Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

А. И. Дегтярев

ТЕОРЕМА ДЕЛИМОСТИ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНА АЛЕКСАНДЕРА ПЛОСКОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

§1. Введение

Рассмотрим неприводимую алгебраическую кривую $B \subset \mathbb{C}\mathrm{p}^2$ степени n, и пусть

$$\pi := \pi_1(\mathbb{C}\mathrm{p}^2 \smallsetminus B)$$

– фундаментальная группа ее дополнения. Вообще говоря, изучение этой группы представляет собой трудную задачу (обзор немногих известных результатов и примеров в этом направлении можно найти, например, в [12–14, 19]; некоторые более новые результаты см. в [1, 2, 5, 6, 15, 16]). Именно поэтому О. Зариский [19] предложил в качестве первого приближения к группе π изучать ее многочлен Александера $\Delta_B(t)$, который можно определить следующим образом:

Обозначим через $K = [\pi, \pi]$ коммутант группы π, а через $K' = [K, K]$ – ее второй коммутант, т.е. подгруппу, порожденную коммутаторами $[x_1, x_2]$ с $x_1, x_2 \in K$. Тогда группа $\pi/K = \mathbb{Z}_n$ действует на факторе K/K' (который является абелевой группой конечного ранга), и $\Delta_B(t)$ можно определить как характеристический многочлен автоморфизма группы K/K', соответствующего произвольной образующей группы π/K.

Хорошо известно, что если B – неособая кривая, то $\pi = \mathbb{Z}_n$ и, следовательно, $\Delta_B(t) = 1$. Поэтому можно ожидать, что имеется связь между сложностью многочлена $\Delta_B(t)$ и сложностью особенностей кривой B. Для того, чтобы описать влияние второй на первую, А. Либгобер [9] ввел понятие локального многочлена Александера $\Delta_{B|O}(t)$ кривой B в особой точке O: по определению, $\Delta_{B|O}(t)$ – это обычный многочлен Александера зацепления, высекаемого кривой B на крае маленького шарика с центром O. Результат Либгобера состоит в следующем:

Теорема (Либгобер [9]). *$\Delta_B(t)$ делит произведение $\prod_{O_i} \Delta_{B|O_i}(t)$, взятое по всем особым точкам O_i кривой B.*

Еще один результат в этом направлении принадлежит Нори [13], доказавшему следующее обобщение знаменитой гипотезы Зариского о нодальных кривых:

Теорема (Нори [13]). *Пусть B – редуцированный обильный дивизор на проективной алгебраической поверхности X. Рассмотрим вложенное разрешение $\sigma\colon Y \to X$ всех особых точек кривой B, отличных от квадратичных (nodes), и для каждой неприводимой компоненты B_i кривой B обозначим через $\widetilde{B}_i$ ее собственный прообраз в Y, а через $\delta(\widetilde{B}_i)$ – количество квадратичных особенностей кривой $\widetilde{B}_i$. Если σ можно выбрать так, чтобы $\widetilde{B}_i^2 > 2\delta(\widetilde{B}_i)$ для всех i, то ядро гомоморфизма включения $\pi_1(X \smallsetminus B) \to \pi_1(X)$ является абелевой подгруппой, централизатор которой имеет конечный индекс.*

В классическом случае $X = \mathbb{C}\mathrm{p}^2$ из теоремы Нори следует, что, при сделанном предположении, группа $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{p}^2 \smallsetminus B)$ абелева и, в частности, $\Delta_B(t) = 1$.

Главный результат настоящей работы занимает промежуточное положение между двумя вышеуказанными теоремами:

Основная теорема. *Предположим, что множество особых точек кривой B разделено на два подмножества, S_+ и S_{exc}, и пусть существует разрешение точек из S_+ такое, что собственный прообраз кривой B имеет положительный индекс самопересечения. Тогда $\Delta_B(t)$ делит произведение*

$$\prod_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} \Delta_{B|O_i}(t).$$

Грубо говоря, этот результат означает, что на $\Delta_B(t)$ могут влиять (в смысле теоремы Либгобера) только те особые точки кривой B, которые превышают предположения теоремы Нори. Кроме того, можно отдельно оценить кратности различных корней многочлена $\Delta_B(t)$, каждый раз стараясь собрать в S_+ те особые точки, локальные многочлены Александера которых обращаются в рассматриваемом корне в нуль.

Замечание. Заметим, что локальный многочлен Александера квадратичной особенности равен $t - 1$. Поэтому квадратичные особенности никогда не дают вклада в многочлен Александера неприводимой кривой (см. [19]), и их всегда можно поместить в S_{exc}.

Замечание. В действительности, мы доказываем несколько более сильный результат, в котором речь идет о произвольном обильном дивизоре на алгебраической поверхности; подробности см. в теореме 4.1.

Благодарности. Я хочу выразить свою глубокую благодарность Олегу Виро, который привлек мое внимание к этой задаче и ввел меня в предмет, и Анатолию Либгоберу, идеи которого оказали существенное влияние на мою работу и кто, в конце концов, убедил меня опубликовать этот результат.

§1. Многочлен Александера алгебраической кривой

Определение многочлена Δ, данное во введении, применимо к любой аффинной алгебраической поверхности (например, $\mathbb{C}\mathrm{p}^2 \setminus B$) и даже, более общим образом, к любому топологическому пространству Y с $H_1(Y) = \mathbb{Z}_n$. (Или с отмеченным гомоморфизмом $H_1(Y) \to \mathbb{Z}_n$, который в алгебраическом случае можно задать при помощи линейного расслоения $E \in H^1(Y; \mathcal{O}_Y^*)$ с $E^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_Y$.) Тогда (рациональный) многочлен Александера определяется как характеристический многочлен действия преобразования накрытия в $H_1(Y_n; \mathbb{Q})$, где Y_n – циклическое накрывающее пространства Y, определенное указанным гомоморфизмом $H_1(Y) \to \mathbb{Z}_n$. Однако, как и в теории узлов, для данного предмета является традиционным включать в определение многочлена исходную кривую B (играющую роль периферической структуры). Помимо других преимуществ, это гарантирует “правильное” ветвление на бесконечности. (Другая, более практическая причина того, чтобы рассматривать многочлен Александера как инвариант кривой, а не ее дополнения, состоит в том, что изучается именно связь этого многочлена с особенностями кривой.) Еще одно преимущество рассмотрения пары (X, B), а не дополнения $Y = X \setminus B$, состоит в том, что это дает нам каноническую компактификацию X' поверхности Y_n, и, как показано в [9], если кривая B неприводимая и редуцированная, то первые когомологии десингуляризации поверхности X' отличаются от первых когомологий поверхности Y_n на приходящую из X легко контролируемую часть с тривиальным действием группы преобразований накрытия. (В [9] можно также найти обзор различных определений многочлена Александера и соотношений между ними.)

Итак, пусть $B \subset X$ – алгебраическая кривая на проективной алгебраической поверхности X и пусть $E \in H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$ – такой класс, что $nE = [B]$ для некоторого натурального n. Рассмотрим какие-нибудь линейные расслоения L_B и L_E, соответствующие $[B]$ и E, зафиксируем изоморфизм $L_E^{\otimes n} \cong L_B$ и сечение $s\colon X \to L_B$ с множеством нулей B и обозначим через $\widetilde{X}' \subset L_E$ множество корней степени n из s (т.е. локально $\widetilde{X}'$ состоит из точек $(x,t) \in L_E$ с $t^n = s(x)$), а через p' – сужение проекции расслоения $L_E \to X$ на $\widetilde{X}'$. Пара $(\widetilde{X}', p')$ называется *n-листным накрытием* поверхности X *с ветвлением вдоль* B, а E называется *классом* накрывающего пространства $\widetilde{X}'$.

Обозначим через tr сужение на $\widetilde{X}'$ автоморфизма расслоения

$$L_E \to L_E, \quad (x,t) \mapsto (x, t \cdot \exp(2\pi i/n)),$$

и пусть $\rho\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ – какое-нибудь фиксированное tr-инвариантное разрешение особенностей поверхности $\widetilde{X}'$. Тогда $H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ есть $\mathbb{C}[t]$-модуль, причем t действует посредством индуцированного автоморфизма tr^*. Пусть $p = p' \circ \rho$.

1.1. Определение. *$H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ называется (редуцированным) модулем Александера кривой B, а характеристический многочлен автоморфизма tr^* на $H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ обозначается через $\widetilde{\Delta}_B(t)$ и называется (редуцированным) многочленом Александера кривой B.*

Замечания. (1) Как показано в [7] (ср. [3]), всякое топологическое накрытие над X, разветвленное вдоль B (с заданными кратностями компонент), можно задать при помощи вышеуказанной конструкции, и имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между классами послойного изоморфизма таких накрытий и классами $E \in H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$ с $nE = [B]$.

(2) Как показано в [9], $H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ не зависит от выбора $\widetilde{X}$. Если $X = \mathbb{C}\mathrm{p}^2$, а кривая B – неприводимая и редуцированная, то многочлен $\widetilde{\Delta}$, определенный выше, совпадает с классическим многочленом Александера группы $\pi_1(X \smallsetminus B)$.

Поскольку tr – аналитический автоморфизм конечного порядка, то $H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ расщепляется в прямую сумму собственных пространств автоморфизма tr, причем это расщепление согласовано с разложением Ходжа. Итак,

$$H^1(\widetilde{X};\mathbb{C}) = \bigoplus_{r\in\left\{-\frac{n-1}{n},\dots,-\frac{1}{n},0\right\}} H_r^{1,0}(\widetilde{X}) \oplus H_r^{0,1}(\widetilde{X}),$$

где $H_r^{p,q}(\widetilde{X})$ – собственное пространство в $H^p(\widetilde{X};\Omega^q(\widetilde{X}))$, соответствующее собственному значению $\exp(2\pi i r)$ автоморфизма tr^*.

Положим

$$h_r^{p,q} = h_r^{p,q}(\widetilde{X}) = \dim_{\mathbb{C}} H_r^{p,q}(\widetilde{X}).$$

Тогда из двойственности Серра следует, что $h_r^{1,0} = h_r^{1,2}$ и $h_r^{0,1} = h_r^{2,1}$. Положим

$$h_r(\widetilde{X}) = h_r = \begin{cases} h_r^{1,2}, & r \in \left\{-\frac{n-1}{n},\dots,-\frac{1}{n},0\right\}, \\ h_0^{1,2} + h_0^{2,1}, & r = 0, \\ h_{-r}^{2,1}, & r \in \left\{0,\frac{1}{n},\dots,\frac{n-1}{n}\right\}. \end{cases}$$

(Мы считаем, что $h_r = 0$, если $r \notin (-1,1)$ или $nr \notin \mathbb{Z}$.)

1.2. Определение. *Набор рациональных чисел $\{r \in \mathbb{Q} \mid h_r \neq 0\}$, каждое из которых учитывается с кратностью h_r, называется спектром пары (B,E) и обозначается $\mathrm{Spec}(B,E)$.*

1.3. Предложение.

(1) *Спектр $\mathrm{Spec}(B,E)$ симметричен относительно 0;*

(2) *$h_0 = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X;\mathbb{C})$;*

(3) *если $r < 0$, то*

$$h_r = \dim_{\mathbb{C}}\bigl[H^1(X;p_*\omega_{\widetilde{X}})\bigr]_r,$$

где $[\,\cdot\,]_r$ обозначает собственное пространство автоморфизма tr^*, соответствующее собственному значению $\exp(2\pi i r)$;

(4) *имеет место равенство*

$$\widetilde{\Delta}_B(t) = \prod_{r\in\mathrm{Spec}(B,E)} (t - \exp(2\pi i r))^{h_r}.$$

Доказательство. (1) Это следует из того, что $H^{p,q}(\widetilde{X})$ и $H^{q,p}(\widetilde{X})$ – комплексно сопряженные линейные пространства.

(2) h_0 – это размерность tr-инвариантной части $H^1(\widetilde{X};\mathbb{C})$, которая изоморфна $H^1(X;\mathbb{C})$.

(3) При $r < 0$ имеем $h_r = \dim_{\mathbb{C}}\left[H^1(\widetilde{X}; \omega_{\widetilde{X}})\right]_r$, и требуемое утверждение следует из того, что $R^i p_* \omega_{\widetilde{X}} = 0$ при $i > 0$ (см. [8]).

(4) Это очевидно. $\square$

§2. Локальные многочлены Александера

Пусть C – плоская кривая (росток плоской кривой) в изолированной особой точке O. Возьмем маленький шарик $\mathcal{B}$ с центром O. Хорошо известно, (см., например, [10]), что пересечение $C \cap \partial\mathcal{B}$ – это зацепление в $\partial\mathcal{B} = S^3$, изотопический тип которого не зависит от выбора шарика $\mathcal{B}$, при условии, что он достаточно мал.

2.1. Определение. *Многочлен Александера зацепления $C \cap \partial\mathcal{B}$ называется локальным многочленом Александера кривой C в точке O и обозначается $\Delta_{C|O}(t)$.*

Замечание. $\Delta_{C|O}(t)$ допускает еще одно описание (см. [10]): это – характеристический многочлен действия монодромии в группе исчезающих когомологий.

Пусть $\sigma \colon \widetilde{Y} \to \mathbb{C}^2$ – разрешение точки O такое, что $\sigma^{-1}C$ – дивизор с нормальными пересечениями. Обозначим через E_i, $i = 1, \ldots, k$, редуцированные компоненты дивизора $\sigma^{-1}O$, а через m_i – их кратности в $\sigma^{-1}C$. Возьмем рациональное число $r \in [-1, 0)$ и рассмотрим пучки

$$\mathcal{J}_r = \mathcal{J}_r(C|O) = \sigma_* \mathcal{K}\left(-\sum \lfloor (r+1)m_i \rfloor E_i\right)$$

и

$$\overline{\mathcal{J}}_r = \bigcap_{-1 \leqslant r' < r} \mathcal{J}_{r'}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K} = \omega_{\widetilde{Y}} \otimes (\sigma^* \omega_{\mathbb{C}^2})^{\otimes -1},$$

и $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает целую часть. Очевидно, $\overline{\mathcal{J}}_r$ и $\mathcal{J}_r$ – пучки идеалов на $\mathbb{C}^2$, и

$$\mathcal{J}_{r'} \subset \overline{\mathcal{J}}_{r'} \subset \mathcal{J}_r \subset \overline{\mathcal{J}}_r$$

при любом $-1 \leqslant r < r' < 0$. Кроме того, $\mathcal{J}_{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$, и все факторы $\overline{\mathcal{J}}_r / \mathcal{J}_r$ и $\mathcal{J}_{r'} / \mathcal{J}_r$, $r' \leqslant r$, сосредоточены в O.

2.2. Предложение (Варченко [17]). *Для любого $r \in (-1, 0)$ целое число $h_r = h_r(C|O) = \dim_{\mathbb{C}}(\overline{\mathcal{J}}_r / \mathcal{J}_r)\big|_O$ совпадает с кратностью числа r в спектре $\operatorname{Spec}_O C$ точки O.*

(Определение спектра $\operatorname{Spec}_O C$ см. в [17].)

Замечание. Этот результат формулируется и доказывается в статье [17] в несколько других терминах. Его "перевод" на язык данной статьи можно найти в [4].

Замечание. На самом деле пучки $\overline{\mathcal{J}}_r$ введены только для упрощения обозначений. Поскольку функция $r \mapsto \mathcal{J}_r$, очевидно, кусочно постоянна, $\overline{\mathcal{J}}_r$ можно заменить на $\mathcal{J}_{r-\varepsilon}$ с достаточно малым ε. (Если N – целое, делящееся на все числа m_i, то можно взять любое $\varepsilon < 1/N$.) Заметим, что $\mathcal{J}_r$ можно также определить как

$$\mathcal{J}_r(C|O) = \sigma_*\mathcal{K}\left(\sum \lceil -(r+1)m_i \rceil E_i\right),$$

где $\lceil x \rceil$ – верхнее целочисленное приближение к x ("потолок").

2.3. Следствие. *Неинвариантная циклотомическая часть многочлена $\Delta_{C|O}(t)$ дается выражением*

$$\prod_{r\in(-1,0)\cap\mathbb{Q},\ h_r\neq 0} (t-\exp(2\pi i r))^{h_r+h_{-(r+1)}}.$$

Иными словами, кратность нетривиального корня из единицы $\exp(2\pi i r)$ с $r \in (-1,0)$ в $\Delta_{C|O}(t)$ равняется $h_r + h_{-(r+1)}$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из симметрии спектра $\operatorname{Spec}_O C$ относительно 0 и следующего результата статьи [17]: циклотомическая часть многочлена $\Delta_{C|O}(t)$ дается выражением

$$\prod_{r\in \operatorname{Spec}_O B} (t-\exp(2\pi i r))$$

(где элементы спектра $\operatorname{Spec}_O C$ учитываются со своими кратностями). $\square$

§3. Пучки $p_*\omega_{\widetilde{X}}$.

Обозначения. *Пусть дан формальный дивизор $D = \sum r_i D_i$ с рациональными коэффициентами r_i. Положим*

$$\lfloor D \rfloor = \sum \lfloor r_i \rfloor D_i, \quad \lceil D \rceil = \sum \lceil r_i \rceil D_i, \quad D_{\mathrm{red}} = \sum D_i,$$

где $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ обозначают, соответственно, нижнее и верхнее целочисленные приближения к x ("пол" и "потолок").

Пусть $B \subset X$ – дивизор с изолированными особенностями, $E \in H^1(X;\mathcal{O}_X^*)$ – такой класс, что $nE = [B]$, и $p'\colon \widetilde{X}' \to X$ – n-листное накрытие, разветвленное вдоль B с классом E. Для того, чтобы построить десингуляризацию $\widetilde{X}$ поверхности $\widetilde{X}'$, рассмотрим вложенное разрешение $\sigma\colon Y \to X$ особенностей кривой B, пусть $q' = \sigma^* p'\colon \widetilde{Y}' \to Y$, возьмем эквивариантную десингуляризацию $\rho\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}'$ и положим $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$. Пусть

$$q = q' \circ \rho\colon \widetilde{Y} \to Y \quad \text{и} \quad p = \sigma \circ q\colon \widetilde{Y} \to X$$

– проекции.

Из предложения 1.3 следует, что $\widetilde{\Delta}_B(t)$ можно выразить в терминах когомологий пучков

$$\overline{\mathcal{S}}_r = \bigl[q_*\omega_{\widetilde{Y}}\bigr]_r \quad \text{или} \quad \mathcal{S}_r = \bigl[p_*\omega_{\widetilde{Y}}\bigr]_r = \sigma_*\overline{\mathcal{S}}_r.$$

(Как и в §2, мы обозначаем через $[\,\cdot\,]_r$, $r = -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}$, собственный пучок, соответствующий собственному значению $\exp(2\pi i r)$ автоморфизма tr^*.) Следующий результат доказан в [4].

3.1. Предложение. *Пусть $\overline{B} = \sigma^* B$ – полный прообраз кривой B в Y. Тогда для каждого $r = -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}$ имеем:*

(1) $\overline{\mathcal{S}}_r = \omega_Y\bigl((r+1)nE - \lfloor (r+1)\overline{B} \rfloor\bigr)$;

(2) $\mathcal{S}_r = \omega_X\bigl((r+1)nE\bigr) \otimes \bigotimes_{O_i} \mathcal{J}_r(B|O_i)$, *где произведение берется по всем особым точкам O_i кривой B;*

(3) $R^i \sigma_* \overline{\mathcal{S}}_r = 0$ *при* $i > 0$.

Замечание. Заметим, что в действительности утверждение (1) предложения 3.1 применимо к любому дивизору $\overline{B}$ в Y с нормальными пересечениями.

§4. Доказательство основной теоремы

4.1. Теорема (обобщение основной теоремы)**.** *Пусть X – проективная алгебраическая поверхность, а B – обильный неприводимый дивизор на X, имеющий лишь изолированные особенности. Предположим, что множество $\operatorname{Sing} B$ особых точек кривой B разделено на два дизъюнктных подмножества S_+ и S_{exc} и имеется разрешение всех точек из S_+, при котором собственный прообраз кривой B имеет положительный индекс самопересечения. Тогда $\widetilde{\Delta}_B(t)$ делит произведение*

$$(t-1)^{b_1(X)} \prod_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} \Delta_{B|O_i}(t)$$

(независимо от того, какой класс $E \in H^1(X; \mathcal{O}_X^*)$ использован для определения $\widetilde{\Delta}_B(t)$).

Замечание. Как уже упоминалось во введении, квадратичные особенности кривой B никогда не дают вклада в многочлен Александера, и поэтому их всегда можно поместить в S_{exc}.

Доказательство. Пусть пространства Y, $\widetilde{Y}'$, $\widetilde{Y} = \widetilde{X}$ и отображения σ, ρ, p, q – те же, что в §3. (Мы предполагаем, что разрешения точек из S_+ – те самые, которые упоминались в теореме.) Прежде всего, заметим, что тривиальная часть модуля Александера $H^1(\widetilde{X}; \mathbb{C})$ изоморфна $H^1(X; \mathbb{C})$. Это соответствует множителю $(t-1)^{b_1(X)}$ в вышеприведенной формуле. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением нетривиальных корней многочлена $\widetilde{\Delta}_B(t)$, т.е. корней вида $\exp(2\pi i r)$, $r = -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}$, и, в соответствии с предложением 1.3 и следствием 2.3, результат будет следовать из неравенств

$$h_r(\widetilde{Y}) = \dim_{\mathbb{C}} \bigl[H^1(X; p_*\omega_{\widetilde{X}})\bigr]_r \leqslant \sum_{O_i \in S_{\text{exc}}} h_r(B|O_i).$$

Мы воспользуемся теоремой Фивега об обращении в нуль, которую, в двумерном случае, можно сформулировать следующим образом:

4.2. Теорема (см. [18] или [11]). *Пусть Y – проективная поверхность (над $\mathbb{C}$), D – формальный дивизор на Y с рациональными коэффициентами, а $\mathcal{L}$ – обратимый пучок на Y. Предположим, что носитель формального дивизора D является дивизором с нормальными пересечениями,*

$$(c_1\mathcal{L} - [D])^2 > 0 \quad \text{и} \quad (c_1\mathcal{L} - [D]) \circ C \geqslant 0$$

для любой кривой $C \subset Y$. Тогда

$$H^p(X; \mathcal{L} \otimes \omega_Y(-\lfloor D \rfloor)) = 0$$

при любом $p > 0$.

Обозначим через $\overline{B}$ собственный прообраз кривой B в Y, а через F_i – ту часть ее полного прообраза $\sigma^* B$, которая лежит над O_i. Пусть

$$\overline{B}' = \overline{B} + \sum_{O_i \in S_{\text{exc}}} F_i.$$

По нашему предположению, $(\overline{B}')^2 > 0$. Докажем, что $\overline{B}' \circ C \geqslant 0$ для любой кривой $C \subset Y$. Это очевидно верно для любой кривой, не являющейся компонентой кривой $\overline{B}'$ (поскольку $\overline{B}'$ – эффективный дивизор). Если C – компонента кривой F_i (с $O_i \in S_{\mathrm{exc}}$), то $\overline{B}' \circ C = 0$, поскольку, по крайней мере, гомологически, $\overline{B}'$ можно вытолкнуть из слоя $\sigma^{-1}O_i$. Наконец, если $C = \overline{B}$, то

$$\overline{B}' \circ \overline{B} = \overline{B}' \circ (\overline{B}' - \sum F_i) = (\overline{B}')^2 > 0.$$

Возьмем какое-нибудь $r \in \left\{-\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}\right\}$. Поскольку дивизор $nE - \sigma^* B$ численно эквивалентен нулю, то пара

$$(\mathcal{L}, D) = ((r+1)nE, (r+1)\sigma^* B - \varepsilon \overline{B}'), \quad \varepsilon > 0,$$

удовлетворяет предположениям теоремы 4.2, и, следовательно, $H^1\big(Y; \omega_Y((r+1)nE - \lfloor D \rfloor)\big) = 0$. Теперь заметим, что если ε достаточно мало, то пучок

$$\overline{\mathcal{R}}_r = \omega_Y((r+1)nE - \lfloor D \rfloor)$$

содержит $\overline{\mathcal{S}}_r = \big[q_* \omega \widetilde{X}\big]_r$, и в прообразе окрестности особой точки O_i кривой B он совпадает либо с $\overline{\mathcal{S}}_r$ (если $O_i \in S_+$), либо с $\overline{\mathcal{S}}_{r'}$ при некотором $r' < r$ (если $O_i \in S_{\mathrm{exc}}$). В частности, отсюда вытекает, что

(1) $R^i \sigma_* \overline{\mathcal{R}}_r = 0$ при $i > 0$. (Это утверждение локально по X, и применимо предложение 3.1, п. (3).)
(2) $H^1(X; \sigma_* \overline{\mathcal{R}}_r) = 0$. (Это следует из (1).) Наконец,
(3) имеется короткая точная последовательность:

$$0 \to \big[p_* \omega_{\widetilde{Y}}\big]_r \to \sigma_* \overline{\mathcal{R}}_r \to \bigoplus_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} \overline{\mathcal{J}}_r(B|O_i)/\mathcal{J}_r(B|O_i) \to 0.$$

Поэтому точная когомологическая последовательность

$$\bigoplus_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} H^0\big(X; \overline{\mathcal{J}}_r(B|O_i)/\mathcal{J}_r(B|O_i)\big) \to H^1\big(X; \big[p_* \omega_{\widetilde{Y}}\big]_r\big) \to H^1\big(X; \sigma_* \overline{\mathcal{R}}_r\big)$$

дает

$$h_r(\widetilde{Y}) = \dim_{\mathbb{C}} H^1\big(X; \big[p_* \omega_{\widetilde{X}}\big]_r\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} \dim_{\mathbb{C}} H^0\big(X; \overline{\mathcal{J}}_r(B|O_i)/\mathcal{J}_r(B|O_i)\big) = \sum_{O_i \in S_{\mathrm{exc}}} h_r(B|O_i),$$

откуда следует теорема. $\square$

Литература

1. A. Bartolo, *Fundamental group of a class of rational cuspidal curves.* — Manuscripta Math. **93** (1997), 273–281.
2. A. Bartolo, H. Tokunaga, *Zariski pairs of index 19 and Mordell-Weil groups of $K3$ surfaces.* — Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), 127–144.
3. А. И. Дегтярев, *Топология комплексных плоских проективных алгебраических кривых.* Дисс. канд. физ.-мат. наук, ЛГУ, 1987.
4. A. I. Degtyarev, *Alexander polynomial of a curve of degree six.* — J. Knot Theory and Ramif. **3** (1994), 439–454.
5. А. И. Дегтярев, *Квинтики в $\mathbb{C}\mathrm{p}^2$ с неабелевой фундаментальной группой.* — Алгебра и анализ **11**, № 5 (1999), 130–151.
6. A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces.* Springer-Verlag (1992).
7. F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings.* Global Analysis. Papers in honor of K. Kodaira. 1969, pp. 253–265.
8. J. Kollár, *Higher direct images of dualizing sheaves.* — Ann. Math. **123** (1986), 11–42.
9. A. Libgober, *Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes.* — Duke Math. J. **49** (1982), 833–851.
10. J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces.* Ann. Math. Stud., Vol. 61, Princeton, New Jersey (1968), Princeton Univ. Press.
11. Y. Miyaoka, *On the Mamford–Ramanujam vanishing theorem on a surface.* Géométrie alg. d'Angers. Oslo (1979), pp. 239–248.
12. B. G. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies.* — Lect. Notes Math. **862** (1981), 107–192.
13. M. V. Nori, *Zariski conjecture and related problems.* — Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4 série **16** (1983), 305–344.
14. M. Oka, *Some plane curves whose complement have non-abelian fundamental group.* — Math. Ann. **218** (1978), 55–65.
15. H. Tokunaga, *Some examples of Zariski pairs arising from certain elliptic $K3$ surfaces. II. Degtyarev's conjecture.* — Math. Z. **230** (1999), 389–400.
16. K. Tono, *On the fundamental group of the complement of certain affine hypersurfaces.* — Manuscripta Math. **97** (1998), 75–79.
17. А. Варченко, *Асимптотические структуры Ходжа в исчезающих когомологиях.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **45** (1981), 540–591.
18. E. Viehweg, *Vanishing theorems.* — J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 1–8.
19. O. Zariski, *On the irregularity of cyclic multiple planes.* — Ann. Math. **32** (1931), 485–511.

Degtyarev A. A divisibility theorem for the Alexander polynomial of a plane algebraic curve.

An upper estimate for the Alexander polynomial of an algebraic curve is obtained, which sharpens Libgober's estimate in terms of the local polynomials at the singular points of the curve: only those singular points may contribute to the Alexander polynomial of the curve that are in the excess of the hypothesis of Nori's vanishing theorem.

Bilkent University, Ankara, Turkey
e-mail degt@fen.bilkent.edu.tr

Поступило 21 декабря 2000 г.