Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

Д. В. Иванов, С. Е. Козлов

КЛАССИФИКАЦИЯ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГООБРАЗИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. А. Залгаллеру к 80-летию

Введение

Внешняя алгебра $\Lambda(M)$ над четырехмерным псевдоевклидовым пространствам Минковского $M(+---)$ наделяется естественной структурой псевдоевклидова пространства (см. [1]). При этом шестимерное пространство бивекторов $\Lambda_2(M)$ имеет сигнатуру $(+++---)$. Подмногообразие $G^1 \subset \Lambda_2(M)$ определяется как множество простых (разложимых) бивекторов со скалярным квадратом, равным -1. Каждый его элемент можно интерпретировать как двумерную ориентированную плоскость, проходящую через начало в M и пересекающую временно́й конус (см. §5). Такие плоскости названы Г. Минковским *одномерными направлениями физического пространства* (см. [2]). Это же название мы присвоили многообразию G^1, опустив лишь упоминание о размерности. Это многообразие является однородным псевдоримановым пространством группы Лоренца $L(M)$ с левоинвариантной метрикой сигнатуры $(++--)$, индуцированной включением в $\Lambda_2(M)$. Оно гомеоморфно $S^2 \times S^2 \setminus \mathrm{diag}(S^2 \times S^2)$ (подробнее см. [1]).

В [3] указаны четыре типа двумерных вполне геодезических поверхностей многообразия G^1. Автор работы [3] предполагал, что названные поверхности полностью (с точностью до преобразования Лоренца) исчерпывают набор двумерных вполне геодезических подмногообразий многообразия G^1. В этой работе мы приводим полный список таких подмногообразий, дополняющий уже известный набор только одной (с точностью до преобразования Лоренца) поверхностью. В §5 мы даем описание таких поверхностей и их семейства в многообразии G^1 на языке геометрии трехмерного вещественного аффинного пространства.

§1. Классификация простых площадок

1.1. Каждую из найденных в [3] вполне геодезических поверхностей можно представить в виде $\Phi_\sigma = \exp_\omega \sigma$, где $\omega \in G^1$, а σ – двумерное подпространство (площадка) касательного пространства $T_\omega G^1$. В трех случаях площадка σ оказалась *простой*, т.е. все принадлежащие ей бивекторы – простые. В этом параграфе мы дадим каноническое представление для всех простых площадок.

1.2. Пусть $\Lambda_2(V)$ – пространство бивекторов над четырехмерным вещественным линейным пространством V, а $\sigma \subset \Lambda_2(V)$ – его двумерное подпространство.

Предложение. *Если площадка σ – простая, то найдутся такие попарно не коллинеарные векторы $h_1, h_2, h \in V$, что любой бивектор $Z \in \sigma$ можно представить в виде*

$$Z = (\lambda h_1 + \mu h_2) \wedge h, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь базис X, Y плоскости σ. По условию

$$Z = \lambda X + \mu Y = \lambda f_1 \wedge f_2 + \mu g_1 \wedge g_2, \quad f_i, g_i \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Так как бивектор Z – простой для любых λ, μ, то

$$Z \wedge Z = 2\lambda\mu f_1 \wedge f_2 \wedge g_1 \wedge g_2 = 0$$

(см. [4]), откуда следует линейная зависимость набора $\{f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2\}$. Поэтому бивекторы X, Y можно представить в виде $X = h_1 \wedge h$, $Y = h_2 \wedge h$. $\square$

1.3. Пусть площадка $\sigma \subset T_\omega G^1$ целиком состоит из простых световых (изотропных) направлений. По лемме 5.3 из [1] плоскость V_Z каждого простого бивектора $Z \in \sigma$ содержит одно из двух световых направлений плоскости V_ω. Значит, найдется такая *тетрада Минковского* $e = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ ($e_i \in M, -e_0^2 = e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ при $i \neq j$), что

$$\omega = e_{01} := e_0 \wedge e_1, \quad \sigma = \mathrm{Lin}\,\{(e_0 \pm e_1) \wedge e_2,\ (e_0 \pm e_1) \wedge e_3\}. \qquad (1)$$

1.4. Пусть в площадке σ найдется не световой бивектор Z. Тогда по теореме 5.2 из [1] для некоторой тетрады Минковского бивектор Z будет иметь вид

$$Z = \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}, \quad \omega = e_{01}, \quad \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Так как площадка σ – простая, то в этом равенстве один из коэффициентов α_0 или α_1 обращается в ноль. Поэтому возможны следующие варианты.

1.4.1. $Z = e_{02}$. Значит, в предложении 1.2 для площадки σ имеем $h = ue_0 + ve_2$. Пусть

$$h_i = \sum_{k=0}^{3} x_k^i e_k, \quad i = 1, 2.$$

Тогда

$$h_i \wedge h = u(x_1^i e_{10} + x_2^i e_{20} + x_3^i e_{30}) + v(x_0^i e_{02} + x_1^i e_{12} + x_3^i e_{23}). \tag{3}$$

Напомним, что $T_\omega G^1 = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{03}, e_{12}, e_{13})$ (см. [1]). При $u, v \neq 0$ из (3) следует, что $x_1^i = x_3^i = 0$ и бивекторы $h_1 \wedge h$ и $h_2 \wedge h$ коллинеарны, что противоречит предложению 1.2. Значит $u \cdot v = 0$ и возникают дальнейшие разветвления.

1.4.1.1. $Z = e_{02}$, $h = e_0$. В предложении 1.2 в качестве вектора h_1 можно выбрать e_2. Пусть $h_2 = \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$. Тогда любой бивектор $\widetilde{Z} \in \sigma$ можно представить в виде

$$\widetilde{Z} = (\lambda e_2 + \mu(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)) \wedge e_0.$$

Так как $Z \in T_\omega G^1$, то $x_1 = 0$. Из этого равенства вытекает, что найдется такая тетрада Минковского (возможно отличная от e), в которой

$$\omega = e_{01}, \quad \sigma = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{03}). \tag{4}$$

Аналогично случаю 1.4.1.1 рассматриваются и другие варианты. Сформулируем результаты.

1.4.1.2. $Z = e_{02}$, $h = e_2$:

$$\omega = e_{01}, \quad \sigma = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{21}). \tag{5}$$

1.4.2.1. $Z = e_{13}$, $h = e_3$:

$$\omega = e_{01}, \quad \sigma = \operatorname{Lin}(e_{30}, e_{31}).$$

1.4.2.2. $Z = e_{13}$, $h = e_1$:

$$\omega = e_{01}, \quad \sigma = \operatorname{Lin}(e_{12}, e_{13}). \tag{6}$$

Заметим, что случаи 1.4.1.2 и 1.4.2.1 отличаются только нумерацией векторов в тетраде Минковского. Таким образом, с точностью до преобразования Лоренца, имеется всего четыре типа простых площадок (1), (4)–(6) с сигнатурами $(0,0)$, $(--)$, $(-+)$ и $(++)$, соответственно.

§2. Вполне геодезические не простые площадки

2.1. Рассмотрим поверхность $\Phi_\sigma = \exp_\omega \sigma$. Пусть для некоторой окрестности нуля $\sigma_0 \subset \sigma$ поверхность $\Phi_0 = \exp_\omega \sigma_0$ – вполне геодезическая. Так как вторая форма включения $\Phi_0 \subset G^1$ равна нулю, то для касательных векторов $u, v, w \in T_\omega\Phi_0$ преобразования кривизны $\widetilde{R}(u,v)$ на поверхности Φ_0 и $R(u,v)w$ в многообразии G^1 совпадают. Поверхность Φ_0 двумерна, поэтому

$$R(u,v)w = K_\sigma \cdot (\langle v, w\rangle u - \langle u, w\rangle v), \tag{7}$$

где K – секционная кривизна многообразия G^1 в направлении $\sigma = T_\omega\Phi_0$. Напомним, что в пространстве бивекторов $\Lambda_2(M)$ определен оператор

$$* : \Lambda_2(M) \to \Lambda_2(M),$$

аналогичный оператору Ходжа $\Lambda_2(\mathbb{R}^4) \to \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ (см. [1]). По формуле (20) из [3]

$$R(u,v)w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u - \langle u, *w\rangle * v + \langle v, *w\rangle * u. \tag{8}$$

2.2. Теорема. *Пусть поверхность $\Phi_0 \subset G^1$ – вполне геодезическая (не обязательно полная) и бивектор $u \in T_\omega\Phi_0$ – не простой. Тогда*

$$T = \operatorname{Lin}(u, *u). \tag{9}$$

Доказательство. Дополним бивектор u не коллинеарным ему бивектором $v \in T_\omega\Phi_0 = \sigma$. Пусть $w = \lambda u + \mu v$. Тогда

$$\langle u, *w\rangle = \lambda\langle u, *u\rangle + \mu\langle u, *v\rangle, \quad \langle v, *w\rangle = \lambda\langle v, *u\rangle + \mu\langle v, *v\rangle. \tag{10}$$

Если определитель $\langle u, *u\rangle\langle v, *v\rangle - \langle u, *v\rangle^2$ системы (10) отличен от нуля, то из (7), (8), (10) следует, что $*u \in \sigma$. Так как $** = -\mathrm{id}$, то бивекторы u и $*u$ линейно независимы и справедливо равенство (9). Предположим, что

$$\langle u, *u\rangle, \langle v, *v\rangle - \langle u, *u\rangle^2 = 0.$$

Тогда по формуле (21) из [3] $K = -1$, что вместе с (7) и (8) влечет обращение в нуль выражения $\langle v, *w\rangle * u - \langle u, *w\rangle * v$ для любого бивектора $w \in \sigma$. В силу линейной независимости бивекторов u, v при $w = u$ будет $\langle u, *u\rangle = 0$, что означает простоту бивектора u. Значит, наше предположение противоречиво и выполнено равенство (9). □

2.3. Следствие. *В условиях теоремы* 2.2 *существует такая тетрада Минковского* $e = (e_0, \dots, e_3)$, *в которой*

$$\omega = e_{01}, \quad \sigma = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{31}). \tag{11}$$

Доказательство. Для любого не простого бивектора имеет место разложение (2). По теореме 2.2 бивектор $*u = -\alpha_0 e_{31} + \alpha_1 e_{02}$ принадлежит площадке σ, откуда следует (11). □

§3. Вполне геодезические однополостные гиперболоиды

Рассмотрим поверхность $\Phi_\sigma = \exp_\omega \sigma$, касательная площадка к которой имеет вид (5): $\omega = e_{01}$, $\sigma = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{21})$. Так как бивекторы $e_{02} \pm e_{21} = (e_0 \mp e_1) \wedge e_2$ являются одновременно простыми и световыми, то геодезические линии в их направлении суть прямые $\{e_{01} + (e_0 \mp e_1) \wedge e_2 t\}$ (см. [1]). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ пара бивекторов

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= e_{02}\mathrm{ch}\,\varphi + e_{12}\mathrm{sh}\,\varphi = (e_0\mathrm{ch}\,\varphi + e_1\mathrm{sh}\,\varphi) \wedge e_2 = \widetilde{e}_0(\varphi) \wedge e_2, \\ Y(\varphi) &= e_{02}\mathrm{sh}\,\varphi + e_{12}\mathrm{ch}\,\varphi = (e_0\mathrm{sh}\,\varphi + e_1\mathrm{ch}\,\varphi) \wedge e_1 = \widetilde{e}_0(\varphi) \wedge e_2 \end{aligned} \tag{12}$$

образует ортонормированный базис площадки σ. Указанные пара прямых и семейство геодезических $\exp_\omega(tX(\varphi))$, $\exp_\omega(tY(\varphi))$, $\varphi \in \mathbb{R}$, образуют поверхность Φ_σ.

Рассмотрим трехмерное сечение многообразия G^1

$$\Phi(e_3) = G^1 \cap \Lambda_2(e_3^\perp). \tag{13}$$

3.1. Предложение. *$\Phi(e_3)$ представляет собой аффинный однополостной гиперболоид*

$$\Phi(e_3) = \{xe_{21} + ye_{20} + ze_{01} \mid x^2 - y^2 - z^2 = -1\} \tag{14}$$

в трехмерном подпространстве $\Lambda_2(e_3^\perp) \subset \Lambda_2(M)$.

Доказательство. 1) Пусть $\tau \in \Phi(e_3)$. Тогда $\tau \in \Lambda_2(e_3^\perp)$, поэтому $\tau = xe_{21} + ye_{20} + ze_{01}$. Так как $\tau \in G^1$, то $-1 = \tau^2 = x^2 - y^2 - z^2$.

2) Пусть $\tau = xe_{21}+ye_{20}+ze_{01}$ принадлежит правой части равенства (14). Тогда $\tau \in \Lambda_2(e_3^\perp)$ и $\tau^2 = x^2-y^2-z^2 = -1$. Так как любой бивектор над трехмерным пространством $e_3^\perp$ прост, то $\tau \in \Phi(e_3)$. □

3.2. Предложение. *Поверхность $\Phi_\sigma \cup (-\Phi_\sigma)$ совпадает с гиперболоидом $\Phi(e_3)$.*

Доказательство. Из (14) следует, что $\omega = e_{01} \in \Phi(e_3)$. В пространстве $\Lambda_2(e_3^\perp)$ гиперболоид $\Phi(e_3)$ является мнимоединичной сферой, поэтому

$$T_\omega \Phi(e_3) = \omega^\perp = e_{01}^\perp = \mathrm{Lin}\,(e_{02}, e_{21}) = \sigma.$$

Геодезические в направлении бивекторов (12) имеют вид

$$\begin{aligned} \exp_\omega(tX(\varphi)) &= \widetilde{e}_0(\varphi) \wedge (\widetilde{e}_1(\varphi)\cos t + e_2 \sin t) = \omega \cos t + X(\varphi) \sin t, \\ \exp_\omega(tY(\varphi)) &= (\widetilde{e}_0(\varphi)\mathrm{ch}\, t - e_2 \mathrm{sh}\, t) \wedge e_1(\varphi) = \omega \mathrm{ch}\, t + Y(\varphi)\mathrm{sh}\, t \end{aligned} \tag{15}$$

(см. [1]). Непосредственной подстановкой координатных функций геодезических в (14) убеждаемся, что эти геодезические лежат на гиперболоиде $\Phi(e_3)$, а прямые $\{e_{01} + (e_0 \mp e_1) \wedge e_2 t\}$ являются его прямолинейными образующими. Тем самым $\Phi_\sigma \subset \Phi(e_3)$. Из формул (15) следует, что кривые, заданные этими равенствами, совпадают с сечениями гиперболоида двумерными плоскостями, проходящими через его центр и точку ω. □

3.3. Предложение. *Поверхность $\Phi_\sigma \cup (-\Phi_\sigma) \subset G^1$ – вполне геодезическая.*

Доказательство. Подгруппа $L(e_3^\perp)$ группы преобразований Лоренца $L(M)$ транзитивно действует на простых мнимоединичных бивекторах пространства $\Lambda_2(e_3^\perp)$. Многообразие G^1 и подпространство $\Lambda_2(e_3^\perp)$ являются инвариантными множествами этого действия. Значит и их пересечение – гиперболоид $\Phi(e_3)$ –

тоже инвариантен. По предложению 3.2 эта квадрика является геодезической поверхностью в точке ω. Значит поверхность $\Phi_\sigma \cup (-\Phi_\sigma) = \Phi(e_3)$ – вполне геодезическая. $\square$

§4. Список вполне геодезических поверхностей в многообразии G^1

4.1. Теорема. *Любая вполне геодезическая двумерная поверхность Φ многообразия G^1 имеет вид $\Phi_\sigma = \exp_\omega \sigma$, либо $\Phi_\sigma \cup (-\Phi_\sigma)$, где пара (ω, σ) задается одной из пяти формул:* (1), (4)–(6), (11). *Любые две поверхности одного вида лоренц-совместимы, а разных – не изометричны.*

Доказательство. Рассмотрим какую-либо двумерную вполне геодезическую поверхность $\Phi \subset G^1$. Пусть $\omega \in \Phi$ и $T_\omega\Phi = \sigma \subset T_\omega G^1$. Если площадка σ – простая, то пара (ω, σ) может быть представлена одним из равенств (1), (4)–(6). Если же площадка σ – не простая, то пара (ω, σ) задается формулой (11). Любые две тетрады Минковского можно совместить преобразованием Лоренца, поэтому, с точностью до преобразования Лоренца, имеется не более 5 типов вполне геодезических поверхностей. В [3] доказано, что в случаях (1), (4), (6), (11) поверхности Φ_σ являются вполне геодезическими однородными многообразиями группы Лоренца. Как показано в §3, то же справедливо и для случая (5). Осталось доказать попарную неизометричность поверхностей разных видов. Поверхности вида (5), (11) имеют одинаковую сигнатуру $(+-)$. Но по формуле (21) из [3] их секционные кривизны равны -1 и 0, соответственно. Вполне геодезические поверхности других видов имеют попарно различные сигнатуры, не равные $(+-)$. $\square$

Каждая вполне геодезическая поверхность получается при пересечении многообразия G^1 с некоторым линейным подпространством шестимерного пространства бивекторов. Объединяя результаты работы [3] и §3, опишем семейство всех вполне геодезических поверхностей $\Phi \subset G^1$. Напомним определение специального трехмерного подпространства $W(e) \subset \Lambda_2(M)$ (см. [3]):

$$W(e) = \{x \in \Lambda_2(M) \mid x \wedge e = 0\}, \quad e \in M, \quad e \neq 0. \qquad (16)$$

4.2. Теорема. *Для любой вполне геодезической поверхности $\Phi \subset G^1$ имеет место одно из пяти представлений:*

1) $\Phi = G^1 \cap W(e)$, $e^2 > 0$ – *сфера;*
2) $\Phi \cup (-\Phi) = G^1 \cap W(e)$, $e^2 < 0$ – *двуполостный гиперболоид;*
3) $\Phi \cup (-\Phi) = G^1 \cap W(e)$, $e^2 = 0$ – *пара параллельных плоскостей;*
4) $\Phi = G^1 \cap \Lambda_2(e^\perp)$, $e^2 < 0$ – *однополостный гиперболоид;*
5) $\Phi = G^1 \cap (\mathrm{Lin}\,(\tau, *\tau))^\perp$, $\tau \in G^1$ – *топологический цилиндр.*

§5. Вполне геодезические поверхности $\Phi \subset G^1$ в модели Кэли–Клейна

5.1. Напомним конструкцию модели Кэли–Клейна трехмерного пространства Лобачевского H^3 в рамках четырехмерного пространства Минковского M (см. [5]). Определим *временной конус*

$$K^T = \{x \in M \mid x^2 > 0\}.$$

Световым конусом называется множество

$$K^c = \partial K^T = \{x \in M \mid x^2 = 0\}.$$

Фиксируем единичный времениподобный вектор e_0, $e_0^2 = 1$ и рассмотрим сечение временно́го конуса гиперплоскостью $\langle x, e_0 \rangle = 1$:

$$\mathcal{D} = \{x \in M \mid x^2 > 0,\ \langle x, e_0 \rangle = 1\}. \tag{17}$$

Центральное проектирование этого трехмерного шара на гиперповерхность $S_g = \{x \in M \mid x^2 = 1\}$ индуцирует на $\mathcal{D}$ метрику, только знаком отличающуюся от метрики гиперболического пространства H^3 с кривизной -1. Сменив знак индуцированной метрики на обратный, будем рассматривать шар $\mathcal{D}$ как трехмерное пространство Лобачевского. Геодезические в этом пространстве совпадают с хордами шара $\mathcal{D}$.

5.2. Каждый простой бивектор $\omega \in G^1$, воспринимаемый как двумерная ориентированная плоскость, проходящая через начало в M и пересекающая временной конус, пересекает $\mathcal{D}$ по некоторой хорде. Тем самым возникает естественная биекция между точками многообразия G^1 и направленными хордами шара $\mathcal{D}$. Изохронные преобразования Лоренца (не меняющие компонент связности конуса K^T, индуцируют в гиперболическом пространстве $\mathcal{D}$ группу преобразований, являющуюся группой его изометрий. Построенная модель многообразия G^1 позволяет наглядно описать вполне геодезические поверхности $\Phi \subset G^1$ на языке аффинной геометрии трехмерного пространства $A = \mathrm{Aff}\,\mathcal{D}$.

5.3. Если вектор e не параллелен гиперплоскости A, то плоскости V_ω элементов $\omega \in W(e)$ пересекают A по прямым, проходящим через точку $e/\langle e, e_0\rangle$. Если же $e \| A$, то каждая прямая $V_\omega \cap A$ параллельна вектору e. Удобно считать, что все такие прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке пространства A.

Рассмотрим подпространство $\Lambda_2(e^\perp) \subset \Lambda_2(M)$, $e^2 < 0$. Пусть $\omega \in \Lambda_2(e^\perp)$ и $r \in V_\omega \cap A$. Тогда $\langle r, e_0\rangle = 1$ и $\langle r, e\rangle = 0$. Так как векторы e и e_0 не коллинеарны, то два последних равенства задают двумерную плоскость $T(e) \subset A$. Значит, пересечение плоскости бивектора $\Omega \in \Lambda_2(e^\perp)$ с пространством A содержится в плоскости $T(e)$.

5.4. Из замечаний п. 5.3 непосредственно получаются представления $\widetilde{\Phi}_i$ поверхностей 1)–4) списка теоремы 4.2 в модели Кэли–Клейна. Множество $\widetilde{\Phi}_i$ образовано направленными хордами шара $\mathcal{D}$, лежащими на прямых, проходящих через точку x_0:

$$x_0 \in \mathcal{D} \quad (i = 1), \qquad x_0 \in A \setminus \operatorname{clos}\mathcal{D} \quad (i = 2), \qquad x_0 \in \partial\mathcal{D} \quad (i = 3).$$

Множество $\widetilde{\Phi}_4$ состоит из направленных хорд, лежащих в некотором плоском сечении шара $\mathcal{D}$.

5.5. Рассмотрим поверхность

$$\Phi_5 = G^1 \cap (\operatorname{Lin}(\tau, *\tau))^\perp, \qquad \tau \in G^1.$$

Пусть для некоторой тетрады Минковского $e = (e_0, \dots, e_3)$ имеем $\Phi_5 = \exp_\omega \sigma$, где $\omega = e_{01}$, $\sigma = \operatorname{Lin}(e_{02}, e_{31})$. Тогда $\tau = e_{03}$ и $*\tau = e_{12}$ (см. [3]). Геодезическая в направлении бивектора $X = \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\exp_\omega(tX) &= e_0(t) \wedge e_1(t)\\ &= (e_0 \operatorname{ch}\alpha_1 t + e_3 \operatorname{sh}\alpha_1 t) \wedge (e_1 \cos\alpha_0 t + e_2 \sin\alpha_0 t). \end{aligned} \tag{18}$$

Выпишем очевидное тождество

$$\begin{aligned}e_{03} &= e_0(t) \wedge e_3(t)\\ &= (e_0 \operatorname{ch}\alpha_1 t + e_3 \operatorname{sh}\alpha_1 t) \wedge (e_0 \operatorname{sh}\alpha_1 t + e_3 \operatorname{ch}\alpha_1 t). \end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим хорды, представляющие бивекторы e_{03}, $\exp_\omega(tX) \in G^1$ в модели Кэли–Клейна, через l и $l(t)$, соответственно. Из (18), (19) следует, что при любом $t \in \mathbb{R}$ хорды l и $l(t)$ пересекаются и ортогональны (в метрике пространства Лобачевского). Нетрудно показать, что каждая хорда, ортогонально пересекающая хорду l, представляет некоторую точку поверхности Φ_5. Таким образом, множество $\widetilde{\Phi}_5$ образовано семейством направленных хорд, ортогонально пересекающих некоторую фиксированную хорду l шара $\mathcal{D}$.

5.6. В [5] описано элементарно-геометрическое построение перпендикуляра к данной прямой в модели Кэли–Клейна. Воспользуемся этим построением для аффинного описания множества $\widetilde{\Phi}_5$. Если хорда l является диаметром квадрики $\mathcal{D}$, то $\widetilde{\Phi}_5$ состоит из хорд, пересекающих l и делящихся точкой пересечения пополам. Пусть хорда l не проходит через центр $\mathcal{D}$. Обозначим через L прямую пересечения двух касательных плоскостей к $\mathcal{D}$, проведенных в концах l. Все хорды фигуры $\widetilde{\Phi}_5$ высекаются на квадрике $\mathcal{D}$ прямыми, соединяющими точки хорды l с точками прямой L (включая ее “бесконечно удаленные” точки).

Литература

1. С. Е. Козлов, *Топология и лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **246** (1997), 141–151.
2. Г. Минковский, *Пространство-время.* Физика, С.-Петербург (1911).
3. Д. В. Иванов, *Вполне геодезические подмножества многообразия направлений физического пространства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **279** (2001), 141–153.
4. А. Н. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Изд. МГУ, М. (1990).
5. С. Е. Козлов, *Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского.* — СПбГУ, СПб. (1995).

Ivanov D. V., Kozlov S. E. Classification of totally geodesic surfaces in the manifold of directions in physical space.

The Grassmannian of bivectors over the pseudo-Euclidean Minkowski space is considered and its two-dimensional totally geodesic submanifolds are classified. The family of such surfaces is described in the language of the affine geometry of three-space.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 июля 2001 г.