Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

А. М. Вершик

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТИПИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Дорогому Виктору Абрамовичу
к 80-летию**

Помню, как студентом первого курса мат-меха ЛГУ я посещал кружок, который мастерски вел В. А. Залгаллер. Геометрический заряд, полученный в те годы, я ощущал во всей дальнейшей работе. Виктор Абрамович – не только замечательный геометр, но и блестящий лектор, умеющий доходчиво рассказывать о сложных проблемах и их решениях. Я рискнул дать в сборник, посвященный его восьмидесятилетию, запись моей популярной лекции, прочитанной в Московском независимом университете 29 марта 2001 г.

Введение

Выбирая тему сегодняшнего доклада, я решил, что здесь лучше рассказывать о чем-то очень конкретном, а не об общих теориях, какими бы красивыми они ни были. Я расскажу о нескольких конкретных задачах, которыми хотел бы заинтересовать молодежь. Эти задачи – не очень древние. Такой тип задач появился лет 30 с небольшим назад. Сейчас эта тематика расцвела, что можно было предвидеть заранее, поскольку подобные вопросы часто встречаются в самых разных областях.

Я буду говорить, скорее, о геометрическом и комбинаторном уровне и не буду подробно говорить о связях, например, с теорией представлений, анализом, статистической физикой и т. д. Я просто дам несколько примеров (три или больше), чтобы вы почувствовали вкус этих задач. Здесь даже русская терминология еще не вполне устоялась, термин “предельная форма” (калька с термина limit shape, принятого на Западе) – не очень хороший перевод на русский язык. Термин “форма” вообще очень перегружен: есть формы дифференциальные, квадратичные и т. д. Поэтому можно решить, что речь идет о чем-то другом. В моей лекции речь пойдет фактически о визуальной форме в самом буквальном смысле – о предельном *рисунке* некоторой развивающейся конфигурации. Я даже когда-то и предлагал говорить не "форма", а "рисунок" или "предельная конфигурация".

Мы говорим о некоторой *визуальной динамике*. В начальный момент ничего не было. Потом появляется некий объект, который можно нарисовать или как-то изобразить – *конфигурация*. Есть какие-то правила (вероятностные или детерминированные), по которым она развивается. Нас интересует асимптотическое поведение: что будет в пределе с этой конфигурацией, с этой геометрической конструкцией, когда время идет к бесконечности.

Разумеется, в такую общую постановку укладывается чуть ли не все на свете. Чтобы изучать содержательную математическую задачу, класс конфигураций нужно ограничить, что мы и сделаем.

Как всегда, математики, беря большую проблему, возникшую из физики, механики, биологии и др., все упрощают до карикатуры, а потом выделяют удобный и эстетичный частный случай, как правило, самый простой, и долго-долго его изучают, не слишком обращая внимание на то, насколько он сам по себе нужен и связан с исходными проблемами. Но и от этого на самом деле польза тоже есть, хотя и не та, на которую, возможно, была надежда. Задачи, о которых пойдет речь, возникли из эстетических соображений и соображений естественности. Давно известно, что такой принцип отбора совсем неплохо работает в математике и действительно приводит к полезным приложениям.

Схема постановки задач. Приведу сначала в очень общей форме схему постановки наших задач. Представьте себе, что на плоскости (или в многомерном пространстве, многообразии и т.п.) задан *класс фигур*, иногда говорят, "зверей" – например, выпуклых многоугольников, конечных подмножеств целочисленной решетки, каких-нибудь картинок и т. д., которые по определенным правилам *эволюционируют* во времени и пространстве – растут, изменяются, увеличиваются в размерах.

Параметром может быть время или какая-нибудь другая характеристика – протяженность, площадь и пр.

Правила эволюции могут быть *локальными* (рост чернильного пятна – изменение в данной точке определяется ее окрестностью) или *глобальными* – фигура подвергается нелокальному преобразованию. Они могут быть *детерминированными* – однозначная эволюция – или *стохастическими*, когда шаг эволюции с какой-то вероятностью приводит к той или иной новой фигуре.

Затем масштабируем весь процесс, нормируя фигуры в зависимости от нашего параметра (например, времени), и смотрим, какой получается в пределе бесконечного времени результат – какая-то одна фигура ("предельная форма"), или случайная форма, или вообще нет никакого осмысленного предела.

Пример из биологии – эволюция колоний клеток или распространение инфекции, пример из занимательной математики – игра "Жизнь" Конвея, пример из теории представлений – эволюция диаграмм Юнга и многое, многое другое. Каждый сам может предложить задачи такого типа.

Перейдем к точным постановкам. Начнем с задачи, объявленной в аннотации моего доклада.

§1. Предельная форма выпуклых целочисленных многоугольников

Исторически это – не первая задача. Но, может быть, с нее следует начать, потому что она красива, очень просто формулируется, нетривиально решается и решена была сравнительно недавно.

1.1. Целочисленные многогранники. Рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ и выпуклые *целочисленные* (в том смысле, что их вершины лежат на решетке) многогранники в $\mathbb{R}^d$. Реально нас интересует случай $d = 2$, но пока рассмотрим общий случай.

Чтобы избавиться от лишних параметров, лучше с самого начала считать, что многогранник задан с точностью до трансляций (сдвигов) и линейных преобразований, сохраняющих объем, – элементов группы $SL_d(\mathbb{Z})$. Не будем различать многогранники, которые можно перевести друг в друга с помощью этих аффинных преобразований решетки $\mathbb{Z}^d$.

Кроме того (пропустим этот переход), можно считать, что рассматриваемые многогранники находятся в целочисленном кубе $I^d(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}^d$. (Ясно, что это не совсем одно и то же, но для дальнейших рассуждений имеющееся здесь различие не существенно. Проверьте, что, фиксируя центр тяжести многогранника и применяя линейное преобразование с определителем 1, можно “загнать” многогранник в куб фиксированного размера, зависящего лишь от объема многогранника.)

1.2. Постановка задачи. Введем на множестве всех таких выпуклых многогранников равномерное распределение, т. е. считаем, что все они равновероятны. Чтобы поставить предельную задачу, удобно все “загнать” в настоящий единичный куб $[0,1]^d$. Для этого вместо целочисленной решетки рассмотрим решетку с шагом $1/n$. Тогда куб $I^d(n)$ перейдет в единичный куб, а многогранники окажутся на рациональной решетке. Множество всех многогранников в единичном кубе, вершины которых лежат на решетке с шагом $1/n$, обозначим через $CLP^d(n)$.

Это и есть вышеупомянутое масштабирование; оно, конечно, удобно. Хотя при разных n решетки никак не согласованы (находятся в общем положении), тем не менее, предельная задача поставлена корректно, потому что теперь можно устремить n к бесконечности и задать главный вопрос: “Существует ли предельная форма?”

1.3. Предельная форма. Заметим, что никакой прямой эволюции здесь нет, хотя ее и можно определить. Иначе говоря, мы не указываем, как из многогранника с вершинами на решетке с шагом $1/n$ получить детерминированный или случайный многогранник с вершинами на решетке с шагом $1/(n+1)$. Мы просто задаем, как говорят, *статистику* на множестве многогранников – в данном случае, равномерную при каждом n – и ставим вопрос о ее пределе. Заметим, что параметр задачи – уже не объем многогранника, а n – знаменатель шага решетки.

Что означает существование предельной формы? Это вопрос уже предполагает хотя бы гипотетический ответ. А именно, скажем, что *предельная форма существует*, если существует выпуклое множество $\Omega \subset [0,1]^d$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$

$$\#\{A \in CLP^d(n)\colon r(A,\Omega) < \varepsilon\} \geqslant (1-\varepsilon)\cdot \#CLP^d(n).$$

где r – расстояние по Хаусдорфу.

Иными словами, если рассмотреть все многогранники $A \in CLP^d(n)$, от которых расстояние по Хаусдорфу до множества Ω

меньше ε, то это будут почти все многогранники из $CLP^d(n)$. Поскольку мы говорили о равномерной мере, то существование предельной формы означает, что по равномерной мере вероятность для выпуклого многогранника попасть в ε-окрестность множества Ω будет почти 1.

Если это так, то множество Ω и называется *предельной формой*. Но никто не сказал, что это так. Более того, до сих пор не известно, существует ли предельная форма выпуклых многогранников во всех размерностях d и даже в размерности 3. Известно лишь, что́ получается при $d = 2$, и об этом я сейчас расскажу.

1.4. Предельная мера. В принципе, могло бы оказаться, что никакой предельной формы не существует, и выпуклое множество в пределе будет, так сказать, "дышать". Т. е. какая-то часть многогранников стремится приблизиться к одной форме, а другая часть пойдет к другой. И никто не знает, не будет ли так при $d \geqslant 3$. Есть другие задачи, где дело обстоит именно так.

Если все же предельная форма существует, то с точки зрения общей теории этот случай можно назвать "эргодическим", а сам факт стремления в том или ином смысле к предельной форме – *законом больших чисел*. Правда, этот закон совсем не похож на те, которые обычно изучают в традиционной теории вероятностей.

В случае, когда предельной формы нет, остается вопрос о существовании предельной меры, которую можно понимать как "дышащую" предельную форму. Случай существования предельной формы соответствует тому, что предельная мера на формах сосредоточена в одной "точке", а именно, в предельной форме. Но может быть еще и так, что даже и предельной меры не существует. К счастью, в хороших задачах такие патологии пока не встречаются.

Ближайшие 10 минут я посвящу формулировке ответа для $d = 2$ и двум методам, приводящим к решению этой задачи. Моя цель, пожалуй, – проиллюстрировать разные методы. Ответ здесь несколько удивительный. Повторю, пока задача решена только для $d = 2$.

1.5. Случай $d > 2$. Для $d > 2$ единственное, что найдено – это асимптотика числа $\#CLP^d(n)$, что тоже является нетривиальной задачей. Такая оценка сначала была дана В. И. Арнольдом в 1980 г. (Функц. анал. 14:2, 1980). Он, правда, не знал, что до этого уже были работы на эту тему (R. Andrews). Потом эта оценка была уточнена. Точная по порядку оценка для произвольного d была получена в нашей работе с Имре Барань (GAFA, 2:1, 1992), и это – оценка только в логарифмическом порядке, к тому же без точной константы.

А для $d = 2$ можно дать точную оценку логарифма с константой. В 1980 г. я поставил задачу о предельной форме в том виде, как это было сформулировано выше. Было ясно, что оценка числа многогранников здесь пригодится. И именно она и позволила довести до конца решение задачи о предельной форме для $d = 2$.

Оказывается, логарифм числа выпуклых целочисленных многогранников объема n^d с точностью до аффинных преобразований (или, что тоже самое, число всех выпуклых многогранников в единичном кубе с вершинами на решетке с шагом $1/n$ без ограничения на их объем, который, очевидно, меньше единицы) растет как

$$n^{d(d-1)/(d+1)},$$

это – двусторонняя оценка (без указания констант). Для $d = 2$ известна даже константа: она равна $3\sqrt[3]{\zeta(3)}$, где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана. Незнание точной константы (если она есть) для $d > 2$ как раз и не дает возможности решить задачу для старших размерностей.

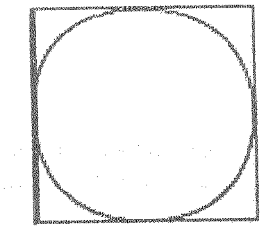

Рис. 1.

1.6. Полный ответ для $d = 2$. Он состоит в следующем: предельная форма ограничена кривой

$$\sqrt{1-|x|} + \sqrt{1-|y|} = 1$$

(рис. 1). Проще эту кривую можно описать так. Возьмем параболу $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, $x\in[0,1]$, и составим из четырех таких парабол кривую, изображенную на рис. 1.

Что здесь удивительного? Во-первых, совсем неясно, почему предельная форма должна существовать. Ведь мы начали с того, что взяли просто равномерное распределение на всех выпуклых многоугольниках. И совершенно непонятно, почему все они концентрируются около одной кривой.

Сейчас станет ясна некая причина для такого удивительного ответа. Заранее скажу, что ответ этот связан с тем, что мы с самого начала поставили задачу в квадрате, и вид ответа определяется ролью граничных условий. Если ставить свободную задачу, т. е. фиксировать только площадь, то ответ будет другой (случайный эллипс единичной площади, к этому мы еще вернемся; см. п. 1.17). Решение задачи в квадрате является *шагом* к решению свободной задачи.

1.7. Различные подходы к решению. Теперь покажем, как решается эта задача, и даже двумя способами. Первый способ был предложен мной и Имре Барань. Он связан с аналитикой, которая полезна сама по себе, а именно – с теорией *векторных разбиений*. После этого Синай взглянул на это с точки зрения статистической физике и, применяя идеи *большого канонического ансамбля*, дал другую схему решения.

Об этом еще пойдет речь дальше; метод большого канонического ансамбля изобретен очень давно физиками и очень полезен во всех таких вопросах. В теории вероятностей переход к большому ансамблю также употребляют, но называют *пуассонизацией*. Но и в комбинаторике он употребляется и называется *методом производящих функций* и т. д.

Давайте сначала поговорим про наш метод, в каком-то смысле элементарный, хотя он и использует серьезные, например, комплексные аналитические методы и формулу Коши.

1.8. Незамкнутые ломаные и векторные разбиения. Давайте немного изменим задачу. Прежде всего, вместо многоугольника, т. е. *замкнутой* выпуклой ломаной, рассмотрим *незамкнутую* ломаную. Поставим задачу так. Рассмотрим выпуклые ломаные с вершинами на решетке с шагом $1/n$, соединяющие точки $(0,0)$ и $(1,1)$. Задача состоит в том, чтобы определить, сколько таких ломаных, а затем – сказать, сосредотачиваются ли они около какой-то одной кривой или “размазываются” в какой-то области с некоторой вероятностью.

В чем здесь роль размерности 2? В том, что на плоскости, в отличие от многомерного и даже трехмерного случая, множество таких ломаных очень хорошо параметризуется.

Эта параметризация строится следующим образом. Вернемся на время к целочисленным решеткам, т. е. рассмотрим выпуклые ломаные с целочисленными вершинами, соединяющие точки $(0,0)$ и (n,n). С каждой ломаной можно сопоставить разложение вектора (n,n) вида
$$(n,n)=\sum(m_i,k_i),$$
где (m_i,k_i) – целочисленные векторы. (Суммирование здесь производится по координатам, т. е. $n=\sum m_i$ и $n=\sum k_i$.)

Это разложение – неупорядоченное; за порядком мы не следим. Дело в том, что если взять неупорядоченное разложение, а потом упорядочить по возрастанию угла, то тем самым из всех возможных разложений будет выбрано одно. Поэтому между классами эквивалентности разложений по всевозможным перестановкам слагаемых и выпуклыми кривыми есть взаимно однозначное соответствие; исключение – тот случай, о котором сейчас будет сказано. Фактически у нас есть то, что называется *разбиением*, только не для одного натурального числа, а двух чисел, т. е. *векторное разбиение*.

Может случиться, что на звеньях ломаной есть целые точки. Тогда упорядочение по углу не вполне определено – как упорядочить коллинеарные стороны? Так что, строго говоря, биекции нет: если звено ломаной содержит несколько целых точек, то непонятно, какие точки считать раньше. Чтобы исключить этот случай, давайте с самого начала считать, что $(m_i,k_i)=1$, т. е. числа m_i и k_i взаимно просты. Тогда проблема исчезает – целых точек нет, каждому слагаемому отвечает в точности одна сторона.

Векторные разбиения без пропорциональных слагаемых будем называть *строгими*. Получается биекция между выпуклыми кривыми и строгими (и неупорядоченными) разбиениями вектора (n,n) в сумму целочисленных векторов.

Это уже первый шаг. С него все и началось. Дальше вступает в игру комбинаторная теория разбиений, которая сейчас становится популярной; тогда она была не очень известной. Я о ней скажу два слова.

1.9. Комбинаторная теория разбиений. Что нам нужно? Нам нужно знать число выпуклых ломаных, т. е. число строгих разбиений. Пусть $p_2^{(\text{стр.})}(n,q)$ – число строгих разбиений вектора (n,q). Для $p_2^{(\text{стр.})}(n,q)$ есть производящая функция.

Но сначала напомним, что такое обычные *разбиения* натурального числа, и вспомним формулу Эйлера. Рассмотрим неупорядоченные разбиения числа n в сумму натуральных слагаемых: $n = n_1 + \dots + n_k$. Для функции $p_1(n) = p(n)$ есть знаменитая производящая функция

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n.$$

Это – стандартная тема и одна из основных формул комбинаторной теории чисел. Ее доказательство – несложное упражнение для школьников.

Как же выглядит формула в случае векторных разбиений? Оказывается, что она не намного сложнее и очень похожа на предыдущую:

$$\prod \frac{1}{1-x^k y^s} = \sum_{n,q=0}^{\infty} p_2(n,q)x^n y^q.$$

Это – формула для производящей функции *всех* двумерных векторных разбиений, а нам нужны только строгие разбиения. Разница в том, что в этом случае произведение берется не по всем, а только по взаимно простым k и s:

$$\prod_{(k,s)=1} \frac{1}{1-x^k y^s} = \sum_{n,q=0}^{\infty} p_2^{(\text{стр.})}(n,q)x^n y^q.$$

Это и есть нужная нам производящая функция.

Тем самым мы перешли в область теории асимптотических формул, метода Лапласа, метода перевала и т. д. Как найти асимптотику коэффициентов Тэйлора известной производящей функции? Для функций от одной переменной это – классическая тема, которую начали Харди и Рамануджан. Известно, что для $p(n)$ имеет место следующая асимптотика:

$$\ln p(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}\bigl(1+o(1)\bigr).$$

На самом деле, Харди и Рамануджан, а позже Радемахер, нашли весь асимптотический ряд. Это – знаменитая тематика. О ней, наверное, многие читали в воспоминаниях Харди и Литлвуда о Рамануджане (о том, как он угадал коэффициент $1/24$). Почитайте эти воспоминания, это – замечательный эпизод истории математики 20-го века, иллюстрирующий, как в нашей науке могут проявляться и появляться самые оригинальные таланты.

Для функций от $\geqslant 2$ переменных дело обстоит гораздо сложнее: асимптотика уже существенно зависит от соотношения между n и q. Если одной из этих переменных нет, то мы находимся в рамках случая одной переменной, а если $n = q$ (как у нас), то асимптотика будет совсем другая. В этом причина сложности и неразработанности метода перевала для многих переменных.

Я скажу только ответ. Он может быть получен сравнительно простым обобщением одномерного случая, поскольку нас интересует диагональная асимптотика. Более точно, этот ответ верен для области $\sqrt{q} \leqslant n \leqslant q^2$. К счастью, нам больше ничего не нужно.

Асимптотика такова:

$$\ln p_2^{(\text{стр.})}(n, q) = 3\sqrt[3]{\zeta(3)}(nq)^{1/3}\bigl(1 + o(1)\bigr).$$

Вот что дает обычная техника. Если $n = q$, то получается $Cn^{2/3}$, где C – константа. Показатель $2/3$ очень важен и его появление неслучайно – он не раз возникает в двумерной геометрии.

Аналитическая часть решена. Теперь мы знаем количество выпуклых кривых, соединяющих точки $(0, 0)$ и (n, n), и можем использовать этот результат для решения других задач. Задача, к которой мы переходим, даже чуть более общая, чем исходный вопрос о предельной форме. А именно, будет дан некий вариационный принцип, вытекающий из этой оценки. Будем искать кривую как решение вариационной задачи, а потом оправдывать, почему это – именно то, что нужно.

1.10. Глобализация задачи. Давайте модифицируем постановку исходной задачи. Просто рассмотрим произвольную выпуклую кривую γ, окружим ее ε-полоской и зададим вопрос: “Сколько выпуклых ломаных содержится в этой ε-полоске?”

Задача как бы глобализуется. Первоначально мы ничего не фиксировали, кроме начальной и конечной точек, т. е. решали в каком-то смысле локальную задачу. Поэтому если мы взяли не две далекие точки, а какой-то маленький квадратик, и спросили, сколько выпуклых кривых в этом маленьком квадратике, то ответ уже дан.

А теперь глобализуем задачу: считаем, что у нас есть какая-то кривая, и хотим выяснить, сколько выпуклых ломаных лежит в ее окрестности. Оказывается, что выписанная выше оценка немедленно дает ответ, который на первый взгляд выглядит совершенно удивительным. Во всяком случае, когда я провел вычисления и нашел эту формулу, то был очень удивлен. (Может быть, и потому, что по неграмотности не знал, что нечто подобное встречалось уже довольно давно. Впрочем, если бы и знал, – все равно это удивительно.)

1.11. Ответ. Он состоит в следующем. Пусть дана кривая γ (параметр не указываем, потому что ответ будет дан в инвариантной форме, не зависящей от параметризации кривой). Пусть $CLP_n(\gamma, \varepsilon)$ – количество выпуклых решеточных (с шагом $1/n$) ломаных в ее ε-окрестности. Оказывается, что если $\varepsilon \ll 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2/3} \ln CLP_n(\gamma, \varepsilon) = 3\sqrt[3]{\zeta(3)} \int\limits_{\gamma} \kappa(s)^{1/3} ds,$$

где $\kappa(s)$ – кривизна кривой как функция точки на кривой, s – натуральный параметр.

Что такое $\int_\gamma \kappa(s)^{1/3}ds$? Для кривой $y = f(x)$ это – просто $\int_0^1 f''(x)^{1/3}dx$. Это выражение в дифференциальной геометрии давно встречалось – насколько я понимаю, с 1920-х годов. Например, оно имеется в книге Бляшке “Курс дифференциальной геометрии”, почему-то не переведенной на русский язык. Оно называется *аффинной длиной* кривой.

Кстати, в многотомном американском учебнике дифференциальной геометрии Спивака аффинной дифференциальной геометрии посвящено страниц 20. Это совершенно особая геометрия: аффинная длина кривой выражается через вторую производную, кривизна – через четвертую производную, и всякие другие “ужасы”. На русском языке есть только трудно читаемая книга отца и сына Широковых, написанная в координатных традициях. Лучше читать книгу Бляшке. Там есть замечательная интерпретация аффинной длины в терминах площадей и огибающих.

И все же все это удивительно. Начали мы с целочисленной задачи, задачи о решетках, а получили выражение, которое появлялось в дифференциальной геометрии, где никаких решеток не предполагается, а аффинная длина возникает совершенно в другой связи.

1.12. Одна элементарная задача. Вот задача, показывающая, почему выскакивает кубический корень из второй производной. Мы должны глобальную задачу свести к локальной. Возьмем кривую, проведем касательные в двух точках, построим по ним параллелограмм, а затем сосчитаем, сколько в нем ломаных с рациональными вершинами. Но это то же самое, что найти количество таких ломаных в прямоугольнике, а оно нам уже известно – параметром служит площадь этого параллелограмма (или прямоугольника): ее легко подсчитать, и она выражается через вторую производную (и именно через кубический корень из второй производной – проверьте; иначе говоря, в ответ войдет интеграл от кубического корня из второй производной, т. е. аффинная длина).

Поэтому можно сказать, что $\int_\gamma \kappa(s)^{1/3} ds$, т. е. аффинная длина, определяет *метрику*, по отношению к которой всякая парабола, как и кривая $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, которую я рисовал в начале лекции, является геодезической. Поэтому мы решили задачу о геодезических в аффинной геометрии.

Кстати, обычная кривизна в точке дает евклидов, но не аффинный инвариант, а если взять интеграл от какой-то степени кривизны, то аффинным инвариантом будет только $\kappa(s)^{1/3}$. Поэтому можно было предвидеть, что если ответ на эту задачу в дифференциальных терминах существует, то он должен быть именно таким; никакого другого аффинно инвариантного функционала второго порядка нет.

1.13. Вариационная задача. Дальше можно было бы сказать так: “Мы вычислили асимптотику числа ломаных в окрестности любой дважды дифференцируемой кривой, а теперь давайте просто решим вариационную задачу, найдем максимум функционала – числа ломаных по всем кривым.” Это легко сделать, – функционал очень простой – и получится именно эта кривая. Но этого, разумеется, не достаточно для доказательства, поскольку мы с самого начала предположили, что искомая кривая – гладкая (C^2), т. е. у нее есть вторая производная. Почему какое-то количество многогранников не может концентрироваться около какой-нибудь негладкой кривой? Этот вопрос требует отдельного рассмотрения, и можно показать, что негладких кривых, около которых происходит накопление, нет, но мы не будем на этом останавливаться.

Последний вопрос тем более актуален, что ввиду теоремы Ярника (см. ниже) как раз не очень гладкие выпуклые кривые содержат много целых точек, во всяком случае, больше, чем гладкие. Тем не менее, предельная форма оказывается гладкой и даже алгебраической.

1.14. Теорема Ярника. Вся эта тематика связана со старыми задачами о числе целых точек на выпуклой кривой. Самая сильная теорема, известная на этот счет, получена в 1920-е гг. Ярником, учеником Ландау (Эдмунда – известного специалиста по теории чисел, а не Льва – знаменитого физика).

Согласно этой теореме существует кривая (почти C^2-гладкая – у нее вторая производная может быть бесконечной на нигде не плотном множестве), число точек решетки на которой равно как раз $n^{2/3}$ для бесконечного числа знаменателей n шага решетки.

Метод, которым решалась наша задача, позволяет результат Ярника чуть-чуть усилить. А именно, доказать, что существует кривая ровно класса C^2. Но оценка $n^{2/3}$ – точная: по Ярнику в классе гладких кривых показатель 2/3 увеличить нельзя.

Напротив, есть целая серия работ (Е. Бомбьери, В. Шмидт и др.), в которых показано, что с увеличением гладкости кривой число точек решетки на ней становится все меньше и меньше. Так, для C^3-гладких кривых оно не превосходит $n^{3/5}$, а для аналитических кривых – $n^{0,5+\varepsilon}$. Можно ли убрать ε – до сих пор не известно.

Легко видеть, что наша парабола $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ имеет для бесконечного числа знаменателей n как раз $\sqrt{n}$ точек. На то она и парабола. Но лучшей кривой пока не известно, скорее всего, парабола и здесь – оптимальная.

После того, как решена эта по существу локальная задача, уже нетрудно решить глобальную задачу. Здесь все получается так, как уже говорилось, и я продемонстрировал вам решение.

1.15. Другие задачи. Что же дальше? Здесь очень много интересных задач. Например, можно налагать дополнительные естественные ограничения на класс многоугольников – фиксировать рост числа вершин или евклидову длину (периметр и др.) и искать предельную форму в этих случаях. Видимо, описанные методы позволяют все это сделать, но пока никто этим не занимался. Можно (и нужно) изучать поведение *флюктуаций*, т. е. отклонений случайного многоугольника от предельной кривой. Для данной задачи это было сделано в последующих работах, равно как и исследование больших отклонений, о чем я еще скажу. Но для более общих задач вопрос остается открытым.

1.16. Многомерный случай. К сожалению, описанный метод решения задачи о предельной форме совершенно не годится для многомерного случая. Проблема – в отсутствии соответствующей геометрической параметризации. Мы воспользовались хорошей параметризацией выпуклых ломаных с помощью векторных разбиений, а также наличием хорошего выражения для производящей функции. А дальше изучалась производящая функция. Никакого способа параметризовать выпуклые многогранные поверхности (скажем, трехмерные) мне не известно. Это серьезный геометрический вопрос.

Постановка задачи та же самая: берем выпуклую поверхность Σ и смотрим, сколько выпуклых многогранников с вершинами на решетке лежит в ее ε-окрестности.

Есть гипотеза, что в ответе стоит аффинный инвариант поверхности:

$$\int\limits_{\Sigma} K^{(d-1)/(d+1)} ds,$$

где K – гауссова кривизна. (Заметим, что $(d-1)/(d+1)$ – единственный показатель, дающий аффинный инвариант.) Это – открытый вопрос. Но даже если предположить, что ответ – такой, решения соответствующей вариационной задачи никто не знает.

1.17. Исходная элементарная задача. Именно она была для нас с Барань первоначальным способом найти искомую кривую. Задача такая. Возьмем квадрат со стороной 1, проведем произвольную прямую, отсекающую его юго-западный угол, возьмем на ней точку x и построим два параллелограмма (рис. 2), площади которых обозначим Π_1 и Π_2. Требуется найти геометрическое

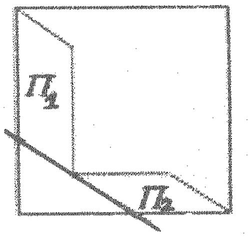

Рис. 2.

место точек x (на всевозможных прямых), для которых

$$\Pi_1^{1/3} + \Pi_2^{1/3} = 1.$$

Ответ таков: параметризуем прямые отрезками a_1 и a_2, отсекаемыми ими на осях. Тогда для прямых, содержащих интересующие нас точки x, имеем $a_1 + a_2 = 1$, и на каждой такой прямой лежит ровно одна искомая точка, а именно – точка $(x_1, x_2) = (a_1^2, a_2^2)$. А геометрическое место всех таких точек и есть та самая парабола $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

Два параллелограмма разлагают глобальную задачу на локальные. Я говорил о том, что мы решили локальную (линейную) задачу, а теперь все нужно склеить из малых параллелограммов. Склейка и состоит в построении этой кривой.

1.18. Роль краевых условий. Для задачи без краевых условий (когда мы фиксируем площадь многоугольника, но не требуем, чтобы он лежал в квадрате) ответ может удивить своей обыденностью по сравнению с предыдущей задачей. Как говорилось, можно фиксировать центр тяжести, закрепив его в начале координат. Оказывается, буквально – одной предельной формы нет, вместо нее будет распределение на всех эллипсах данной площади. Но если вспомнить о группе $SL_2(\mathbb{Z})$, действующей на множестве эллипсов, сохраняя их площадь, то мы получим одну орбиту этого действия и ее представителем можно считать круг единичной площади. Поэтому роль граничных условий здесь очень существенна.

Более того, Барань занялся задачей, из этого естественно вытекающей. Давайте вместо квадрата возьмем любой многоугольник и поставим для него ту же самую задачу о типичной форме вписанного целочисленного многоугольника. Оказывается, что в ответе получится фигура, ограниченная выпуклой кривой, склеенной из дуг той же самой параболы, и еще, возможно, каких-то прямолинейных кусочков (рис. 3). Эта парабола всегда будет строительным материалом для общего решения.

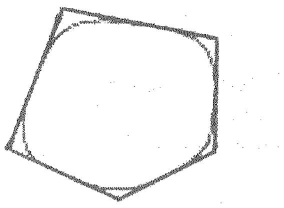

Рис. 3.

§2. Предельная форма разбиений натуральных чисел (и диаграмм Юнга)

Эта тематика, в общем, – более ранняя (1970-е гг.). Она возникает и в связи с разбиениями натуральных числа, и в связи с представлениями симметрической группы. Кроме того, она имеет прямое отношение к статистической физике идеального газа. О чем идет речь? Теперь вместо выпуклых многоугольников или многогранников рассмотрим диаграммы Юнга.

2.1. Диаграммы Юнга. Диаграмма Юнга – это тоже некая решеточная конфигурация, устроенная как подграфик монотонной кусочно постоянной функции. В разных странах – разные традиции изображать диаграммы Юнга (рис. 4). По этому поводу в своей известной книге о симметрических функциях Иан Макдональд, делая различие между английской и французской интерпретацией, пишет, что француз, для того чтобы читать его книгу, должен перевернуться на 180° (стать вверх ногами) и смотреть на книгу в зеркало. У нас часто используются диаграммы, повернутые на 45°; иногда это – самый правильный способ.

Число диаграмм Юнга с n клетками равно $p(n)$, потому что если интерпретировать строки диаграммы как слагаемые в разбиении, то получится неупорядоченное разбиение

$$n = n_1 + n_2 + \cdots .$$

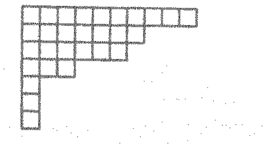

Рис. 4

Множество всех диаграмм Юнга с n клетками обычно записывают так:

$$\mathcal{P}_n = \{\lambda, \lambda \vdash n\}.$$

На этом множестве есть много различных естественных статистик. Разумеется, первая естественная статистика – равномерная. И именно с нее я начал занятия этими вопросами. Но еще раньше, правда, немножко в другом контексте, этим занималась школа Эрдёша. Там были получены очень глубокие и интересные асимптотики. Различие заключалось в том, что они, как правило, изучали какой-нибудь один функционал.

2.2. Теорема Эрдёша. Самая замечательная теорема Эрдёша (Erdős, Lehner, 1940 г.) состоит в следующем. Поскольку разбиения – неупорядоченные, давайте их упорядочим и зададим вопрос: "Какова асимптотика максимального слагаемого?" Если считать, что распределение – равномерное на всех разбиениях длины n, то размер максимального слагаемого можно взять в качестве функционала. Ответ, который нам вскоре понадобится, таков: размер[1] максимального слагаемого растет как $C\sqrt{n}\ln n$; константу C Эрдёш и Ленер тоже вычислили.

Тут имеет место эргодический случай: если отбросить $\varepsilon p(n)$ разбиений, то на всех остальных максимальное слагаемое, деленное на $C\sqrt{n}\ln n$, будет отличаться от 1 меньше, чем на ε.

Логарифм здесь очень существен. Сейчас мы увидим, как это связано с задачей о предельной форме.

2.3. Задача о предельной форме. Эта задача была, видимо, впервые поставлена мной, примерно лет 20 назад. Вопрос такой:

[1] Равно как и число слагаемых, потому что равномерная статистика симметрична относительно диагонали, а у диаграммы Юнга одна сторона – размер максимального слагаемого, а другая сторона – число слагаемых.

какая после нормировки[2] будет предельная форма у случайного разбиения?

Ее решение можно вывести из некоторых оценок венгерских математиков, но можно получить проще и более убедительно. Ответ: предельная форма задается уравнением

$$e^{-\pi x/\sqrt{6}} + e^{-\pi y/\sqrt{6}} = 1. \qquad (2.3.1)$$

Это – лишь один из многочисленных примеров. На самом деле моими учениками было решено большое количество задач с разными статистиками и в частности рассмотрен класс так называемых *мультипликативных статистик*. Я о нем скажу несколько слов, потому что он связан со статистической физикой идеального квантового газа.

2.4. Числа заполнения и мультипликативные статистики. Возьмем равномерное распределение на пространстве разбиений $\mathcal{P}_n$. Как ввести на $\mathcal{P}_n$ координаты? Тут очень много вариантов.

Давайте, например, возьмем разбиение λ и рассмотрим его характеристики, называемые *числами заполнения*. Пусть $r_k(\lambda)$ – количество слагаемых, равных k. Это просто кратности равных слагаемых, разбиение теперь будем параметризовать этими числами; ясно, что $\sum_k kr_k = n$.

Затем, следуя традициям статистической физики, перейдем от малого ансамбля к *большому*, т. е. вместо того, чтобы рассматривать диаграммы с n клетками при фиксированном n, сразу рассмотрим диаграммы с произвольным (случайным) количеством клеток. Иначе говоря, возьмем объединение всех множеств диаграмм с фиксированным количеством клеток; на множестве диаграмм с n клетками возьмем равномерное распределение (при данном n) и эти равномерные распределения смешаем, например, с *геометрической* вероятностью, пропорциональной x^n, где $0 < x < 1$.

Большим каноническим ансамблем назовем пространство $\mathcal{P} = \bigcup_n \mathcal{P}_n$ с той или иной мерой μ на нем, индуцирующей на малом ансамбле равномерную меру. С точки зрения статистической физики число n – аналог энергии, поэтому на разбиение числа n нужно смотреть, как на разложение энергии конфигурации по энергиям отдельных частиц.

[2]Понятно, какую нормировку следует взять: нужно всё поделить на $\sqrt{n}$.

Назовем статистику (= меру) μ *мультипликативной*, если числа заполнения $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$, ... независимы в вероятностном смысле относительно μ, как функции на большом ансамбле, т. е. как случайные величины на большом ансамбле с мерой μ.

Заметим по ходу дела, что асимптотически кратности типичных слагаемых типичного разбиения близки к единице в любой из мультипликативных статистик. Это утверждение можно сделать точным.

2.5. Распределения. Теперь можно спросить, каковы распределения у каждого из чисел r_i в отдельности (какова по мере μ вероятность того, что $r_i(\lambda) = k$). Запишем

$$\operatorname{Prob}\{r_i(\lambda) = k\} = c_i x^{ik},$$

где $x \in (0, 1)$ – некоторый параметр. Ряд, образованный этими вероятностями, есть производящая функция для распределения вероятностей числа r_i.

А если мы хотим найти вероятность диаграммы λ, то в силу нашего предположения о независимости чисел заполнения, можно сказать, что производящая функция для этих вероятностей, как нетрудно видеть, будет просто произведением:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^k)^{b_k}}.$$

Нетрудное упражнение состоит в том, что все мультипликативные распределения сводятся, по существу, к выбору последовательности b_k. Равномерная статистика – это $b_k \equiv 1$.

Этот класс статистик, разумеется, далеко не исчерпывает всех интересных случаев. Приведенная формула фактически задает то, что в физике называют *бозе-распределением* (точнее, *статистикой Бозе–Эйнштейна*). Но можно рассматривать разбиения с различными слагаемыми – вообще без кратностей, равномерная мера на них называется *статистикой Ферми–Дирака*. Тогда производящие функции будут такие же, но вместо $1 - x^k$ в знаменателе нужно написать $1 + x^k$ в числителе.

Этими двумя вариантами исчерпываются распределения, изучаемые в статистической физике квантового идеального газа. Сюда вкладывается статистика идеального газа при разных размерностях. Для идеального газа размерности d, а коэффициент b_k

– это знаменитая функция Якоби $j_d(k)$, равная количеству представлений числа k в виде суммы d квадратов. Таким образом, если в качестве b_k взять функцию Якоби, то получится статистика идеального бозе- или ферми-газа в размерности d.

2.6. Ответ. Я приведу только ответ на вопрос о предельной форме для общей мультипликативной статистики. Он содержится в моей статье, опубликованной несколько лет назад в “Функциональном анализе”, т. 30:2 (1996).

Оказывается, что предельные формы здесь можно вычислить, и даже в некоторых случаях все можно проинтегрировать до конца, а в других случаях – написать ответ в виде интеграла. При этом о последовательности b_k нужна лишь очень скромная информация, а именно – один-единственный параметр.

Напишем ряд Дирихле

$$\sum \frac{b_k}{k^s}$$

и пусть $\alpha > 0$ – первый вещественный полюс этой функции от s. Только он и нужен: предельная форма – настолько грубая вещь, что зависит лишь от параметра α. Этот факт следует из теоремы Мейнардуса (см. книгу Эндрюса “Теория разбиений”).

Прежде чем говорить об ответе, нужно еще понять, как масштабировать диаграмму, т. е. какое брать сжатие. Оказывается, что по оси y нужно взять масштаб $n^{-(1+\alpha)/(2+\alpha)}$, а по другой оси – дополнительный масштаб $n^{(1+\alpha)/(2+\alpha)}$, чтобы площадь подграфика была равна 1. Для нормированной диаграммы рассмотрим функцию

$$n^{-(1+\alpha)/(2+\alpha)} \sum_{k \geqslant tn^{1/(2+\alpha)}} r_k(\lambda) = \phi_\lambda(t).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, что для почти всех диаграмм λ размера n с этой статистикой график функции $\phi_\lambda(t)$ будет близок к графику функции

$$C_\alpha(t) = \int_t^\infty u^\alpha \frac{e^{-cu}}{1 - e^{-cu}}\, du;$$

константа c определяется тем условием, что интеграл от этой функции равен 1. Это и есть выражение для предельной формы. Для $\beta = 0$ получается кривая (2.3.1), о которой уже говорилось.

2.7. Задача с фиксированным числом слагаемых. Это все опубликовано в 1996 г. И вот совсем недавно мы с моим учеником Ю. В. Якубовичем занялись более реальной (в смысле статистической физики) задачей. А именно – задачей с фиксированным числом слагаемых. Собственно, в статистической физике фиксируют не только энергию, но и число частиц. Это означает, что мы рассматриваем не просто разбиения данного числа, но и говорим, сколько в разбиении слагаемых. Тут возникают удивительные вещи. Я не знаю, задумывались ли над ними раньше.

Возьмем равномерное распределение на всех разбиениях числа n на m слагаемых. В принципе, можно брать разные m и n. Можно считать, что m есть функция от n, и спрашивать, какие будут предельные формы для

$$\mathcal{P}_{n,m} = \{\lambda : \lambda \vdash n,\, \#\lambda = m\}$$

при подходящем масштабировании. Оказывается, содержательные ответы появляются, если m растет как $\sqrt{n}$.

Более точно: если $m = o(\sqrt{n})$, то предельная форма одинакова для всех разбиений, независимо от параметров. Это, по-видимому, – малосодержательная часть. А если $m = c\sqrt{n}$, то результат зависит от коэффициента c, и это – очень важное обстоятельство, поскольку именно такое соотношение рассматривают в статфизике в теории идеального газа.

Этот же случай неявно рассматривал Эрдёш, а позже его школа, еще 50 и более лет назад безо всякой связи со статфизикой, и заметьте, почти в то же самое время, когда теория квантового идеального газа создавалась физиками и вставала на ноги. Это – еще один удивительный пример почти одновременности и независимости появления фактически одинаковых концепций в математике и физике, а также пример того, как поздно эта общность становится понятной – через много лет. Более значительные примеры: квантовая механика – теория операторов, расслоения – калибровочные поля и др.

2.8. Теорема непрерывности. Итак, интересен случай, когда $m = c\sqrt{n}$, где c – константа. Формулы здесь сложнее, но они найдены. Получается некое семейство распределений. Сейчас доказана следующая теорема непрерывности: если $c \to \infty$, то эти предельные формы сходятся к той предельной форме, которая у нас получена, когда никакого ограничения на число слагаемых нет.

2.9. Связь с теоремой Эрдёша. Отметим, что теорема Эрдёша (без константы) в существенном вытекает из формулы (2.3.1). Именно из того, что в (2.3.1) стоит экспоненциально возрастающая функция, в формуле Эрдёша получается логарифм. Например, для ферми- и для бозе-газа в случае размерности > 2 эта кривая (задающая предельную форму) ограничена в нуле. Это означает, что, с точностью до множителя, рост числа слагаемых есть $\sqrt{n}$.

2.10. Конденсация Бозе–Эйнштейна. Очень интересно, что с такой точки зрения можно объяснить явление конденсации Бозе–Эйнштейна. Если вы зафиксируете число слагаемых бо́льшим, чем тот предел, который определен в задаче с произвольным числом слагаемых, то окажется, что единственный способ набрать нужное число слагаемых – это взять дополнительно нулевые слагаемые. Это и есть конденсация Бозе–Эйнштейна, поскольку нулевые слагаемые – это частицы с нулевой энергией (подробнее – см. мою статью в Успехах мат. наук. 1997. Вып. 5). Иначе говоря, если вы заказали некоторое количество слагаемых, а их неоткуда получить, то эти слагаемые должны быть нулевые. Это теоретико-числовое объяснение того, что такое конденсация Бозе–Эйнштейна. Она как раз и состоит в том, что при некотором значении параметра есть частица с нулевым импульсом. Это означает, что вы не можете взять нужное число слагаемых по соображениям вероятностного характера. Но для того, чтобы все-таки получить данное число, вы должны добавить нулевые слагаемые.

2.11. Распределение Планшереля. По этому поводу можно было бы сказать еще очень многое. Я хочу только заметить, что самый популярный сейчас случай, связанный с разбиениями, – это как раз не мультипликативные статистики, а *распределение Планшереля*, которое мы с покойным С. В. Керовым (1946–2000) начали изучать в 1975 г. (независимо Стенли, Шепп-Логан). Это распределение на диаграммах приходит из теории представлений симметрических функций и из многих других задач. Оно уже не такого характера; неверно, что для него числа заполнения независимы. Поэтому и координаты разбиений надо брать другие.

Я не буду об этом говорить, потому что тема эта очень популярна и модна и о ней надо говорить долго. Оказывается, что распределение Планшереля имеет прямое отношение к распределению спектра случайных матриц и т. д., и это тема отдельного доклада.

2.12. Rate-функции. Вспомним теперь кривую $e^{-\pi x/\sqrt{6}} + e^{-\pi y/\sqrt{6}} = 1$ (2.3.1), которую мы уже рисовали, и зададим тот же вопрос, что и для выпуклых многоугольников: “Если взять какую-то кривую, подсчитать количество диаграмм Юнга, лежащих в ее ε-окрестности, взять логарифм, поделить на нужную степень n, то какой функционал получится для этой кривой?” В теории вероятностей это называется rate-функция (rate-function), в физике – *действие*, *энтропия*, *поверхностное натяжение*, и т. д. А сам метод в теории вероятности называется *методом больших уклонений* (LDP – Large Deviation Principle). Этот функционал отвечает за многое. В уже решенной нами задаче он очень интересен. Рассмотрим такое вероятностное распределение на двух точках, зависящее от значения производной некоторой функции:

$$p_f(x) = \frac{|f'(x)|}{1+|f'(x)|}, \quad q_f(x) = \frac{1}{1+|f'(x)|},$$

и возьмем интеграл по кривой от энтропии этого распределения:

$$\int_0^\infty \big(p(x)\ln p(x) + q(x)\ln q(x)\big)\,dx.$$

Это и есть то, что является в данном случае rate-функцией. Если умножить ее на $\sqrt{n}$ и взять экспоненту, то получится асимптотика для числа диаграмм в окрестности графика функции f.

§3. Трехмерные задачи

Перейдем к трехмерным задачам; трехмерным в том смысле, что теперь будут рассматриваться трехмерные диаграммы Юнга. Это – самый интересный и новый пример. Эта область совершенно не изучена. На мой взгляд, по этой теме есть только две работы, и еще одна появилась совсем недавно; первая из двух (R. Kenyon–R. Cerf) будет скоро опубликована, а вторая (моя), хотя и сделана ранее, – несколько лет назад, – тоже еще не опубликована. В недавней работе А. Окунькова и Н. Решетихина сделан замечательный вклад в эту тематику.

Для трехмерных диаграмм Юнга есть два термина: *мавзолей* и *небоскреб*. На Западе популярнее термин “небоскреб”, а у нас – “мавзолей”.

3.1. Трехмерные диаграммы Юнга. Что такое трехмерная диаграмма Юнга? Это снова образование на решетке, представляющее собой подграфик финитной ступенчатой функции. Концы ступенек находятся в целых точках, и эта функция убывает в положительных направлениях осей x и y.

Есть и другой, более популярный, способ объяснить, что такое трехмерные диаграммы Юнга. Он называется *плоские разбиения*. Вы снова фиксируете натуральное число n и разлагаете его в сумму слагаемых, занумерованных двумя индексами: $n = \sum n_{ij}$. Эти индексы (i, j) бегают по по клеткам обычного разбиения на двумерной (нижней) плоскости. Слагаемые и будут высотами крыши “мавзолея” в точках (i, j); Таким образом плоское разбиение, в свою очередь, занумеровано обычными разбиениями. Но я предпочитаю говорить не о плоских разбиениях, а о трехмерных диаграммах, хотя эти термины означают одно и то же.

3.2. Постановка задачи. Вопросы здесь те же. Можно взять все плоские разбиения числа n, рассмотреть равномерную статистику на них и поставить вопрос о предельной форме. Этот вопрос решен. Ответ совсем недавно получили Ричард Кеньон из Франции с соавтором Рафаэлем Серфом. Но этому предшествовала целая серия усилий. До этого я получил некие характеристики этой поверхности. Эта информация, может быть, менее интересна, чем сам метод, которым я ее получил и о котором хочу немного рассказать. Он совсем не похож на то, о чем говорилось выше.

3.3. Статистики на диаграммах. Еще раз подчеркну, что на диаграммах есть много разных статистик. Может быть, равномерная статистика – не самая интересная. Есть, например, так называемые *центральные меры*, про которые вообще ничего не известно, но которые важны для приложений. Однако давайте говорить только о равномерной статистике.

Проблема, как всегда, в том, чтобы параметризовать интересующие нас объекты. Если есть хорошая параметризация, то можно ставить вопрос о предельной форме и вообще изучать эти объекты.

3.4. Вариационный подход к решению. Есть два подхода к решению этой задачи. Первый – вариационный. Его использовал Ричард Кеньон. Это – просто обобщение того, о чем говорилось выше. В этом случае уравнение Эйлера столь сложно, что непосредственно его решить не удается. Кроме того, эта задача – условная: нужно еще добавить условие того, что функция убывает и объем подграфика равен 1. Ее решение получено Кеньоном совсем по-другому.

3.5. Метод Вулфа. Есть так называемый метод Вулфа, физика начала века, – он был изучен нашими специалистами во главе с покойным Р. Л. Добрушиным. Этот метод позволяет решать следующую задачу. У вас есть функция на единичной сфере. Ее значение в данной точке сферы будем рассматривать как функцию от нормали к выпуклой поверхности (поверхностное натяжение). Поставим вариационную задачу о минимуме интеграла от этой функции от нормали к поверхности в классе всех гладких выпуклых поверхностей. Метод Вулфа позволяет избежать решения вариационной задачи, а подойти к вопросу с чисто геометрической точки зрения (см. недавнюю статью С. Шлосмана в “Успехах”).

И в нашем случае решение тоже можно получить усовершенствованным методом Вулфа. Замечательно, что задача связалась с некоторым деликатным вопросом о классической трехмерной модели Изинга. Кеньон и Серф проделали все это для трехмерной задачи. И оказалось, что в трехмерном случае (именно в трехмерном; про четырехмерный случай ничего не известно) rate-функция похожа на ту, которая получалась в двумерном случае; разница лишь в том, что здесь нужно привлекать нормаль к поверхности, а в двумерном – rate-функция строилась по проекции касательной. В результате получается поверхность, вид которой я предсказал, исходя из соображений, которые сейчас будут изложены. Эта поверхность тесно связана с кривыми, появлявшимися при решении задачи о предельных формах диаграмм Юнга с равномерной статистикой. В каком-то смысле она составлена из таких кривых.

3.6. RSK-соответствие. Я сам подходил к этой задаче с чисто комбинаторной точки зрения. На мой взгляд, она дает более глубокую информацию. Но и получить ее и довести свое решение до явных формул трудней.

Я использовал RSK-соответствие (Робинсон–Шенстед–Кнут), которое считаю одним из важнейших достижений современной комбинаторики; его нужно популяризовать среди студентов. Робинсон – классик теории представлений симметрической группы, работавший в 1930–50 гг., Шенстед – американский комбинаторик, известный своей теоремой 1960 г., а Доналда Кнута знают все на свете. Он – автор TeX'а, книг "Искусство программирования" и массы других вещей. Он отличный органист (дома у него орган), а также инициатор и редактор книги "3:16" – коллективного комментария к стихам с этим номером во всех книгах Библии.

RSK-соответствие дает процедуру получения таблиц Юнга с помощью подстановок, т. е. опять связано с вопросом о параметризации. Это – соответствие между подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ и парами таблиц Юнга одинаковой формы. *Таблица Юнга* – это диаграмма Юнга с n клетками, заполненная натуральными числами от 1 до n возрастающими в том и в другом направлении. RSK-соответствие – очень непростое, у него вовсе нет очевидного алгебраического смысла, но оно очень глубокое и позволяет многое понять. Например, если на подстановках взять равномерное распределение, то на диаграммах получится распределение Планшереля.

Согласно формуле Бернсайда

$$n! = \sum (\dim \lambda)^2,$$

где суммирование ведется по всем неприводимым представлениям λ. RSK-соответствие – это явная биекция, материализующая тождество Бернсайда; она, разумеется, связана с базисом Гельфанда–Цейтлина. А именно, у вас есть две диаграммы одинаковой формы, а число таблиц такой формы – это размерность соответствующего неприводимого представления. Поэтому если вы берете две одинаковые диаграммы с разными таблицами, то, взяв общее число таких пар таблиц, и просуммировав его по всем диаграммам, вы получите порядок группы.

3.7. Обобщение RSK-соответствия. Кнут и Бендер частично обобщили RSK-соответствие на трехмерный случай и дали сложный, но эффективный способ, позволяющий получать мавзолеи из двух таблиц Юнга или из целочисленной матрицы. Затем опять появляется большой канонический ансамбль и т. д. Это их обобщение того, что делает RSK-соответствие, очень специфично и годится только для трехмерного случая.

Они расширили RSK-соответствие на случай, когда в таблице стоят не обязательно различные числа, т. е. таблицы уже не стандартные, а *полустандартные*. Фактически Кнут и Бендер построили соответствие между мавзолеями и матрицами (a_{ij}), элементы которых – неотрицательные целые числа, нестрого возрастающие по строкам и строго возрастающие по столбцам, и удовлетворяющие соотношению $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(i+j-1)=n$.

Старое RSK-соответствие сюда входит так: это – матрицы подстановок, у которых в каждой строке и в каждом столбце по одной единичке, поэтому условие стандартности выполнено автоматически.

Таким образом, между прочим, эта статистика дает новую статистику и на самих разбиениях.

3.8. Формула Мак-Магона. RSK-соответствие дает самое простое доказательство замечательной формулы Мак-Магона – выдающегося английского комбинаторика – для $q(n)$ – числа мавзолеев с n клетками. (Я ведь еще не сказал, чему равно $q(n)$.)

Это – интересная история. Впервые эту формулу доказал Мак-Магон сто лет назад. Формула такая:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} q(n)x^n.$$

Доказательство Мак-Магона было малопонятным. Потом в 1920–30 гг. появлялись все более и более простые доказательства. Об этом можно прочесть в книге Эндрюса.

В комбинаторике принят такой принцип: полное понимание той или иной комбинаторной формулы наступает тогда, когда вы имеете “биективное” доказательство. У двух разных множеств одинаковое число элементов, если между этими множествами есть биективное соответствие. Иногда это соответствие найти трудно. Это – как раз такой случай.

Оказывается, самое простое доказательство формулы Мак-Магона получается из RSK-соответствия (это заметил Ричард Стенли (R. Stanley)). Для этого надо воспользоваться тем, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^k} = \prod_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{i+j-1}}.$$

Но эта простота, разумеется, – по модулю совершенно нетривиального RSK-соответствия.

Отсюда сразу можно вывести, что высота мавзолея растет как $c\,n^{1/3}\ln n$, а также другие замечательные свойства предельной формы трехмерных диаграмм Юнга с равномерной статистикой. И вот совсем недавно Окуньков и Решетихин по новому решили ту же задачу, используя мощные методы современной матфизики (бозон-фермионное соответствие, меры Шура и многое другое). В этом пункте наша тема соприкасается еще с дюжиной других.

3.9. Многомерный случай. Нет ни малейшего представления, что будет в других размерностях. Мак-Магон предположил, что для четырехмерных мавзолеев производящая функция имеет вид

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^k)^{\binom{k}{2}}}.$$

Но это неверно, как обнаружилось только в 1960-е гг.

До сих пор нет верной и удобной формулы для четырехмерных диаграмм, а может быть, ее нет и в природе. Однако есть близкие объекты, которые, возможно, правильнее считать многомерными обобщениями диаграмм Юнга, и которые теснее связаны с простыми алгебрами Ли. Их тоже следует изучать и искать для них соответствующие производящие функции, предельные формы и т.п. Но об этом – в другой раз.

Автор благодарит В. В. Прасолова и К. П. Кохася за помощь в подготовке лекции к печати, а также редактора за тщательное редактирование рукописи.

Vershik A. M. Limit forms of typical geometric configurations and their applications.

A popular survey of the subject indicated in the title.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 октября 2001 г.