Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

М. Ю. Звагельский

КОБОРДИЗМЫ ВЛОЖЕНИЙ С КОРАЗМЕРНОСТЬЮ 2. II

В. А. Залгаллеру к 80-летию

§1. Основной результат

Замкнутые подмногообразия U^k и V^k в $\mathbb{R}^n$ называются *вложенно кобордантными*, если существует такое компактное правильное подмногообразие $W^{k+1} \subset \mathbb{R}^n \times [0,1]$, что $\partial W = (U \times 0) \cup (V \times 1)$.

Множество классов вложенной кобордантности обозначается через $\mathrm{Emb}_k(\mathbb{R}^n)$. Оно является группой относительно дизъюнктного объединения.

Наш основной результат:

Теорема 1.1. *Группа* $\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$ *– циклическая порядка* 6*:*

$$\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7) \simeq \mathbb{Z}_6.$$

Также (в §5) мы строим подмногообразие пространства $\mathbb{R}^7$, диффеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}P^2$, класс вложенной кобордантности которого порождает группу $\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$.

Схема доказательства теоремы (1.1)**.** Мы строим эпиморфизм

$$\mu \colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$$

и доказываем, что $\ker \mu \simeq 2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}$ (см. леммы 4 и 6 в §4). Отсюда следует, что

$$\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6.$$

Отображение μ является композицией гомоморфизмов

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\kappa^{-1}} \pi_3 SO(4) \xrightarrow{J} \mathrm{Emb}_3^{\mathrm{fr}}(\mathbb{R}^7) \xrightarrow{\mu_1} \mathrm{Emb}_3^{G}(\mathbb{R}^7) \xrightarrow{\mu_2} \mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7), \tag{1}$$

Работа поддержана грантом РФФИ 01-01-01014.

где:

- изоморфизм $\varkappa^{-1}$ обратен к изоморфизму $\varkappa\colon \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_3 SO(4)$, построенному в §3;
- $\mathrm{Emb}_3^{\mathrm{fr}}(\mathbb{R}^7)$ – группа кобордизмов оснащенных трехмерных подмногообразий $\mathbb{R}^7$, и, согласно [4], J-гомоморфизм Уайтхеда $J\colon \pi_3 SO(4) \to \pi_7(S^4) = \mathrm{Emb}_3^{\mathrm{fr}}(\mathbb{R}^7)$ является эпиморфизмом;
- группа $\mathrm{Emb}_3^{G}(\mathbb{R}^7)$ и гомоморфизмы μ_1, μ_2 построены в §2; согласно леммам 2 и 3, гомоморфизм μ_1 является эпиморфизмом, а μ_2 – изоморфизмом. •

Обозначения и соглашения.

- Все векторные расслоения предполагаются евклидовыми;
- Пусть $x \in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$. Через $\mathbb{Z}_x$ обозначается локальная система групп $\mathbb{Z}$ на M, скрученная классом x, т. е. система, определяемая гомоморфизмом
$$z \in H_1(M;\mathbb{Z}_2) \mapsto \langle x, z\rangle \in \mathbb{Z}_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}).$$

§2. Группа $\mathrm{Emb}_3^{G}(\mathbb{R}^7)$ и гомоморфизмы μ_1 и μ_2

2.1. G-подмногообразия. В [1] определено диффеоморфное $\mathbb{R}P^2$ гладкое подмногообразие P пространства $\mathbb{R}^4$, которое будем называть *стандартной проективной плоскостью.* Через $G \subset SO(4)$ обозначим группу самосовмещений подмногообразия P: $G = \{g \in SO(4) \mid g(P) = P\}$.

Можно проверить (см. [1]), что

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2) \right\}. \tag{2}$$

Пусть M – подмногообразие коразмерности 4 некоторого гладкого многообразия. *G-структурой* на M назовем редукцию структурной группы расслоения ν_M к подгруппе G. Подмногообразие M, снабженное G-структурой назовем *G-подмногообразием.*

Определим группу $\mathrm{Emb}_3^{G}(\mathbb{R}^7)$ кобордизмов трехмерных G-подмногообразий пространства $\mathbb{R}^7$ обычным образом: замкнутые

G-подмногообразия U^3 и V^3 *G-кобордантны*, если существует такое компактное правильное G-подмногообразие W^4 в $\mathbb{R}^7 \times [0,1]$, что $\partial W = (U\times 0)\cup(V\times 1)$ и G-структуры на U, V и W согласованы.

2.2. О нормальном расслоении G-подмногообразий. Пусть M – G-подмногообразие. Его нормальное расслоение ν_M очевидным образом раскладывается в прямую сумму двумерных подрасслоений: $\nu_M = \alpha \oplus \beta$ (см. (2)). Легко доказать следующее утверждение.

Лемма. *$w_1(\alpha) = w_1(\beta)$ и $2e(\alpha) = e(\beta) \in H^2(M; \mathbb{Z}_{w_1(\alpha)})$.*

Соглашение. Мы резервируем буквы α и β для обозначения описанных расслоений над G-подмногообразием M. При необходимости явно указать подмногообразие будем писать α_M и β_M.

2.3. Гомоморфизм μ_1. Каждое трехмерное оснащенное подмногообразие в $\mathbb{R}^7$ (т. е. подмногообразие с тривиализованным нормальным расслоением) является G-подмногообразием. Возникает "гомоморфизм забывания" $\mu_1\colon \mathrm{Emb}_3^{\mathrm{fr}}(\mathbb{R}^7) \to \mathrm{Emb}_3^G(\mathbb{R}^7)$. Доказательство следующего утверждения мы опускаем.

Лемма 2. *Гомоморфизм μ_1 является эпиморфизмом.*

2.4. Гомоморфизм μ_2. Пусть M – G-подмногообразие в $\mathbb{R}^7$. В каждом слое его нормального расслоения ν_M очевидным образом лежит проективная плоскость. Отождествляя ν_M с трубчатой окрестностью подмногообразия M, получим пятимерное подмногообразие $M' \subset \mathbb{R}^7$. Очевидно, что M' диффеоморфно косому произведению M на $\mathbb{R}P^2$. Гомоморфизм $\mu_2\colon \mathrm{Emb}_3^G(\mathbb{R}^7) \to \mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$ сопоставляет классу G-кобордантности подмногообразия M класс вложенной кобордантности подмногообразия M'. Из результатов [2] следует следующее утверждение.

Лемма 3. *Гомоморфизм μ_2 является изоморфизмом.*

§3. Конструкция изоморфизма $\pi_3 SO(4) \to \mathbb{Z}^2$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Через $\mathbb{R}^n_-$ обозначим полупространство, состоящее из точек с неположительной последней координатой, а через $\mathbb{R}^n_+$ – с неотрицательной. Будем считать, что пространство $\mathbb{R}^m$, $m \leqslant n$, лежит в $\mathbb{R}^n$, и состоит из точек у которых последние $n-m$ координат равны нулю.

Возьмем единичный, стандартно ориентированный четырехмерный шар в $\mathbb{R}^4$ и продавим его в полупространство $\mathbb{R}^8_-$ так, чтобы он ортогонально пересекался с $\mathbb{R}^7$ по своей граничной сфере S^3. ($S^3 \subset \mathbb{R}^4$ – стандартная сфера.) Обозначим построенный шар через B.

Пусть $n(x)$ – единичная внешняя нормаль к сфере $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ в точке $x \in S^3$. Каждое отображение $f\colon S^3 \to SO(4)$ определяет оснащение сферы S^3 в пространстве $\mathbb{R}^7$ следующим образом: нормальный 4-репер в точке $x \in S^3$ получается из 4-репера $(n(x), e_5, e_6, e_7)$ линейным преобразованием с матрицей $f(x)$. Обозначим через $e[f]$ и $p[f]$ числа Эйлера и Понтрягина нормального расслоения шара B, относительно этого оснащения. Они определяются гомотопическим классом $[f] \in \pi_3 SO(4)$. Известно (см. [3]), что число $p[f] + 2e[f]$ делится на 4, и что отображение

$$\kappa\colon \pi_3 SO(4) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$
$$\kappa([f]) = (e[f], -(p[f] + 2e[f])/4)$$

является изоморфизмом.

§4. Ядро эпиморфизма μ

Обозначим через K подгруппу в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденную элементами $(2,0)$ и $(0,3)$.

Лемма 4. $\ker \mu \subset K$, *где* $\mu\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Emb}_3^G(\mathbb{R}^7)$ – *гомоморфизм, определенный в §1 (см. формулу* (1)*).*

Доказательство. Пусть отображение $f\colon S^3 \to SO(4)$ таково, что $\kappa([f]) \in \ker \mu$. Покажем, что $\kappa([f]) \in K$.

Отображение f порождает оснащение сферы $S^3 \subset \mathbb{R}^7$ и, следовательно, G-структуру на ней. Так как $\kappa([f]) \in \ker \mu$, эта G-структура продолжается на некоторое подмногообразие $M^4 \subset \mathbb{R}^8_+$, $\partial M = S^3$. Изотопией можно добиться того, чтобы объединение $N = M \cup B$, где B – описанный в §3 шар, было гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^8$. Так как расслоение $\nu(M, \mathbb{R}^8_+)$ тривиализовано над краем $S^3 = \partial M$ определены его относительные характеристические классы – класс Эйлера и первый класс Понтрягина: e_M, $p_M \in H^4(M, S^3; \mathbb{Z})$. Аналогично определены классы e_B, $p_B \in H^4(B, S^3; \mathbb{Z})$ расслоения $\nu(B, \mathbb{R}^8_-)$. Несложно проверить, что

$$e[f] = -2\langle e^2(\alpha), [M]\rangle \quad \text{и} \quad p[f] = -3\sigma(N) - \langle 5e^2(\alpha), [M]\rangle.$$

Таким образом,

$$\kappa([f]) = \left(-2\langle e^2(\alpha), [M]\rangle, 3\frac{\sigma(N) + 3\langle e^2(\alpha), [M]\rangle}{4}\right) \qquad (3)$$

и, следовательно, $\kappa([f]) \in K$. $\bullet$

Лемма 5. *Пусть N – гладкое замкнутое ориентированное четырехмерное многообразие, и классы $x \in H^1(N;\mathbb{Z}_2)$, $y \in H^2(N;\mathbb{Z}_x)$ таковы, что $[y]_2 + x^2 = w_2(N)$, где $[\cdot]_2$ – приведение по модулю 2.*

Тогда

$$\left(-2 \cdot \langle y^2, [N]\rangle, 3\frac{\sigma(N) + 3\langle y^2, [N]\rangle}{4}\right) \in \ker\mu.$$

Доказательство. Положим $M = N \setminus \operatorname{int} D$, где D – гладко вложенный в N шар. Вложим M в $\mathbb{R}^8_+$ так, чтобы M было правильным подмногообразием, и $\partial M = S^3 \subset \mathbb{R}^7$. На подмногообразии M можно ввести G-структуру так, что $w_1(\alpha_M) = \operatorname{in}^* x$ и $e(\alpha_M) = \operatorname{in}^* y$, где $\operatorname{in}\colon M \subset N$ – включение.

Подмногообразие M определяет элемент из $\ker\mu$: тривиализация расслоения $\alpha_M|_{S^3}$ порождает оснащение сферы S^3 в $\mathbb{R}^7$ (см. п. 1.5), которому соответствует элемент $[f] \in \pi_3 SO(4)$ (см. п. 5.0), очевидно, лежащий в $\ker\mu$. Доказываемое утверждение следует из формулы (3), в которой под α нужно понимать α_M, и того, что $\langle e^2(\alpha_M), [M]\rangle = \langle y^2, [N]\rangle$. $\bullet$

Лемма 6. $K \subset \ker\mu$.

Доказательство. Легко проверить, что элементы $(-2, 3)$ и $(-8, 9)$ порождают K. Мы покажем, что они лежат в $\ker\mu$.

Чтобы показать, что $(-2, 3) \in \ker\mu$ достаточно предъявить удовлетворяющие условиям леммы 5 многообразие N и когомологические классы x и y такие, что $\langle y^2, [N]\rangle = 1$ и $\sigma(N) = 1$. Такими будут: многообразие $\mathbb{C}P^2$, класс $x = 0 \in H^1(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}_2)$ и образующая $y \in H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$.

Покажем, что $(-8, 9) \in \ker\mu$. Рассмотрим многообразие $N = (S^2 \times S^2)/(a,b) \sim (-a,-b)$. Ориентируем его так, чтобы проекция $S^2 \times S^2 \to N$ сохраняла ориентацию. Очевидно, что $\sigma(N) = 0$. Несложно предъявить удовлетворяющие условиям леммы 5 когомологические классы x и y такие, что $\langle y^2, [N]\rangle = 4$. Доказываемое вытекает теперь из леммы 5. $\bullet$

§5. Геометрическое описание образующей группы $\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$

Можно описать пятимерное подмногообразие в $\mathbb{R}^7$, класс вложенной кобордантности которого порождает группу $\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$, следующим образом. Выберем гладкое отображение $f\colon S^3 \to SO(4)$ так, что $\kappa([f]) = (1,1)$. Оно определяет тривиализацию расслоения $\nu(S^3, \mathbb{R}^7)$ (см. §3). В каждом слое $x \times \mathbb{R}^4$, $x \in S^3$ этого расслоения возьмем стандартную проективную плоскость. Объединение этих плоскостей будет гладким многообразием диффеоморфным $S^3 \times \mathbb{R}P^2$. Вкладывая тотальное пространство расслоения $\nu(S^3, \mathbb{R}^7)$ в $\mathbb{R}^7$, получим искомое подмногообразие.

Литература

1. М. Ю. Звагельский, *Кобордизмы вложений с коразмерностью* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 40–51.
2. М. Ю. Звагельский, *Кобордизмы вложений гладких многообразий.* Дисс. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук, СПб, СПбГУ, 1998.
3. R. Kirby, *The topology of* 4-*manifolds.* Lecture Notes in Math., 1374, Springer-Verlag, 1989.
4. В. А. Рохлин, *Классификация отображений* $(n+3)$-*мерной сферы в* n-*мерную.* — Докл. АН СССР **81** (1951), 19–22.

Zvagel'skii M. Yu. Cobordisms of embeddings with codimension 2. II.

A proof of the fact that the group $\mathrm{Emb}_5(\mathbb{R}^7)$ of cobordisms of embeddings of nonoriented 5-manifolds in $\mathbb{R}^7$ is cyclic of order 6 is announced. A geometric description of a generator of the group is presented.

С.-Петербургский
государственный университет
e-mail: zvag@pdmi.ras.ru

Поступило 9 мая 2001 г.