Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

С. Е. Козлов

СТАЦИОНАРНОСТЬ КРИВИЗН ДВУМЕРНЫХ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ГРАССМАНИАНЕ БИВЕКТОРОВ

**Дорогому Виктору Абрамовичу
к 80-летию**

Введение

В работе [8] для многообразия Грассмана $G^+_{2,n}$ были вычислены критические значения секционной кривизны K_σ как функции двумерного направления σ:

$$\operatorname{ext} K_\sigma = \left\{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

и алгебраически описаны площадки σ, в которых эти значения достигаются. Выяснилось, что при всех $\kappa \in \operatorname{ext} K_\sigma$, кроме $\kappa = 1/5$, поверхности $\Phi(\kappa)$, образованные геодезическими в многообразии $G^+_{2,n}$, касающимися площадки σ, – вполне геодезические. Вопрос о справедливости этого свойства для кривизны $1/5$ оставался открытым. В настоящей заметке доказано, что поверхность $\Phi(1/5)$ является вполне геодезической сферой, совпадающей с гауссовым образом поверхности Веронезе (см. [1], п. 4.3.0.1).

В процессе решения этой задачи была получена ранее известная классификация двумерных вполне геодезических поверхностей многообразия $G^+_{2,n}$ (см. [4]). Оказалось, что все они (с точностью до изометрии в $G^+_{2,n}$) исчерпываются набором многообразий $\Phi(\kappa)$, $\kappa \in \operatorname{ext} K_\sigma$.

В этой работе мы приводим вышеупомянутую классификацию по двум причинам. Во-первых, наш метод исследований использует плюккерово вложение многообразия $G^+_{2,n}$ во внешнюю алгебру $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, поэтому наше описание вполне геодезических подмногообразий содержит новую информацию об их расположении в евклидовом пространстве $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ (см. п. 3.6). Во-вторых, сформулированный нами в теореме 1.1 критерий вполне геодезичности двумерной поверхности справедлив для любого риманова симметрического пространства, поэтому теорема 1.1 вместе с результатами работы [7] (см. п. 3.1) вселяет надежду на возможность обобщения нашего метода классификации на произвольные грассманианы $G^+_{p,n}$.

§1. Критерий вполне геодезичности двумерных подмногообразий в симметрических пространствах

В каждой точке x риманова многообразия M касательному вектору $X \in T_xM$ соответствует линейный самосопряженный оператор

$$L_X : T_xM \to T_xM, \quad Z \mapsto R(Z,X)X,$$

где R – преобразование кривизны. В двумерной площадке $\sigma \subset T_xM$ выберем ортонормированный базис X, Y и повернем его на угол φ:

$$X(\varphi) = X\cos\varphi + Y\sin\varphi, \quad Y(\varphi) = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi.$$

Лемма. *Пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены условия*

$$L_X(Y) = \lambda Y, \quad L_Y(X) = \lambda X. \tag{1}$$

Тогда для любого угла φ

$$L_{X(\varphi)}(Y(\varphi)) = \lambda Y(\varphi).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{gathered} L_{X(\varphi)}Y(\varphi) = \\ R\big(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi, X\cos\varphi + Y\sin\varphi\big)\big(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\big) = \\ -R(X,Y)\big(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\big) = \lambda Y\cos\varphi - \lambda X\sin\varphi = \lambda Y(\varphi). \quad \square \end{gathered}$$

Заметим, что коэффициент λ в (1) равен секционной кривизне K_σ многообразия M в двумерном направлении $\sigma = X \wedge Y$.

1.1. Теорема. *Пусть M – риманово симметрическое многообразие, $\sigma \subset T_x M$ – двумерная площадка, X, Y – какой-либо ее ортонормированный базис, $\Phi_\sigma = \exp_x \sigma$. Поверхность Φ_σ является вполне геодезической тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполнено условие* (1).

Доказательство. Для некоторых $t \in \mathbb{R}$ малых по модулю рассмотрим параметризацию поверхности Φ_σ:

$$r(t, \varphi) = \exp_x(tX(\varphi)). \tag{2}$$

Из теории симметрических пространств известно, что для вполне геодезичности поверхности Φ_σ достаточно выполнения этого свойства (вполне геодезичности) при малых t в параметризации (2).

1) Пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено условие (1). Покажем, что вторая форма B поверхности $\Phi_\sigma \subset M$ обращается в ноль. Вдоль поверхности $r(t, \varphi)$ рассмотрим ортонормированные поля

$$X = r_t = \frac{\partial r}{\partial t}, \quad Y = \frac{r_\varphi}{|r_\varphi|} \quad \bigl(r_\varphi(0, \varphi) = Y(\varphi)\bigr).$$

По определению геодезической поле $r_t(t, \varphi_0)$ параллельно вдоль кривой $r(t, \varphi_0)$. Поле $r_\varphi(t, \varphi_0)$ является полем Якоби вдоль геодезической $r(t, \varphi_0)$. В симметрическом многообразии M, в силу леммы и условия (1), поле $Y(t, \varphi_0)$ параллельно вдоль этой геодезической (см. [3], 31.2.5). Поэтому

$$B(X, X) = (\nabla_X X)^N = \left(\frac{DX}{dt}\right)^N = 0, \quad B(X, Y) = \left(\frac{DY}{dt}\right) = 0.$$

Для вычисления компоненты $B(Y, Y) = (\nabla_Y Y)^N$ воспользуемся равенством

$$\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} = R(X, Y)Y.$$

Так как $\nabla_X Y = 0$ и $[X, Y] = aX + bY$, то вдоль геодезической $r(t, \varphi_0)$ будет

$$\frac{D}{\partial t}(\nabla_Y Y) = b\nabla_Y Y + \lambda X. \tag{3}$$

Здесь мы использовали условие (1), лемму и тот факт, что в симметрическом многообразии для параллельных вдоль геодезической $r(t, \varphi_0)$ полей X, Y поле $R(X, Y)Y$ тоже параллельно.

Выберем произвольный вектор $n \in \sigma^{\perp} \subset T_x M$ и распространим его параллельно вдоль кривой $r(t, \varphi_0)$. Определим функцию $h(t) = \langle \nabla_X Y, n \rangle(t)$. При $t = 0$ вся форма B обращается в ноль, поэтому $h(0) = 0$. Из (3) следует $dh/dt = bh$. Значит $h(t) = 0$ и форма $B(Y, Y)$ обращается в ноль вдоль любой геодезической $r(t, \varphi_0)$, поэтому поверхность Φ_σ – вполне геодезическая.

2) Пусть двумерная поверхность Φ_σ – вполне геодезическая. Тогда ее вторая форма – нулевая: $B = 0$, и на касательных к Φ_σ полях действия связности ∇ на M и связности Леви-Чивита $\widetilde{\nabla}$ на Φ_σ совпадают. Откуда

$$R(Y, X)X = \widetilde{R}(Y, X)X = K_\sigma Y, \quad R(X, Y)Y = \widetilde{R}(X, Y)Y = K_\sigma X$$

(см. [6], 14.7.2), что завершает доказательство теоремы. □

§2. Специальный базис для двумерного направления в $G^+_{2,n}$

Отождествим грассманово многообразие $G^+_{2,n}$ с его образом при плюккеровом вложении в пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ (см. [5]). В касательном пространстве $T_\omega G^+_{2,n}$, $\omega = e_1 \wedge e_2 \in G^+_{2,n}$, рассмотрим двумерное подпространство σ, натянутое на ортонормированную пару векторов X, $Y \in T_\omega G^+_{2,n}$. При фиксированном бивекторе ω пара векторов e_1, e_2 определена с точностью до поворота на накоторый угол α:

$$e_1 = \widetilde{e}_1 \cos\alpha + \widetilde{e}_2 \sin\alpha, \quad e_2 = -\widetilde{e}_1 \sin\alpha + \widetilde{e}_2 \cos\alpha.$$

Пару X, Y можно поворачивать на угол φ (см. п. 1.1). При фиксированных e_1, e_2 каждый касательный вектор $Z \in T_\omega G^+_{2,n}$ однозначно представи́м в виде

$$Z = N_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge N_2, \quad N_1,\ N_2 \perp \operatorname{Lin}(e_1, e_2) \tag{4}$$

(см. [5]). При повороте пары e_1, e_2 на угол α представление (4) приобретает вид

$$\begin{aligned} Z &= N_1 \wedge \big(-\widetilde{e}_1 \sin\alpha + \widetilde{e}_2 \cos\alpha \big) + \big(\widetilde{e}_1 \cos\alpha + \widetilde{e}_2 \sin\alpha \big) \wedge N_2 \\ &= \big(N_1 \cos\alpha - N_2 \sin\alpha \big) \wedge \widetilde{e}_2 + \widetilde{e}_1 \wedge \big(N_1 \sin\alpha - N_2 \cos\alpha \big), \end{aligned}$$

откуда

$$X(\varphi) = \Big[\cos\varphi \big(N_1^X \cos\alpha - N_2^X \sin\alpha \big) + \sin\varphi \big(N_1^Y \cos\alpha - N_2^Y \sin\alpha \big) \Big] \wedge \widetilde{e}_2$$

$$+\widetilde{e}_1 \wedge \Big[\cos\varphi\big(N_1^X \sin\alpha + N_2^X \cos\alpha\big) + \sin\varphi\big(N_1^Y \sin\alpha + N_2^Y \cos\alpha\big)\Big]$$
$$= \widetilde{N}_1^X(\alpha,\varphi) \wedge \widetilde{e}_2(\alpha) + \widetilde{e}_1(\alpha) \wedge \widetilde{N}_2^X(\alpha,\varphi). \tag{5}$$

Аналогично,

$$Y(\varphi) = \widetilde{N}_1^Y(\alpha,\varphi) \wedge \widetilde{e}_2(\alpha) + \widetilde{e}_1(\alpha) \wedge \widetilde{N}_2^Y(\alpha,\varphi). \tag{6}$$

Условия ортонормированности пары X, Y имеют вид

$$\begin{gathered}(N_1^X)^2 + (N_2^X)^2 = (N_1^Y)^2 + (N_2^Y)^2 = 1,\\ \langle\, N_1^X, N_1^Y \,\rangle + \langle\, N_2^X, N_2^Y \,\rangle = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Простые, но громоздкие вычисления с использованием формул (5)–(7) показывают, что всегда найдутся углы α и φ, при которых

$$\langle\, \widetilde{N}_1^X, \widetilde{N}_2^X \,\rangle = \langle\, \widetilde{N}_1^Y, \widetilde{N}_2^Y \,\rangle = 0.$$

Отсюда вытекает

Утверждение. *Для любой точки $\omega \in G_{2,n}^+$ и любой 2-площадки $\sigma \subset T_\omega G_{2,n}^+$ найдутся ортонормированные пары e_1, e_2 и X, Y такие, что*

$$\begin{gathered}\omega = e_1 \wedge e_2, \qquad \sigma = \mathrm{Lin}\,(X,Y),\\ X = \lambda_1 n_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge n_2, \quad Y = \mu_1 m_1 \wedge e_2 + \mu_2 e_1 \wedge m_2,\\ n_1^2 = n_2^2 = m_1^2 = m_2^2 = 1, \quad \langle\, n_1, n_2 \,\rangle = \langle\, m_1, m_2 \,\rangle = 0. \ \square\end{gathered} \tag{8}$$

§3. Классификация двумерных вполне геодезических подмногообразий в грассманиане $G_{2,n}^+$

3.1. В работе [7], п. 23.7, для любого касательного вектора X к многообразию Грассмана найдены собственные числа и соответствующие собственные подпространства оператора L_X. Эти результаты и теорема 1.1 позволяют полностью описать двумерные вполне геодезические подмногообразия грассманиана $G_{2,n}^+$. Рассмотрим двумерную вполне геодезическую поверхность $\Phi \subset G_{2,n}^+$. Выберем произвольную точку $\omega \in \Phi$ и положим $\sigma = T_\omega\Phi$. Тогда $\Phi = \Phi_\sigma = \exp_\omega \sigma$. Если $K_\sigma = 0$, то по теореме 4.7 из [8] поверхность Φ есть плоский вполне геодезический тор с параметризацией

$$\Phi(x,y) = \exp_\omega(x n_1 \wedge e_2 + y e_1 \wedge n_2), \tag{9}$$

где $\omega = e_1 \wedge e_2$, n_1, $n_2 \perp \mathrm{Lin}\,(e_1, e_2)$, $\langle\, n_i, n_j \,\rangle = \delta_{ij}$.

3.2. Пусть $K_\sigma \neq 0$. По утверждению 2.1 в площадке σ найдется ортонормированная пара векторов X, Y, для которых имеет место разложение (8). Выбором нумерации и знаков векторов n_i, m_i можно добиться того, чтобы

$$\lambda_2 \geqslant \lambda_1 \geqslant 0, \quad \mu_1, \mu_2 \geqslant 0.$$

Если отношение $\lambda_1 : \lambda_2$ иррационально, то по теореме 16.4 из [7] замыкание геодезической $\exp_\omega(tX)$ есть тор, конгруэнтный тору (9), что противоречит условию $K_\sigma \neq 0$. Поэтому для любого угла φ отношение $\lambda_1(\varphi) : \lambda_2(\varphi)$ рационально и значит μ_1, $\mu_2 \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Следовательно, возможны два варианта:

$$(\mathrm{A}): \ \mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = \lambda_2; \quad (\mathrm{B}): \ \mu_1 = \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_1.$$

Пусть $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Тогда в случае (A) будет

$$X = n_1 \wedge e_2, \quad Y = m_1 \wedge e_2, \quad \langle n_1, m_1 \rangle = 0. \tag{10}$$

Поверхность Φ – вполне геодезическая единичная сфера, стандартно вложенная в евклидово пространство $\Lambda_2(\mathrm{Lin}\,(e_2, n_1, m_1)) \subset \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ (см. [8]). В случае (B) будет

$$X = n_1 \wedge e_2, \quad Y = e_1 \wedge m_2.$$

Так как $\lambda_1(\varphi) : \lambda_2(\varphi) = 0$, то векторы n_1 и m_1 коллинеарны и поверхность Φ конгруэнтна сфере, определенной равенством (10).

3.3. Далее будем считать, что $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. Пусть

$$W = \mathrm{Lin}\,(n_1, n_2, m_1, m_2).$$

Рассмотрим отдельно три случая, когда $\dim W = 2, 3, 4$.

Пусть $\dim W = 2$. По теореме 23.7 из [4] собственные числа оператора L_X суть 0, $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$, $(\lambda_2 + \lambda_1)^2$, а собственные подпространства чисел $(\lambda_2 - \lambda_1)^2$ и $(\lambda_2 + \lambda_1)^2$ суть соответственно

$$\mathrm{Lin}\,(n_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1) \ \text{ и } \ \mathrm{Lin}\,(-n_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1).$$

Из теоремы 1.1 ($\lambda = K_\sigma \neq 0$) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/\sqrt{2}$ и

$$X = \frac{n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-n_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Поверхность Φ – вполне геодезическая сфера с радиусом $1/\sqrt{2}$, стандартно вложенная в евклидово пространство $\Lambda_2(\mathrm{Lin}\,(e_1, e_2, n_1, n_2))$ (см. [8]).

3.4. Пусть $\dim W = 3$. По теореме 23.7 из [7] находим собственные числа и соответствующие собственные подпространства оператора L_X. Пусть (n_1, n_2, n_3) – ортонормированный базис в W. Тогда

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 \colon \operatorname{Lin}(n_3 \wedge e_2), \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \colon \operatorname{Lin}(e_1 \wedge n_1 + n_2 \wedge e_2), \\ &\lambda_2^2 \colon \operatorname{Lin}(n_3 \wedge e_1), \quad (\lambda_1 + \lambda_2)^2 \colon \operatorname{Lin}(e_1 \wedge n_1 - n_2 \wedge e_2). \end{aligned} \tag{12}$$

Остальные собственные векторы отвечают собственному числу нуль. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то теорема 1.1 дает противоречие с условием $\dim W = 3$. Поэтому $\lambda_2 > \lambda_1$. Так как вектор Y не может принадлежать ни одному из собственных подпространств, перечисленных в (12), то какие-то из чисел λ_1^2, λ_2^2, $(\lambda_1 + \lambda_2)^2$ должны совпадать. При наших условиях это возможно только если $\lambda_1^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2$, т.е. $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Учитывая, что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, находим $\lambda_1 = 1/\sqrt{5}$, $\lambda_2 = 2/\sqrt{5}$. Из (12) следует

$$\begin{aligned} Y &= \cos\alpha \frac{n_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1}{\sqrt{2}} + \sin\alpha \quad n_2 \wedge e_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} n_2 \cos\alpha + n_3 \sin\alpha\right) \wedge e_2 + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} e_1 \wedge n_1. \end{aligned}$$

Из сравнения последнего равенства с (8) вытекает, что в случае (A): $(\cos\alpha)/\sqrt{2} = 2/\sqrt{5}$ – противоречие; в случае (B):

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{5}} n_1 \wedge e_2 + \frac{2}{\sqrt{5}} e_1 \wedge n_2, \\ Y &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} n_3\right) \wedge e_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} e_1 \wedge n_1. \end{aligned} \tag{13}$$

По построению разложения (13) $L_X Y = Y/5$. Это равенство инвариантно относительно действия группы $O(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим преобразование из этой группы, заданное условиями: $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto -e_1$, пространство W поворачивается на угол π вокруг вектора $(n_2/2 + n_3\sqrt{3}/2) + n_2$. При этом преобразовании имеем

$$\begin{aligned} X &\mapsto \frac{1}{\sqrt{5}}(-n_1) \wedge (-e_1) + \frac{2}{\sqrt{5}} e_2 \wedge \left(\frac{1}{2} n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} n_3\right), \\ Y &\mapsto \frac{2}{\sqrt{5}} n_1 \wedge (-e_1) + \frac{1}{\sqrt{5}} e_2 \wedge (-n_1) = X. \end{aligned}$$

Значит $L_{-Y} X = X/5$. Так как $L_Y = L_{-Y}$, то по теореме 1.1 поверхность Φ – вполне геодезическая.

3.5. Пусть $\dim W = 4$. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то по тем же причинам, что и в п. 3.3,

$$Y = \cos\alpha \frac{n_2 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_1}{\sqrt{2}} + \sin\alpha\ n_3 \wedge e_2,$$

что противоречит условию $\dim W = 4$.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/\sqrt{2}$. Рассмотрим ортонормированный базис (n_1, n_2, n_3, n_4) пространства W. По теореме 23.7 из [7] оператор L_X имеет собственные числа $1/2$ и 2, а соответствующие собственные подпространства суть:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\colon \operatorname{Lin}\bigl(e_1 \wedge n_3, e_1 \wedge n_4, e_2 \wedge n_3, e_2 \wedge n_4\bigr); \\ &2\colon \operatorname{Lin}\bigl(-n_2 \wedge e_1 + e_1 \wedge n_1\bigr). \end{aligned}$$

Остальные собственные векторы имеют нулевое собственное число. Случай $L_X Y = 2Y$ противоречит условию $\dim W = 4$. Поэтому

$$X = \frac{n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{\widetilde{n}_3 \wedge e_2 + e_1 \wedge \widetilde{n}_4}{\sqrt{2}}, \tag{14}$$

где $(n_1, n_2, \widetilde{n}_3, \widetilde{n}_4)$ – ортонормированный базис и $L_X Y = Y/2$. Ортогональное преобразование

$$n_1 \mapsto \widetilde{n}_3, \quad n_3 \mapsto \widetilde{n}_1, \quad n_2 \mapsto \widetilde{n}_4, \quad n_4 \mapsto \widetilde{n}_2$$

меняет местами X и Y, значит $L_Y X = X/2$ и поверхность Φ – вполне геодезическая. Она гомеоморфна $\mathbb{R}P^2$ (см. [8]).

3.6. Поверхность Φ, заданная равенствами (13), является двумерным компактным симметрическим многообразием с гауссовой кривизной $1/5$. Следовательно, она гомеоморфна либо сфере S^2, либо проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Сравнивая длину замкнутой геодезической $\exp_\omega(tX)$ с $\pi\sqrt{5}$ (см. [6]), убеждаемся, что эта поверхность – сфера. Ее внутренний диаметр равен $\pi\sqrt{5}$. Так как $\exp_\omega(\pi\sqrt{5}X) = -\omega$, то ее внешний диаметр в $G^+_{2,n}$ равен π, а в евклидовом пространстве $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ он равен 2.

Поверхность $\Phi(1/5)$ дает пример односвязного вполне геодезического подмногообразия в односвязном римановом пространстве с разными внешним и внутренним диаметрами. С другой стороны, ее можно рассматривать как образ стандартной евклидовой сферы $S^2(\sqrt{5})$ при изометрическом вложении в евклидов единичный шар.

§4. Сферический образ поверхности Веронезе

Сравнивая пять типов вполне геодических поверхностей в грассманиане $G^+_{2,n}$, описанных формулами (9)–(11), (13), (14), с поверхностями, найденными в [8], убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

4.1. Теорема. *Для любой точки $\omega \in G^+_{2,n}$ дифференциал функции $\sigma \mapsto K_\sigma$ двумерного направления $\sigma \subset T_\omega G^+_{2,n}$ равен нулю в точке σ_0 тогда и только тогда, когда поверхность $\Phi_{\sigma_0} = \exp\sigma_0$ – вполне геодезическая.*

4.2. Известно, что одна из вполне геодезических поверхностей в $G^+_{2,5}$ является гауссовым образом поверхности Веронезе (см. [2, VI.3]). Последняя определяется как образ сферы S^2 при отображении

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6, \quad (x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx)$$

(см. [2, 4.3.9.1]). Сужение отображения F на сферу

$$S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

задает поверхность $F(S^2)$, лежащую в пятимерном евклидовом пространстве

$$\mathbb{R}^5 = \bigl\{(u_1, \dots, u_6) \in \mathbb{R}^6 \mid u_1 + u_2 + u_3 = 1\bigr\}.$$

Так как поверхность $F(S^2)$ лежит в единичной сфере пространства $\mathbb{R}^6$, то она помещается в некоторой гиперсфере пространства $\mathbb{R}^5$. Отображение F определено на факторпространстве сферы S^2 по антиподальной инволюции. На этой проективной плоскости F инъективно, поэтому образ $F(S^2)$ гомеоморфен $\mathbb{R}P^2$. Рассмотрим ориентирующую параметризацию сферы S^2 в окрестности точки $(1,0,0)$:

$$r = (\cos u\cos\delta, \cos u\sin\delta, \sin u), \quad r(0,0) = (1,0,0).$$

В координатах (u,δ) сужение $F\big|_{S^2}$ задается функцией

$$\rho(u,\delta) = \bigl(\cos^2 u\cos^2\delta, \cos^2 u\sin\delta, \sin^2 u, \sqrt{2}\cos^2 u\cos\delta\sin\delta,$$
$$\sqrt{2}\cos u\sin u\sin\delta, \sqrt{2}\cos u\sin u\cos\delta\bigr).$$

Гауссово отображение g поверхности Веронезе $F(S^2)$ в координатах (u,δ) задается формулой

$$g(u,\delta) = \frac{\rho_u \wedge \rho_\delta}{|\rho_u \wedge \rho_\delta|}(u,\delta).$$

Пусть $e_i = \partial/\partial u_i$, $1 \leqslant i \leqslant 6$, – базисные векторы пространства $\mathbb{R}^6$. Прямые вычисления дают

$$g(0,0) = e_6 \wedge e_4, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = \frac{e_5 \wedge e_4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} e_6 \wedge \frac{e_2 - e_1}{\sqrt{2}},$$
$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{e_3 - e_1}{\sqrt{2}} \wedge e_4 + \frac{e_6 \wedge e_5}{\sqrt{5}}. \tag{15}$$

Введем обозначения

$$\omega = g(0,0), \quad \widetilde{e}_1 = e_6, \quad \widetilde{e}_2 = e_4, \quad n_1 = e_5, \quad n_2 = -\frac{e_1 + e_2}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e_3,$$
$$X = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0), \quad Y = \frac{\partial g}{\partial v}(0,0).$$

В этих обозначениях формулы (15) примут вид $\omega = \widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{e}_2$,

$$\begin{aligned} X &= \frac{n_1 \wedge \widetilde{e}_2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \widetilde{e}_1 \wedge n_2, \\ Y &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} n_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} n_3 \right) \wedge \widetilde{e}_2 + \frac{\widetilde{e}_1 \wedge \widetilde{n}_1}{\sqrt{5}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Из (13) и (16) следует, что для $\sigma = \mathrm{Lin}(X,Y)$ вполне геодезические поверхности Φ_σ и $g(F(S^2))$ касаются в точке ω, а значит совпадают.

4.3. В работе [9] изучались критические значения секционной кривизны в полупростых компактных группах Ли. Кроме того, там найдены точные оценки сверху для секционных кривизн в неприводимых компактных симметрических пространствах.

Литература

1. М. Берже, *Геометрия*. Т. 1, Мир, М. (1984).
2. А. А. Борисенко, Ю. Н. Николаевский, *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий*. — Успехи мат. наук **46**, No. 2 (1991), 41–81.

3. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* Наука, СПб. (1994).
4. B. Y. Chen, H. S. Lue, *Differential geometry of* $SO(n+2)/SO(n) \times SO(2)$. — Geom. Dedic. **4** (1975), 253–261.
5. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
6. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.
7. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 104–121.
8. С. Е. Козлов, *Стационарные значения секционной кривизны в грассманианах бивекторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 102–118.
9. М. В. Мещеряков, *Оценки секционных кривизн римановых симметрических пространств.* — Успехи мат. наук **51,** No. 1 (1996), 157–158.

Kozlov S. E. Stationarity of curvature of two-dimensional totally geodesic submanifolds in the Grassmannian of bivectors.

An infinitesimal criterion indicating when a two-dimensional submanifold of a Riemannian symmetric space is totally geodesic is given. As an application, the classification of two-dimensional totally geodesic submanifolds of the Grassmannian of bivectors is given in a new way, and it is proved that the sectional curvature takes stationary values on tangent spaces of such submanifolds.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 июня 2001 г.