Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

С. Е. Козлов, М. Ю. Никанорова

СЕКЦИОННЫЕ КРИВИЗНЫ И МНОЖЕСТВО РАЗДЕЛА КОМПЛЕКСНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА В ЕГО ПЛЮККЕРОВОЙ МОДЕЛИ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Введение

Многообразие Грассмана $G^+_{2,2k}$ допускает кэлерову структуру, построенную посредством его вложения в комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$ (см. [6], ср. [2]). В свою очередь $\mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V^k_{\mathbb{C}})$ естественно вкладывается грассманиан бивекторов $G^+_{2,2k} = G^+_2(V^{2k}_{\mathbb{R}})$, где $V^{2k}_{\mathbb{R}}$ – овеществление комплексного векторного пространства $V^k_{\mathbb{C}}$ (см. [11]). Применяя плюккерово вложение многообразия $G^+_2(V^{2k}_{\mathbb{R}})$ во внешнюю алгебру $\Lambda(V^{2k}_{\mathbb{R}})$ (см. [4]), получаем плюккерову модель комплексного проективного пространства:

$$\mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V^k_{\mathbb{C}}) \subset G^+_{2,2k} = G^+_2(V^{2k}_{\mathbb{R}}) \subset \Lambda_2(V^{2k}_{\mathbb{R}}). \qquad (1)$$

Эрмитово скалярное произведение на пространстве $V^k_{\mathbb{C}}$ индуцирует структуру эрмитова многообразия на $G^+_{2,2k}$ и его подмногообразии $\mathbb{C}P^{k-1}$. При этом $\mathbb{C}P^{k-1}$ располагается в $G^+_{2,2k}$ вполне геодезически (см. [4]), что позволяет применить для изучения внутренней геометрии пространства $\mathbb{C}P^{k-1}$ аппарат геометрии вещественных грассмановых многообразий. На этом пути нами доказан ряд теорем, освещающих связи между комплексной структурой многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$ и его римановой геометрией. Кроме того, доказано, что множество раздела для произвольной точки многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$ является гранью некоторой калибровки грассманиана $G^+_{2,2k}$. Этот результат относится к внешней геометрии плюккерова вложения (1).

§1. Кэлерова структура и секционные кривизны

1.1. Рассмотрим плюккерово вложение (1) комплексного проективного пространства в грассманиан бивекторов. В точке $\omega = e \wedge ie \in \mathbb{C}P^{k-1}$, $e \in V_{\mathbb{C}}^k$, выберем произвольное двумерное направление

$$\sigma = X \vee Y, \quad X, Y \in T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}, \quad |X| = |Y| = 1, \quad \langle X, Y \rangle = 0.$$

Здесь символ "$\vee$" означает операцию внешнего умножения в алгебре $\Lambda(T_\omega \mathbb{C}P^{k-1})$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в соответствующем евклидовом пространстве. Эрмитово скалярное произведение в $V_{\mathbb{C}}^k$ можно представить в виде

$$(x, y) = \langle x, y \rangle - i \langle ix, y \rangle. \tag{2}$$

Векторы X, Y можно представить в виде

$$X = \frac{n \wedge ie + e \wedge in}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{m \wedge ie + e \wedge im}{\sqrt{2}}, \quad \langle n, m \rangle = 0, \tag{3}$$

где пары (e, n), (e, m) эрмитово-ортонормированны в $V_{\mathbb{C}}^k$ (см. [4]).

Теорема. *Для секционной кривизны K_σ многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$ справедлива формула*

$$K_\sigma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \langle n, im \rangle^2. \tag{4}$$

Доказательство. Из равенств (3) и [5, 1.3] вытекает

$$\begin{aligned} K_\sigma &= \langle n \wedge in, m \wedge im \rangle - \left[\frac{1}{2} (n \wedge im + m \wedge in) \right] + 1 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \langle in, m \rangle \\ \langle n, im \rangle & * \end{vmatrix} - \frac{1}{4} \left(\begin{vmatrix} 1 & \langle n, im \rangle \\ \langle n, im \rangle & 1 \end{vmatrix} \right. \\ &\quad + \left. \begin{vmatrix} 1 & \langle m, in \rangle \\ \langle m, in \rangle & 1 \end{vmatrix} \right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \langle n, im \rangle^2. \quad \square \end{aligned}$$

Из формул (3), (4) следует, что при $k = 2$ ($\mathbb{C}P^1 = S^2$) секционная кривизна $K_\sigma = 2$, а при $k > 2$ имеем $1 \leqslant K_\sigma \leqslant 2$. Множество геодезических, касающихся площадки σ с максимальной кривизной 2, образуют вполне геодезическое подмногообразие пространства $\mathbb{C}P^{k-1}$, гомеоморфное сфере S^2, а для кривизны 1/2 получается вполне геодезическое подмногообразие, гомеоморфное вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (см. [4, 3.3]).

1.2. Комплексная структура J_ω в касательном пространстве точки $\omega = e_1 \wedge e_2$ грассманиана $G^+_{2,2k}$ индуцирована поворотом $e_1 \mapsto e_2 \mapsto -e_1$, оставляющим ортогональное дополнение $V^\perp_\omega$ к площадке V_ω простого бивектора ω неподвижным. Поэтому для касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{2,2k}$ справедливо равенство

$$J_\omega X = J_\omega(\lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2) = -\lambda_1 n_1 \wedge e_1 + \lambda_2 e_2 \wedge n_2 \tag{5}$$

(см. [4, 3.1]). Эта структура интегрируема, поэтому грассманиан бивекторов является комплексным многообразием. Из формулы (5) следует равенство

$$\langle X, Y\rangle = \langle J_\omega X, J_\omega Y\rangle, \quad X, Y \in T_\omega G^+_{2,2k},$$

что влечет эрмитовость структуры J_ω (см. [1, с. 135]). Используя формулу [8, 11(9)] для геодезической $\exp_\omega tX$, легко показать, что для любых векторных полей X, Y будет $J\nabla_X Y = \nabla_X JY$, откуда вытекает кэлеровость комплексной структуры J_ω (см. [7, с. 116]).

Используя комплексную структуру J_ω, дадим инвариантную геометрическую интерпретацию скалярному произведению $\langle n, im\rangle$ в формуле (4). Рассмотрим произвольную двумерную площадку $\sigma \subset T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$. Через α_1 и α_2 обозначим стационарные углы между (неориентированными) плоскостями σ и $\widetilde{\sigma} = J_\omega \sigma$.

Теорема. *Плоскости σ и $\widetilde{\sigma}$ изоклинны, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Если плоскость σ натянута на векторы X, Y из формулы* (3), *то*

$$\cos\alpha = |\langle n, im\rangle|. \tag{6}$$

Доказательство. Плоскость σ совпадает с площадкой простого единичного бивектора $X \vee Y$, а площадка $\widetilde{\sigma}$ натянута на векторы

$$\begin{aligned} \widetilde{X} = J_\omega X = \frac{-n \wedge e + ie \wedge in}{\sqrt{2}}, \\ \widetilde{Y} = J_\omega Y = \frac{-m \wedge e + ie \wedge im}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{7}$$

Из равенств (3), (7) вытекают 4 соотношения:

$$\mathrm{Lin}\,(\widetilde{X}, Y) \perp \mathrm{Lin}\,(X, \widetilde{Y}). \tag{8}$$

В силу (8) стационарные углы α_1 и α_2 между плоскостями σ и $\widetilde{\sigma}$ совпадают с углами, образованными направлениями векторов $X, \widetilde{Y}$ и $Y, \widetilde{X}$, соответственно (см. [8, §12]). Отсюда

$$\cos\alpha_1 = |\langle X, \widetilde{Y}\rangle| = \frac{1}{2}|\langle m, in\rangle - \langle n, im\rangle| = |\langle n, im\rangle|,$$
$$\cos\alpha_2 = |\langle Y, \widetilde{X}\rangle| = \frac{1}{2}|\langle n, im\rangle - \langle m, in\rangle| = |\langle n, im\rangle|. \quad \square$$

Таким образом, формулу (4) можно переписать в инвариантном виде

$$K_\sigma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\alpha. \tag{9}$$

Если площадка σ голоморфна, т.е. $\sigma = J_\omega\sigma$, то $\alpha = 0$ и кривизна принимает максимальное значение 2. Минимальное значение кривизны $1/2$ достигается при $\alpha = \pi/2$, т.е. когда плоскости σ и $J_\omega\sigma$ вполне ортогональны. Поэтому величину $2 - K_\sigma$ можно рассматривать как “меру неголоморфности” площадки σ.

1.3. Объявим пару (X, Y) положительно ориентированным базисом плоскости σ. Ориентированной площадке σ канонически соответствует простой единичный бивектор $\sigma = X \vee Y$, обозначенный нами той же буквой. Вычислим косинус угла ψ между бивекторами σ и $\widetilde{\sigma} = J_\omega\sigma = J_\omega X \vee J_\omega Y$:

$$\cos\psi = \langle X \vee Y, J_\omega X \vee J_\omega Y\rangle = \begin{vmatrix} \langle X, \widetilde{X}\rangle & \langle Y, \widetilde{X}\rangle \\ \langle X, \widetilde{Y}\rangle & \langle Y, \widetilde{Y}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= -\langle X, \widetilde{Y}\rangle\langle Y, \widetilde{X}\rangle = -\langle n, im\rangle\langle m, in\rangle = \langle n, im\rangle^2 = \cos^2\alpha.$$

Отсюда следует, что $\psi \in [0, \pi/2]$, и формула (9) приобретает новую геометрическую интерпретацию:

$$K_\sigma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\psi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Замечание. Формула (9) сформулирована и доказана в [5, с. 255] (при другой нормировке метрики комплексного проективного пространства). Однако там нет инвариантной геометрической интерпретации угла α.

1.4. Из представления (3) для касательного вектора $X \in T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$ следует, что при условии $|X| = |\widetilde{X}|$ существует унитарное преобразование пространства $V_{\mathbb{C}}^k$, совмещающее два элемента касательного расслоения (ω, X), $(\widetilde{\omega}, \widetilde{X}) \in T\mathbb{C}P^{k-1}$. Любое унитарное преобразование действует на комплексном проективном пространстве изометрически. Возникает вопрос: а можно ли унитарно совместить две двумерные площадки $\sigma \in T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$ и $\widetilde{\sigma} \in T_{\widetilde{\omega}} \mathbb{C}P^{k-1}$? Ответ на этот вопрос дает

Теорема. *Пусть в касательных пространствах точек ω и $\widetilde{\omega}$ многообразия $\mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V_{\mathbb{C}}^k)$ выбраны две двумерные площадки σ и $\widetilde{\sigma}$ с $K_\sigma = K_{\widetilde{\sigma}}$. Тогда существует унитарное преобразование $A \in U(n) = \mathcal{U}(V_{\mathbb{C}}^n)$, совмещающее эти площадки, т.е.*

$$A\omega = \widetilde{\omega}, \quad A\sigma = \widetilde{\sigma}.$$

Доказательство. Можно считать, что $\omega = \widetilde{\omega}$, $\sigma = X \vee Y$, $\widetilde{\sigma} = X \vee \widetilde{Y}$, где X, Y определены в (3), а

$$\widetilde{Y} = \frac{\widetilde{m} \wedge ie + e \wedge i\widetilde{m}}{\sqrt{2}}, \quad \langle n, \widetilde{m} \rangle = 0.$$

Из условия теоремы и формулы (4) следует, что

$$|\langle n, im \rangle| = |\langle n, i\widetilde{m} \rangle|. \tag{11}$$

Определим векторы m_1, $\widetilde{m}_1 \in V_{\mathbb{C}}^k$ равенствами

$$m_1 = m - \langle m, in \rangle in, \quad \widetilde{m}_1 = \widetilde{m} - \langle \widetilde{m}, in \rangle in. \tag{12}$$

Тогда

$$(m_1, n) = \langle m_1, n \rangle - i\langle im_1, n \rangle = i\langle m_1, in \rangle = 0$$

(см. (2)). Аналогично $(\widetilde{m}_1, n) = 0$. Значит векторы $m_1, \widetilde{m}_1$ принадлежат эрмитову ортогональному дополнению $n^\perp_{(\mathbb{C})}$. Используя равенство (11), находим

$$\begin{aligned} |m_1|^2 &= \langle m_1, m_1 \rangle + \langle m, in \rangle^2 - 2\langle m, in \rangle^2 = 1 - \langle n, im \rangle^2 \\ &= 1 - \langle n, i\widetilde{m} \rangle^2 = |\widetilde{m}_1|^2. \end{aligned}$$

Значит существует унитарное преобразование $\widetilde{A} : n^\perp_{(\mathbb{C})} \to n^\perp_{(\mathbb{C})}$ такое, что $\widetilde{A} m_1 = \widetilde{m}_1$. За счет выбора знака у вектора $\widetilde{m}$ в равенстве (11) можно снять модули. Определим унитарное преобразование $A : V_{\mathbb{C}}^k \to V_{\mathbb{C}}^k$, полагая $An = n$, $A = \widetilde{A}$ на $n^\perp_{(\mathbb{C})}$. Из равенств (11) (без модулей) и (12) следует, что $Am = \widetilde{m} \Longrightarrow AY = \widetilde{Y} \Longrightarrow A\sigma = \widetilde{\sigma}$. $\square$

§2. Множество раздела как грань калибровки

2.1. Множества раздела. Напомним определение множества раздела C_x риманова многообразия M в точке x. Считаем, что вектор $X \in T_xM\setminus\{0\}$ принадлежит множеству C_x^0, если выполнено одно из двух условий:

а) точка $\exp_x(tX)$ сопряжена с x вдоль кратчайшей $\exp_x(tX)$, $t \in [0,1]$, либо

б) существует другая кратчайшая, соединяющая x и $\exp_x X$.

Тем самым геодезическая $\exp_\omega(tX)$, $t \in [0,T]$ является кратчайшей при $T \leqslant 1$ и не является кратчайшей при $T > 1$. Множество C_x^0 называется *множеством раздела* многообразия M *в касательном пространстве*. Множество $C_x = \exp_x C_x^0$ называется *множеством раздела* многообразия M *в точке* x.

В грассмановых многообразиях $G_{p,n}^+$ свойства а) и б) выполнены одновременно (см. [9, 25.4]).

2.2. Калибровки. Рассмотрим пространство p-векторов $\Lambda_p(V^n)$, построенное над евклидовым пространством V^n. При помощи метрического изоморфизма отождествим $\Lambda_p(V^n)$ с сопряженным пространством $\Lambda_p^*(V^n)$. В плюккеровой модели грассманиан $G_{p,n}^+ = G_p^+(V^n)$ лежит в пространстве $\Lambda_p(V^n)$. *Калибровкой степени* p называется такая форма $\varphi \in \Lambda_p^*(V^n) = \Lambda_p(V^n)$, что гиперплоскость

$$T_\varphi = \{x \in \Lambda_p(V^n) : \langle x, \varphi\rangle = 1\}$$

является опорной к многообразию $G_{p,n}^+$. *Гранью* калибровки φ называется множество

$$G(\varphi) = T_\varphi \cap G_{p,n}^+$$

(подробнее см. [4]).

2.3. Рассмотрим плюккерову модель (1) комплексного проективного пространства. Для точки $(\omega, X) \in T_\omega\mathbb{C}P^{k-1}$ с $\omega = e \wedge ie$ и $|X| = 1$ из (3) и [8, 11(9)] следует

$$\exp_\omega(tX) = \left(e\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + n\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(ie\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + in\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad (13)$$

откуда вытекает

$$\exp_\omega\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}X\right) = \exp_\omega\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}X\right) = n \wedge in \in G_2^+(e_{(\mathbb{C})}^\perp). \quad (14)$$

Теорема. *Множество раздела C_ω многообразия $\mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V^k_{\mathbb{C}})$ в точке $\omega = e \wedge ie$ представимо в виде*

$$C_\omega = \{n \wedge in \mid n \in e^\perp(\mathbb{C}),\ |n| = 1\}. \tag{15}$$

Доказательство. По формуле [8, 13(6)] радиус инъективности грассманиана $G^+_{2,2k}$ равен $\pi/\sqrt{2}$. Так как $\mathbb{C}P^{k-1}$ расположено в $G^+_{2,2k}$ вполне геодезически, то радиус инъективности $r_{\text{inj}}(\mathbb{C}P^{k-1}) \geqslant \pi/\sqrt{2}$. Из формулы (14) следует, что $r_{\text{inj}}(\mathbb{C}P^{k-1}) = \pi/\sqrt{2}$, поэтому множество C^0_ω есть шар радиуса $\pi/\sqrt{2}$ в касательном пространстве $T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$, откуда в силу той же формулы (14) вытекает равенство (15). □

Из формулы (15) следует, что

$$C_\omega = \mathbb{C}P^{k-2} = \mathbb{P}(e^\perp_{(\mathbb{C})}) \subset \mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V^k_{\mathbb{C}}). \tag{16}$$

В силу (13) последнее включение вполне геодезично.

2.4. Рассмотрим какой-нибудь унитарный базис $n_1, \dots, n_{k-1}$ пространства $e^\perp_{(\mathbb{C})}$. Сопоставим с этим базисом калибровку

$$\varphi = n_1 \wedge in_1 + \ldots + n_{k-1} \wedge in_{k-1}. \tag{17}$$

По лемме 3.4 из [3] эта калибровка не зависит от выбора базиса $\{n_j\}$. Теорема 2.2 из [4] утверждает, что многообразие $\mathbb{C}P^{k-2} = \mathbb{P}(e^\perp_{(\mathbb{C})})$ является гранью калибровки φ. Так как в силу (16) множество раздела C_ω совпадает с этим многообразием, то справедлива

Теорема. *Множество раздела C_ω многообразия $\mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{P}(V^k_{\mathbb{C}})$ в точке $\omega = e \wedge ie$ есть грань калибровки φ, определенной равенством* (17). □

Заметим, что само комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$ совпадает с гранью калибровки $e \wedge ie + \varphi = \omega + \varphi$.

Литература

1. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* Наука, С.-Петербург (1994).
2. S. S. Chern, *Minimal surfaces in a Euclidean space of N dimensions.* — Diff. Comb. Topology, Morse Jubilee Volume. Princeton (1965), 187–198.

3. А. Н. Глушаков, С. Е. Козлов, *Геометрия сферы калибровок степени два.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **261** (1999), 43–54.
4. А. Н. Глушаков, С. Е. Козлов, *Геодезические на гранях калибровок второй степени.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **261** (1999), 55–65.
5. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом.* Мир, М. (1971).
6. D. Hoffman, R. Osserman, *The geometry of the generalized Gauss map.* — Mem. Am. Math. Soc., **28**, No. 236(1) (1980), 1–105.
7. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии,* т. I. Наука, М. (1981).
8. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **246** (1997), 84–107.
9. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий* VI . — Зап. научн. семин. ПОМИ, **252** (1998), 121–133.
10. С. Е. Козлов, *Стационарные значения секционной кривизны в грассманианах бивекторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **261** (1999), 102–118.
11. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* Наука, М. (1977).

Kozlov S. E., Nikanorova M. Yu. Sectional curvatures and the separation set of the complex projective space in its Plücker model.

The Plücker embedding of the complex projective space $\mathbb{C}P^{k-1}$ in the Grassmannian $G^+_{2,2k}$ of bivectors is used for proving several theorems on the relationship between the complex structure of $\mathbb{C}P^{k-1}$ and its Riemannian geometry. It is shown that the separation set of $\mathbb{C}P^{k-1}$ in the Plücker model is a face of $G^+_{2,2k}$ for a certain calibration.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 мая 2001 г.