Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

Н. М. Гулевич, О. Н. Гулевич

ОЦЕНКА МЕРЫ НЕВЫПУКЛОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L^p

При помощи L^p-неравенства Уэллса–Вильямса доказывается одна точная оценка для меры невыпуклости в пространстве L^p.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство, A – подмножество X, $\operatorname{co} A$ – его выпуклая оболочка, $\overline{\operatorname{co}}\, A$ – замкнутая выпуклая оболочка, $d(A) = \sup_{x,y\in A}\|x-y\|$ – диаметр. *Мерой невыпуклости* множества A называется величина

$$\alpha(A) = \sup_{x\in\overline{\operatorname{co}}\, A}\ \inf_{y\in A}\|x-y\|;$$

т.е. $\alpha(A)$ – хаусдорфово расстояние между A и $\overline{\operatorname{co}}\, A$.

Пусть Ω – пространство с σ-конечной положительной мерой μ. Обозначим через $L^p = L^p(\Omega,\mu)$ пространство (вещественное) μ-измеримых функций f на Ω, для которых конечна величина

$$\|f\| = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \operatorname{esse\,sup}_\Omega |f|, & p=\infty.\end{cases}$$

Через l^p обозначим пространство числовых последовательностей $x=\{x_n\}$, для которых конечна величина

$$\|x\| = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}, & 1\leqslant p<\infty,\\ \sup_n |x_n|, & p=\infty.\end{cases}$$

Нам понадобится следующая

Лемма (Уэллс–Вильямс [6]). *Для любых функций $x_1,\dots,x_n\in L^p$, $1<p<\infty$, и неотрицательных чисел $c_1,\dots,c_n$ с $\sum_{i=1}^n c_i=1$ верно неравенство:*

$$\sum_{i,j=1}^n c_ic_j\|x_ix_j\|^k \geqslant 2\sum_{j=1}^n c_j\left\|x_j-\sum_{i=1}^n c_ix_i\right\|^k, \tag{1}$$

где $1/k=\min\{1/p,1-1/p\}$.

Теорема. *Для любого ограниченного подмножества A бесконечномерного пространства $L^p = L^p(\Omega,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедливо неравенство*

$$\alpha(A) \leqslant \frac{d(A)}{2^{t_p}}, \tag{2}$$

где

$$t_p = \begin{cases} \min\{1/p, 1-1/p\}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ 0, & p = \infty, \end{cases}$$

При этом оценка (2) *является точной.*

Доказательство теоремы.

I) Пусть $1 < p < \infty$. По определению меры невыпуклости для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x \in \operatorname{co} A$ такой, что для любого $y \in A$ выполнено $\|y - x\|^k \geqslant \alpha(A)^k - \varepsilon$, где $k = 1/t_p$. Но $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ для некоторых $x_i \in A$, $c_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Следовательно, для $j = 1, \ldots, n$

$$\left\| x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|^k \geqslant \alpha(A)^k - \varepsilon.$$

В силу (1) имеем:

$$d(A)^k \geqslant \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \|x_i - x_j\|^k \geqslant 2 \sum_{j=1}^n c_j \left\| x_j - \sum_{i=1}^n c_i x_i \right\|^k$$

$$\geqslant 2 \sum_{j=1}^n c_j (\alpha(A)^k - \varepsilon) = 2(\alpha(A)^k - \varepsilon).$$

Переходя к пределу в неравенстве $d(A)^k \geqslant 2(\alpha(A)^k - \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, получим $d(A)^k \geqslant 2\alpha(A)^k$. Откуда следует неравенство (2) в случае $1 < p < \infty$.

Если $p = 1$ или $p = \infty$, то неравенство (2) сводится к очевидно верному неравенству $\alpha(A) \leqslant d(A)$.

II) Перейдем теперь к доказательству точности оценки (2).

a) Рассмотрим сначала случай $2 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

$$t_p = \begin{cases} 1/p, & 2 \leqslant p < \infty \\ 0, & p = 0. \end{cases}$$

Пусть $\{E_i\}$ – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств в Ω с положительной конечной мерой и

$$y_i = \begin{cases} \mu(E_i)^{-1/p}\chi_i, & 2 \leqslant p < \infty, \\ \chi_i, & p = \infty, \end{cases}$$

где χ_i – характеристическая функция множества E_i ($i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$). Тогда $\|y_i\| = 1$ и для $i \neq j$

$$\|y_i - y_j\| = \begin{cases} 2^{1/p}, & 2 \leqslant p < \infty, \\ 1, & p = \infty. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\left\| \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \right\| = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}-1}, & 2 \leqslant p < \infty \\ 1/n, & p = \infty. \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{y_1+\ldots+y_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, и $0 \in \overline{\mathrm{co}}\, B$, где $B = \{y_i\}$. В силу неравенства (2) имеем:

$$1 = \inf_i \|y_i\| \leqslant \alpha(B) \leqslant \frac{d(B)}{2^{t_p}} = 1.$$

Отсюда $\alpha(B) = d(B)/2^{t_p}$, и точность оценки (2) в случае $2 \leqslant p \leqslant \infty$ доказана.

б) Осталось рассмотреть случай $1 \leqslant p < 2$. Тогда $t_p = 1 - 1/p$.

Пусть $L^p(\Omega_1, \mu)$ – сепарабельное бесконечномерное подпространство в $L^p(\Omega, \mu)$, где $\Omega_1 < \Omega$ и $\mu(\Omega_1) < \infty$. Тогда (см., например, [5]) $L^p(\Omega_1, \mu)$ линейно изометрично одному из следующих пространств:

1) $L^p([0, 1], dt)$, где dt – мера Лебега на отрезке $[0, 1]$;

2) $\left(l^p \oplus L^p([0, 1], dt)\right)_p$ – l^p-прямая сумма пространств l^p и $L^p([0, 1], dt)$;

3) l^p.

1), 2) Поскольку мера невыпуклости множеств – линейно-изометрический инвариант, то в случаях 1) и 2) достаточно установить точность оценки (2) в $L^p([0, 1], dt)$.

Рассмотрим в $L^p([0, 1], dt)$ систему функций Радемахера $\{r_n(t)\}$:

$$r_n(t) = \begin{cases} (-1)^{k-1}, & (k-1)/2^n < t < k/2^n, \\ 0, & t = (k-1)/2^n, \quad t = 1, \end{cases}$$

где $n \in \mathbb{N}$; $k = 1, \dots, 2^n$.

Тогда

$$\|r_n\| = \left(\int_0^1 \left|r_n(t)\right|^p dt\right)^{1/p} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

и для $n \neq m$

$$\|r_n - r_m\|^p = \int_0^1 \left|r_n(t) - r_m(t)\right|^p dt =$$

$$= \int\limits_{\{t:\operatorname{sign} r_n(t)=\operatorname{sign} r_m(t)\}} |r_n(t) - r_m(t)|^p dt + \int\limits_{\{t:\operatorname{sign} r_n(t)=-\operatorname{sign} r_m(t)\}} |r_n(t) - r_m(t)|^p dt$$

$$= 2^p \cdot \operatorname{mes}\{t : \operatorname{sign} r_n(t) = -\operatorname{sign} r_m(t)\} = 2^p \cdot \frac{1}{2} = 2^{p-1}.$$

Следовательно, для множества $C = \{r_n(t)\}$ имеем:

$$d(C) = \sup_{n,m} \|r_n - r_m\| = 2^{1-1/p} = 2^{t_p}.$$

Кроме того, из неравенства Хинчина (см., например, [3]) следует, что

$$\left\|\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{n}\right\| \leqslant M \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}\right)^2,$$

где M – константа, зависящая только от p. Отсюда $\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r_i\right\| \leqslant M/\sqrt{n}$. Значит, $\frac{r_1+\ldots+r_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, и $0 \in \overline{\operatorname{co}} C$. Следовательно,

$$1 = \inf_n \|r_n\| \leqslant \alpha(C) \leqslant \frac{d(C)}{2^{t_p}} = 1,$$

т.е. $\alpha(C) = d(C)/2^{t_p}$, что доказывает точность оценки (2).

3) Осталось только установить точность оценки (2) в случае пространства l^p, $1 \leqslant p < 2$.

Пусть

$$J(X) = \sup\{r(A) : A \subset X,\ d(A) = 1\},$$

где

$$r(A) = \inf_{x \in \operatorname{co} A} \sup_{y \in A} \|x - y\|$$

– чебышевский радиус A;

$$G(X) = \sup\{\alpha(A) : A \subset X,\ d(A) = 1\}.$$

В [1] доказано, что $J(Y) \leqslant G(Y)$ для любого конечномерного линейного нормированного пространства Y. Кроме того (см. [2]), $J(l^p) = \sup_n J(l^p_n)$, где l^p_n – n-мерное подпространство в l^p. Тогда, поскольку $J(l^p) = 2^{-t_p}$ (см., например, [4]), получаем

$$2^{-t_p} = J(l^p) = \sup_n J(l^p_n) \leqslant \sup_n G(l^p_n) \leqslant G(l^p) \leqslant 2^{-t_p}.$$

Таким образом, $G(l^p) = 2^{-t_p}$, что доказывает точность оценки (2) в случае пространства l^p, $1 \leqslant p < 2$. Теорема доказана. □

Замечание. Так как в любом негильбертовом банаховом пространстве X размерности $\geqslant 3$ найдется $A \subset X$ с $\alpha(A) > r(A)$ (см. [1]), неравенство (2) не следует из аналогичного неравенства для чебышевского радиуса $r(A)$ (см., например, [4]).

Литература

1. Н. М. Гулевич, *Мера невыпуклости и константа Юнга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **208** (1993), 174–181.
2. D. Amir, *On Jung's constant and related constants in normed linear spaces.* — Pacific J. Math., **118** (1985), 1–15.
3. B. Beanramy, *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford (1985).
4. T. Dominguer Benavides, *Some geometric properties concerning fixed point theory.* Revists Mat. Univ. Compl. Madrid **9**, No. Extra (1996), 109–124.
5. H. Elton Lacey, *The isometric theory of classical Banach spaces.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1974).
6. J. H. Wells, L. R. Williams, *Embeddings and extensions in analysis.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1975).

Gulevich N. M. and Gulevich O. N. An estimate for the measure of nonconvexity in the L^p-space.

The measure $\alpha(A)$ of nonconvexity for a bounded subset A of a normed linear space L is the Hausdorff distance between A and its convex hull $\operatorname{co} A$. It is proved that if L is an L^p-space, then $\alpha(A) \leqslant d(A)/2^{t_p}$, where $d(A)$ is the diameter of A and $t_p = \min\{1/p, 1-1/p\}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Furthermore, this estimate is sharp.

С.-Петербургский
государственный университет
водных коммуникаций

Поступило 14 мая 2001 г.