mathbf{V}_1^+$ $(k_1 < -\sin\alpha)$ ограничивается до квадранта дополнительным условием $k_2 > \sin\beta$. В примере на рис. 3 эти условия соблюдены. Аналогичные рассуждения доказывают единственность точки пересечения графика $z(x)$ с прямой $z_2(x) = x\sin\beta$ (B_1B на рис. 3) и отрицательность функции $\delta_2(x) =$

$A(x;-\beta)-y(x)$. При нестрогом неравенстве $k_2 \geqslant \sin\beta$ возможно $A(x;-\beta) \leqslant y(x)$. □

Если еще более сузить область граничных условий, а именно до $\mathbf{V}_0^+$ при $\omega>0$ (до $\mathbf{V}_0^-$ при $\omega<0$), неравенство (17) усиливается:

$$\mathcal{V}_1^+,\ \omega>0\colon B(x;\alpha,\beta,k_1,g_2) \leqslant y(x) < A(x;\alpha);$$
$$\mathcal{V}_1^+,\ \omega<0\colon B(x;\alpha,\beta,g_1,k_2) \leqslant y(x) < A(x;-\beta)$$

(для класса $\mathcal{V}_1^-$ знаки неравенств заменяются на противоположные).

Ситуацию иллюстрирует рис. 3, а доказательство следует из единственности пересечения графиков ASB и APB – синус-образов кривых $y(x)$ и $B(x;\ldots)$. □

Теорема 7. *Вершина кривой $y(x)\in\mathcal{V}_1^\pm(\alpha,\beta)$ лежит строго ниже (в случае $\mathcal{V}_1^+$) или строго выше (в случае $\mathcal{V}_1^-$) биссектрисы линзы $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$.*

Доказательство. На рис. 8 изображены кривая $y(x)\in\mathcal{V}_1^+(\alpha,\beta)$ с вершиной в точке $V(x_1,y_1)$, линза $\mathcal{L}(\alpha,-\beta)$ и ее биссектриса – дуга $A(x;\gamma)$. Построим хорды, соединяющие вершину V с концами отрезка $[-1,1]$. Углы наклона хорд обозначим μ_1 (UV) и μ_2 (VW). Поворот ломаной UVW в узле V равен $\mu_2-\mu_1=\rho$.

Пусть τ_1 – наклон касательной к кривой $y(x)$ в вершине V. Вершине соответствует точка перегиба $S(x_1,z_1)$ графика $z(x)$, и $z_1=\sin\tau_1$. Возрастание кривизны на дуге UV приводит к выпуклости вниз участка AS функции $z(x)$. Рассматривая прямые AS и SB как функции

$$l_1(x)=\frac{\sin\tau_1-\sin\alpha}{x_1+1}\,(x+1)+\sin\alpha$$

и

$$l_2(x)=\frac{\sin\tau_1-\sin\beta}{x_1-1}\,(x-1)+\sin\beta,$$

с учетом характера выпуклости $z(x)$ получаем

$$y_1 \overset{(8)}{=} \int -1x_1\frac{z(x)}{\sqrt{1-z(x)^2}}x < \int -1x_1\frac{l_1(x)}{\sqrt{1-l_1(x)^2}}x =$$
$$=(x_1+1)\,\frac{\cos\tau_1-\cos\alpha}{\sin\tau_1-\sin\alpha}=(x_1+1)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\tau_1}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{y_1}{x_1+1} = \operatorname{tg}\mu_1 < \operatorname{tg}\frac{\alpha+\tau_1}{2} \quad \text{и} \quad \tau_1 > 2\mu_1-\alpha.$$

Аналогично, на участке SB получим $\tau_1 < 2\mu_2-\beta$, откуда

$$2\mu_1-\alpha < \tau_1 < 2\mu_2-\beta \quad \Longrightarrow \quad \rho = \mu_2-\mu_1 > \frac{\beta-\alpha}{2} = -\gamma.$$

Геометрическое место точек, для которых $\rho = -\gamma$, есть дуга $A(x;\gamma)$, а условие $\rho > -\gamma$ удовлетворяется для всех точек, лежащих ниже этой дуги. □

§6. Кривые с двумя вершинами

В препринте [4] мы опрометчиво предположили, что допуская на кривой две и более вершин, можно удовлетворить любые граничные условия. Это не совсем так:

Теорема 8. *Граничные условия, исключающие принадлежность кривой к классам $\mathcal{V}_2^{\pm}(\alpha,\beta,k_1,k_2)$, имеют вид:*

$$\mathcal{V}_2^{+}: \begin{cases} \omega \geqslant 0, \\ k_1 \geqslant -\sin\alpha, \\ k_2 \leqslant \sin\beta; \end{cases} \qquad \mathcal{V}_2^{-}: \begin{cases} \omega \leqslant 0, \\ k_1 \leqslant -\sin\alpha, \\ k_2 \geqslant \sin\beta. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Докажем невозможность существования кривой $y(x) \in \mathcal{V}_2^{+}(\alpha,\beta,k_1,k_2)$ при $\omega \geqslant 0$, $k_1 \geqslant -\sin\alpha$ и $k_2 \leqslant \sin\beta$ (рис. 9).

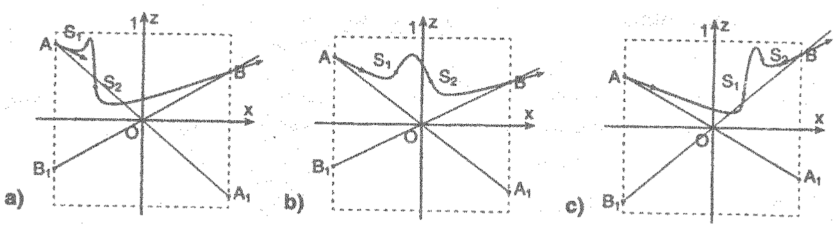

Рис. 9.

Наличие двух вершин у кривой $y(x)$ приводит к появлению двух точек перегиба $S_1 = (x_1, z_1)$ и $S_2 = (x_2, z_2)$ у ее синус-образа $z(x)$. Построим прямые

$$a(x) = -x \sin\alpha \quad (AA_1) \quad \text{и} \quad b(x) = x \sin\beta \quad (B_1 B).$$

Выпуклый вниз участок AS_1 графика $z(x)$ лежит выше своей левой касательной и, в силу $k_1 \geqslant -\sin\alpha$, выше $a(x)$; аналогично, поскольку $k_2 \leqslant \sin\beta$, участок S_2B лежит выше $b(x)$:

$$z(x) \geqslant a(x), \quad x \in [-1, x_1]; \quad z(x_1) > a(x_1); \tag{19}$$

$$z(x) \geqslant b(x), \quad x \in [x_2, 1]; \quad z(x_2) > b(x_2). \tag{20}$$

Пусть $x_1 \geqslant 0$, т.е. первая из двух вершин находится в левой полуплоскости (рис. 9a, b). Тогда, учитывая, что $\omega \geqslant 0$, т.е. $-\sin\alpha \leqslant \sin\beta$, имеем на $[-1, x_1]$

$$a(x) = -x \sin\alpha \geqslant x \sin\beta = b(x),$$

т.е. отрезок AO лежит не ниже B_1O. В сочетании с неравенством (19) –

$$z(x) \geqslant b(x), \quad x \in [-1, x_1]; \quad z(x_1) > b(x_1). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что обе точки перегиба и вся хорда S_1S_2 лежат выше $b(x)$. Значит, выше $b(x)$ лежит и выпуклый вверх участок S_1S_2 графика $z(x)$:

$$z(x) > b(x), \quad x \in [x_1, x_2].$$

Таким образом, $z(x) \gneqq b(x)$ на всем отрезке $[-1, 1]$, $\mathcal{Y}(z) > \mathcal{Y}(b) = 0$ (9) и построение функции $z(x)$ невозможно.

Пусть теперь $x_2 \geqslant 0$ (рис. 9 b, c). Аналогичные рассуждения приводят к неравенству $z(x) \gneqq a(x)$ с теми же последствиями.

Доказательство распространяется и на случай *двойной вершины* (точка x_5 на рис. 1): при этом дуга S_1S_2 вырождается в точку излома графика функции $z(x)$.

Рассмотрение кривой $-y(x) \in \mathcal{V}_2^+$ дает неравенства для кривых $y(x) \in \mathcal{V}_2^-$. □

Следствие. *Кривая класса $\mathcal{V}_n$, имеющая на концах касание второго порядка с окружностью (т.е. $\omega = 0$, $k_1 = -\sin\alpha = \sin\beta = k_2$), содержит $\geqslant 3$ вершин.*

Методом, использованным при доказательстве теоремы 5, можно показать, что при граничных условиях, отличных от (18), кривая класса $\mathcal{V}_2^{\pm}$ существует, и что кривая класса $\mathcal{V}_3^{\pm}$ существует при любых граничных условиях.

§7. Некоторые обобщения

Полученные результаты допускают обобщение в классе кусочно-гладких кривых: излом в точке x_i можно рассматривать как вершину бесконечной кривизны, или как точечную нагрузку $N_i\delta(x-x_i)$, интегрируемую в смысле дельта-функций Дирака $\delta(x)$. У синус-образов таких кривых появятся точки разрыва со скачками

$$\Delta z(x_i) = N_i = \sin\tau(x_i+0) - \sin\tau(x_i-0).$$

На рис. 1 вершины этого типа иллюстрируются точками x_6 и x_7; последняя дает пример *тройной вершины*. В излом можно вписать дугу достаточно большой постоянной кривизны k_i, $\operatorname{sign} k_i = \operatorname{sign} N_i$ (x_8–x_9 на рис. 1), что позволяет распространить сформулированные выше утверждения и на случай вершин-изломов.

Теорема о четырех вершинах замкнутой кривой обычно формулируется для традиционного понятия вершины и кривых с непрерывной функцией кривизны. Легко убедиться, что она остается справедливой при всех использованных обобщениях понятия вершины: разрывы кривизны могут быть локально сколь угодно точно сглажены до достижения C^2-гладкости, а характер экстремумов натурального уравнения $\widetilde{k}(s)$ кривой (s – длина дуги) при этом сохранится. Так, линза дает пример замкнутой кривой с двумя вершинами-изломами и двумя протяженными вершинами. Петля лемнискаты , рассматриваемая как замкнутая кривая, содержат одну "нормальную" и одну тройную вершину. Из двух дуг спирали Корню строится замкнутая кривая  с парой двойных вершин.

Связь приведенных локальных неравенств с теоремой о четырех вершинах можно продемонстрировать следующим наблюдением. Построим кривую $y(x) \in \mathcal{V}_1^{+}(\gamma, -\gamma, k_1, k_2)$ с $\omega = 0$. Условия ее существования (14) имеют вид: $k_1 < k_0$, $k_2 < k_0$, где $k_0 = -\sin\gamma$. Кривизну в вершине обозначим q: $q > k_1$, $q > k_2$. Такая кривая может быть дополнена до замкнутой C^1-гладкой кривой, для чего из конечной точки (1,0) надо провести окружность кривизны k_0 в начальную точку $(-1, 0)$. В итоге получается –

$$\ldots < k_0 > k_1 < q > k_2 < k_0 > \ldots ,$$

т.е. образуются три недостающие вершины: крайние точки исходной кривой становятся вершинами-минимумами, а дополняющая дуга становится протяженной вершиной-максимумом.

Автору приятно присоединиться к поздравлениям по адресу Виктора Абрамовича Залгаллера, в лице которого он нашел внимательного и отзывчивого собеседника и неформального руководителя исследований.

Литература

1. W. Vogt, *Über monotongekrümmte Kurven.* — J. reine angewandte Math., **144**, 239–248 (1914).
2. S. B. Jackson, *Vertices of plane curves.* — Bull. Am. Math. Soc. **50**, 564–578 (1944).
3. А. И. Курносенко, *О корректности дискретно-точечного задания инженерных кривых.* Препринт ИФВЭ 98-27. – Протвино, 1998; "Метрология", No. 3, 1999. (http://dbserv.ihep.su/~pubs/prep1998/98-27-e.htm).
4. А. И. Курносенко, *Интерполяционные свойства плоских спиральных кривых.* Препринт ИФВЭ 98-9. – Протвино, 1998; готовится к печати в журнале "Фунд. и прикл. математика", т. 7, вып. 2 (2001) (http://dbserv.ihep.su/~pubs/prep1998/98-9-e.htm).
5. А. И. Курносенко, *Инверсный инвариант пары окружностей.* Препринт ИФВЭ 99-59 Протвино, 1999; Зап. научн. семин. ПОМИ, **261**, 167–186 (1999) (http://dbserv.ihep.su/~pubs/prep1999/99-59-e.htm).
6. A. W. Nutborne, R. R. Martin, *Differential Geometry Applied to Curve and Surface Design.* — Vol. 1: *Foundations.* Ellis Horwood (1988).

Kurnosenko A. I. Inequalities on planar curves in the vicinity of one or two vertices.

An arc of a plane curve which is one-to-one projectable onto its chord is considered. Inequalities between curvatures and tangent angles at boundary points in relation to the number of vertices are established. For one-vertex curves, restrictions on the curves position are given.

A generalized notion of vertex a curve is used and applied to the four-vertex theorem.

Институт физики
высоких энергий
E-mail: kurnosenko@mx.ihep.su

Поступило 28 июня 2001 г.