Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

Д. В. Иванов

ОТСУТСТВИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В МНОГООБРАЗИИ НАПРАВЛЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Мы доказываем одну теорему из геометрии многообразия G^1 направлений физического пространства. В этом сборнике опубликована работа [1], посвященная изучению свойств того же многообразия, что позволяет нам использовать введенные в [1] определения и обозначения.

Теорема 1. *Многообразие G^1 не содержит трехмерных геодезических подмногообразий.*

Доказательство. Пусть $\Phi \subset G^1$ – вполне геодезическое трехмерное подмногообразие. Тогда вторая форма включения $\Phi \subset G^1$ равна нулю, и, следовательно, преобразования кривизны $\tilde{R}$ и R для многообразий Φ и G^1 совпадают на касательных к Φ пространствах. Значит в каждой точке $\omega \in \Phi$ для любых $u, v, w \in T_\omega\Phi$ будет $R(u,v)w \in T_\omega\Phi$. Покажем, что это противоречит формуле

$$R(u,v)w = \langle u,w\rangle v - \langle v,w\rangle u - \langle u,*w\rangle *v + \langle v,*w\rangle *u, \qquad (1)$$

найденной в [2].

Многообразие G^1 четырехмерно, поэтому гиперплоскость $T_\omega\Phi \subset T_\omega G^1$ является ортогональным дополнением некоторого вектора $n \in T_\omega G^1, n \neq 0$. Возможны два варианта.

а) Вектор n не является одновременно простым и изотропным. Тогда найдется такая тетрада Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3), что

$$\omega = e_{01},\ n = \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31},\ T_\omega\Phi = n^\perp = \mathrm{Lin}\,(e_{03}, e_{21}, \alpha_1 e_{02} + \alpha_0 e_{31})$$

(см. [3]). Рассмотрим тройку касательных к Φ векторов:

$$u = e_{03},\ v = e_{21},\ w = \alpha_1 e_{02} + \alpha_0 e_{31}.$$

Подставляя в (1), находим $R(u,v)w = \alpha_0 e_{02} - \alpha_1 e_{31}$. Но этот вектор не принадлежит $T_\omega \Phi$:

$$\langle \alpha_0 e_{02} - \alpha_1 e_{31}, n\rangle = \langle \alpha_0 e_{02} - \alpha_1 e_{31}, \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}\rangle = -(\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \neq 0.$$

б) Вектор n – простой и изотропный. Тогда найдется такая тетрада Минковского (e_0, e_1, e_2, e_3), что

$$\omega = e_{01},\ n = \lambda(e_0 + e_1) \wedge e_3, T_\omega \Phi = n^\perp = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{21}, (e_0 + e_1) \wedge e_3)$$

(см. [3]). Рассмотрим тройку касательных к Φ векторов:

$$u = e_{02},\ v = (e_0 + e_1) \wedge e_3,\ w = e_{21}.$$

Подставляя в (1), находим $R(u,v)w = -e_{31}$. Этот вектор также не принадлежит $T_\omega \Phi$:

$$\langle e_{31}, n\rangle = \langle e_{31}, \lambda(e_0 + e_1) \wedge e_3\rangle = -\lambda \neq 0.$$

Противоречие. $\bullet$

Литература

1. Д. В. Иванов, С. Е. Козлов, *Классификация вполне геодезических поверхностей многообразия направлений физического пространства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **280** (2001).
2. Д. В. Иванов, *Вполне геодезические подмножества многообразия направлений физического пространства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **279** (2001), 141–153.
3. С. Е. Козлов, *Топология и лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 141–151.

Ivanov D. V. Absence of three-dimensional totally geodesic submanifolds in the manifold of directions of physical space.

It is proved that the manifold of directions of physical space contains no three-dimensional totally geodesic submanifolds.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 29 октября 2001 г.