Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 280, 2001 г.

С. В. Буяло

МЕТРИКИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ НА ГРАФ-МНОГООБРАЗИЯХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НА ГРАФАХ

В. А. Залгаллеру к 80-летию

§0. Введение

Цель настоящей работы – установить точную аналогию между метриками неположительной секционной кривизны на трехмерных граф-многообразиях (в дальнейшем мы называем их NPC-*метриками*), с одной стороны, и взаимодействием электромагнитного поля ∇ со скалярным заряженным полем ξ, с другой. Эта аналогия совершенно неожиданна, однако различные геометрические эффекты, связанные с указанными метриками, совпадают с эффектами, возникающими в дискретной модели взаимодействия полей ∇ и ξ.

NPC-метрики на граф-многообразии имеют довольно специальную структуру, и наиболее существенная геометрическая информация, "закодированная" в такой метрике, описывается конечным числом параметров. Эти параметры удовлетворяют некоторому уравнению согласованности, аналогичному уравнению Лапласа на графах. Однако здесь имеются существенные отличия от уравнения Лапласа, и в поисках континуального аналога уравнения согласованности мы приходим к уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия

$$S(\nabla,\xi)=\mathrm{YM}(\nabla)+E_{\nabla}(\xi)-m^2\|\xi\|^2,$$

описывающего взаимодействие комплекснозначного скалярного поля ξ и электромагнитного поля ∇, где $\mathrm{YM}(\nabla)=\|\nabla\circ\nabla\|^2$ – действие Янга–Миллса поля ∇, $E_{\nabla}(\xi)=\|\nabla\xi\|^2$ – энергия, а m – масса поля ξ. Поле ξ есть сечение тривиального линейного расслоения $\mathcal{E}$ над графом, а ∇ – связность на $\mathcal{E}$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты 96-01-00674 и 96-15-96075, и CRDF, грант RM1-169.

Для дискретного пространства, такого, как граф (т.е. набор вершин и набор ребер между ними), связность ∇, ковариантный дифференциал $\nabla\xi$ и кривизну $\nabla \circ \nabla$ можно определить в рамках спектрального исчисления А. Конна [5]. Это исчисление и служит основой для подлежащей описанию аналогии между геометрическими и физическими феноменами.

Предлагаемый подход к проблеме дискретизации также открывает новые удивительные особенности уравнений Эйлера–Лагранжа, такие, как механизм исключений и вырождений (см. §4) и необходимость отказаться от закона сохранения электрического заряда для типичных метрик (этот закон восстанавливается при переходе к классическому пределу при $\Delta s \to 0$), см. 2.9 и 2.10.

Благодарности. Автор благодарен покойному Л. А. Халфину за внимание к настоящей работе и ценные замечания, В. Л. Кобельскому за многочисленные обсуждения и В. Шрёдеру за приглашение в Университет Цюриха, где эта работа была закончена, и за гостеприимство.

§1. Уравнение согласованности

1.I. Мы рассматриваем замкнутое ориентируемое (и ориентированное) граф-многообразие $M = \bigcup_{v \in V} M_v$, состоящее из конечного множества V блоков $M_v = F_v \times S^1$, где F_v – компактная поверхность с краем, отличная от диска и кольца. Блоки M_v склеиваются вдоль краевых торов $T_w = (\partial F_v)_w \times S^1$, $w \in \partial v$, где ∂v – множество компонент края блока M_v. По поводу подробностей о граф-многообразиях см. приложение А.

Всякая NPC-метрика на многообразии M локально расщепляется вдоль каждого блока M_v в метрическое произведение $ds_F^2 + dl^2$, где l – координата вдоль сомножителя S^1, а ds_F^2 – метрика неположительной кривизны на поверхности F_v (глобального расщепления вдоль M_v может не быть, и, как правило, его не существует). Кроме того, все слои $f \times S^1$, $f \in F_v$, являются замкнутыми геодезическими одной и той же длины l_v, а краевые торы всегда можно выбрать плоскими и вполне геодезическими.

Наиболее существенная информация о метрике заключена в наборах длин слоев $\{l_v\}_{v \in V}$ блоков M_v и углов $\{\omega_w\}_{w \in W}$ между слоями смежных блоков M_v, $M_{v'}$ на краевом торе T_w, $w = (v, v')$, и, следовательно, информация эта описывается конечным множеством параметров. Множество блоков V и множество краевых торов W, соответственно, представляют собой множество вершин и множество ориентированных ребер графа Γ, который называется *графом многообразия* M. Здесь вершина $v \in V$ является начальной для ребра $w \in W$ тогда и только тогда, когда $w \in \partial v$. (Обозначение: $v = \partial_- w$.)

Мы обозначаем через $\partial_+ w$ конечную вершину ребра w. Не исключен случай, когда $\partial_- w = \partial_+ w$, т.е. различные компоненты края блока M_v могут склеиваться друг с другом. В этом случае ребро w является петлей в Γ. Однако мы требуем, чтобы для любого ребра $w = (v, v') \in W$ слои S^1_v, $S^1_{v'}$ соответствующих смежных блоков M_v, $M_{v'}$ были не гомотопны на краевом торе T_w.

Наборы длин $\{l_v\}_{v \in V}$ и углов $\{\omega_w\}_{w \in W}$ соответствуют некоторой NPC-метрике на M тогда и только тогда, когда они удовлетворяют *уравнению согласованности*

$$k_v l_v - \sum_{w \in \partial v} \frac{\cos \omega_w}{b_w} l_{\partial_+ w} = 0, \quad v \in V, \tag{0.1}$$

причем $l_v > 0$ для всех $v \in V$ и $0 < \omega_w = \omega_{-w} < \pi$ для всех $w \in W$. Коэффициенты $k_v \in \mathbb{Q}$ и $b_w = b_{-w} \in \mathbb{N}$ являются топологическими инвариантами многообразия M (см. приложение А). В таком случае будем говорить, что наборы $\{l_v\}_{v \in V}$ и $\{\omega_w\}_{w \in W}$ определяют *изометрическое состояние* системы (0.1).

(1.2) Примеры. (a) Диполь. Граф Γ состоит из двух вершин v_0 и v_1, соединенных ребром. Уравнение согласованности имеет вид

$$\begin{aligned} k_0 l_0 - \frac{\cos \omega}{b} l_1 &= 0, \\ -\frac{\cos \omega}{b} l_0 + k_1 l_1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Изометрические состояния существуют в следующих случаях:

(i) $k_0 = k_1 = 0$. Тогда $\omega = \pi/2$, а отношение l_0/l_1 может быть произвольным;

(ii) $0 < k_0 k_1 b^2 < 1$. Тогда $\cos^2 \omega = k_0 k_1 b^2$, $\operatorname{sgn}(\cos \omega) = \operatorname{sgn}(k_j)$ и

$$\frac{l_0^2}{l_1^2} = \frac{k_1}{k_0}.$$

В дальнейшем этот пример играет ключевую роль.

(б) Монополь. Граф Γ является петлей с вершиной v. Уравнение согласованности (0.1) имеет вид

$$\left(k - \frac{2}{b}\cos\omega\right) l = 0 \tag{1.2.2}$$

для соответствующих коэффициентов k и b. Изометрические состояния существуют тогда и только тогда, когда $|k|b < 2$. В таком случае $\cos\omega = kb/2$, а $l > 0$ – произвольно.

1.II. Сравнение с уравнением Лапласа на графах. Лапласиан $\Delta\colon L^2(V) \to L^2(V)$ на графе $\Gamma = \Gamma(V, W)$ определяется как

$$\Delta f(v) = f(v) - \frac{1}{|\partial v|} \sum_{w \in \partial v} f(\partial_+ w),$$

где $L^2(V)$ – (вещественное) гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f, f' \rangle = \sum_{v \in V} |\partial v| f(v) f'(v).$$

Тогда $\Delta = d^* d$, дифференциал $d\colon L^2(V) \to L^2_{\mathrm{odd}}(W)$ задается формулой $df(w) = f(\partial_+ w) - f(\partial_- w)$, где $L^2_{\mathrm{odd}}(W)$ – гильбертово пространство нечетных функций на W со скалярным произведением

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{w \in W} \phi(w) \psi(w).$$

Решения уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ минимизируют действие $E(f) = \|df\|^2$.

Уравнение согласованности (0.1) выглядит, как уравнение Лапласа “с переменными коэффициентами”. Однако множители $\cos\omega_w$ существенно меняют свойства решений и указывают на скрытое присутствие связности ∇, т.е. электромагнитного поля: в дальнейшем станет ясно, что обычный дифференциал d нужно заменить на ковариантный дифференциал ∇.

Напомним, что электромагнитное поле описывается как связность ∇ на главном (тривиальном) расслоении $M^4 \times \mathbb{U}(1) \to M^4$, а скалярное заряженное поле есть сечение $\xi\colon M^4 \to M^4 \times \mathbb{C}$ расслоения $M^4 \times \mathbb{C} \to M^4$, где M^4 – пространство Минковского. Их взаимодействие минимизирует действие

$$S(\nabla, \xi) = \|F\|^2 + \|\nabla\xi\|^2 - m^2\|\xi\|^2,$$

где $F = \nabla\circ\nabla$ – кривизна связности ∇. Другими словами, связность ∇ и сечение ξ удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа для действия S:

$$d^*F + \xi^*\nabla\xi - \xi(\nabla\xi)^* = 0 \tag{+}$$

$$(\nabla^*\nabla - m^2)\xi = 0. \tag{++}$$

К ним нужно добавить тождество Бьянки $dF = 0$, дающее (после выбора координат в M^4) первую пару уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{H}.$$

Уравнение (+) дает вторую пару

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = J_0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \partial_t\mathbf{E} + \mathbf{J},$$

а уравнение (++) представляет собой волновое уравнение.

Грубо говоря, NPC-метрику на граф-многообразии M можно интерпретировать как скалярное заряженное поле $\xi\colon V\to V\times\mathbb{C}$ на множестве вершин графа Γ многообразия M, взаимодействующее со связностью ∇ на расслоении $V\times\mathbb{C}\to V$.

Связность ∇ можно интерпретировать как набор конформных структур на краевых торах, поле ξ содержит информацию о длинах слоев, а в совокупности они минимизируют действие

$$S(\nabla,\xi) = \|F\|^2 + \|\nabla\xi\|^2 - m^2\|\xi\|^2.$$

Следовательно, изометрические состояния уравнения (0.1) являются экстремалями действия S, а само уравнение (0.1) оказывается аналогом волнового уравнения (++).

§2. Геометрия двухточечного пространства

Программу, описанную в конце предыдущего параграфа, можно реализовать в рамках спектрального исчисления А. Конна. Здесь мы приводим необходимые факты об этом формализме, ограничиваясь случаем конечномерных алгебр. Кроме того, все понятия иллюстрируются на примере диполя; это – простейший нетривиальный пример, к которому указанный формализм применим (чем и оправдывается название настоящего параграфа). В то же время, этот пример оказывается для нас фундаментальным, потому что случай общих графов можно свести к случаю диполя с помощью принципа разложения (см. §5). Спектральное исчисление детально обсуждается в [5–8, 15]; ср. [4, 9–14].

2.I. Пространство. Роль “пространства” играет инволютивная алгебра $\mathcal{A}$. В случае диполя $V = \{v_0, v_1\}$ алгебра $\mathcal{A}$ есть алгебра функций $\{V \to \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^2$ с инволюцией $a = (a_0, a_1) \mapsto a^* = (\overline{a}_0, \overline{a}_1)$.

2.II. Риманова метрика и спектральный дифференциал. Геометрия на V определена представлением алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (“касательном расслоении”) и компактным самосопряженным *оператором единичной длины* $ds \in L(\mathcal{H})$. *Спектральная тройка* $\{\mathcal{A}, \mathcal{H}, ds\}$ играет роль риманова многообразия. В случае диполя алгебра $\mathcal{A}$ представлена в гильбертовом пространств $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ со скалярным произведением $\langle a, b\rangle = a_0\overline{b}_0 + a_1\overline{b}_1$ операторами умножения

$$a = (a_0, a_1) \mapsto \pi(a) = \operatorname{diag}(a_0, a_1)\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2.$$

Оператор единичной длины ds определяется как

$$ds = \begin{pmatrix} 0 & -i\Delta s \\ i\Delta s & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta s \in \mathbb{R}.$$

Обратный оператор $D = ds^{-1}$ (оператор Дирака) позволяет дифференцировать функции $a \in \mathcal{A}$: *спектральный дифференциал* определяется как оператор

$$da := i[D, \pi(a)] \in L(\mathcal{H}).$$

Он является элементом пространства 1-форм $\Omega^1_D(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{H})$, состоящего из операторов

$$\omega = \sum_j a_0^j da_1^j = i\sum_j a_0^j [D, a_1^j], \quad a_i^j \in \mathcal{A}$$

(для упрощения обозначений мы отождествляем a и $\pi(a)$). Очевидно, $(da)^* = da^*$.

Для $a = (a_0, a_1)$ имеем

$$da = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta s}(a_1 - a_0) \\ \frac{1}{\Delta s}(a_1 - a_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Метрика на V определяется формулой Конна

$$\operatorname{dist}(v_0, v_1) = \sup\bigl\{|a(v_0) - a(v_1)| \,:\, a \in \mathcal{A}, \|da\| \leqslant 1\bigr\}, \tag{2.1}$$

откуда $\operatorname{dist}(v_0, v_1) = |\Delta s|$.

2.III. Линейное расслоение и калибровочные преобразования. Тривиальное линейное расслоение $V \times \mathbb{C} \to V$ полностью определяется своими сечениями, образующими тривиальный правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{E}$. Алгебра $\mathcal{A}$ действует в $\mathcal{E}$ справа:

$$(\xi, a) \mapsto \xi a \in \mathcal{E} \text{ для } \xi \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}.$$

Хотя модуль $\mathcal{E}$ изоморфен алгебре $\mathcal{A}$ (рассматриваемой как $\mathcal{A}$-модуль), между ними нет канонического изоморфизма. Изоморфизм $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$ определяется выбором базиса $e \in \mathcal{E}$.

Группа калибровочных преобразований

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{A} \mid u^*u = uu^* = 1\}$$

действует в $\mathcal{E}$ по формуле $(\xi, u) \mapsto \xi u^*$, $\xi \in \mathcal{E}$. Мы рассматриваем $\mathcal{U}$ как множество отмеченных базисов e в $\mathcal{E}$: координата сечения $\xi \in \mathcal{E}$ есть функция $a = a(\xi, e) \in \mathcal{A}$, определенная равенством $\xi = ea$. Если мы заменим базис: $e \mapsto e' = eu^*$, то координата преобразуется следующим образом: $a(\xi, e') = ua(\xi, e)$.

В случае диполя группа $\mathcal{U}$ состоит из элементов вида $u = (e^{i\alpha_0}, e^{i\alpha_1})$, где α_0, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Для $\xi \in \mathcal{E}$ и для базиса $e \in \mathcal{U}$ мы пишем $a(\xi, e) = (\xi_0, \xi_1)$.

2.IV. Связности на $\mathcal{E}$. *Связностью* на $\mathcal{E}$ называется линейное отображение

$$\nabla \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_D(\mathcal{A}),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla(\xi a) = \nabla\xi \cdot a + \xi \otimes da,$$

$\xi \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$. Для фиксированного базиса $e \in \mathcal{U}$ связность ∇ задается векторным потенциалом $\Phi \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$, который определяется равенством

$$\nabla e = e \otimes \Phi.$$

Следовательно, для $\xi = ea \in \mathcal{E}$ имеем

$$\nabla\xi = \nabla e \cdot a + e \otimes da = e \otimes (da + \Phi a).$$

Группа калибровочных преобразований $\mathcal{U}$ действует на векторных потенциалах связности ∇ следующим образом. Для $e' = eu^*$, $\nabla e' = e' \otimes \Phi'$ имеем

$$\Phi' = u\,du^* + u\Phi u^*.$$

Действительно, с одной стороны,

$$\nabla e' = e' \otimes \Phi' = eu^* \otimes \Phi' = e \otimes u^*\Phi',$$

с другой стороны,

$$\nabla e' = \nabla(eu^*) = \nabla e \cdot u^* + e \otimes du^* = e \otimes (du^* + \Phi u^*).$$

В случае диполя, представляя Φ как оператор

$$\Phi = i \begin{pmatrix} 0 & \phi_{01}\Delta s \\ \phi_{10}\Delta s & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_{01}, \phi_{10} \in \mathbb{C},$$

для $\xi = (\xi_0, \xi_1) \in \mathcal{E}$ имеем

$$\nabla \xi = e \otimes \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{01}\Delta s \xi_1 \\ \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{10}\Delta s \xi_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.V. Пространство k-форм $\Omega^k_D(\mathcal{A})$. Пространство k-форм $\Omega^k_D(\mathcal{A}) \subset L(\mathcal{H})$ состоит из операторов вида

$$\omega = \sum_j a^j_0 da^j_1 \dots da^j_k = i^k \sum_j a^j_0 [D, a^j_1] \dots [D, a^j_k], \tag{2.2}$$

$a^j_i \in \mathcal{A}$. Внешний дифференциал $d\colon \Omega^k_D(\mathcal{A}) \to \Omega^{k+1}_D(\mathcal{A})$ можно вычислить по формуле

$$d\omega = \sum_j da^j_0 \dots da^j_k. \tag{2.3}$$

(В случае диполя она корректно определена, потому что

$$\sum_j a^j_0 [D, a^j_1] \dots [D, a^j_k] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_j [D, a^j_0][D, a^j_1] \dots [D, a^j_k] = 0,$$

и обычная проблема, связанная с неоднозначностью представления (2.2), здесь не возникает, см. [5, 6].)

Используя равенство $da \cdot b = d(ab) - adb$ для a, $b \in \mathcal{A}$, имеем $\sigma\omega \in \Omega^{l+k}_D(\mathcal{A})$ для $\sigma \in \Omega^l_D(\mathcal{A})$, $\omega \in \Omega^k_D(\mathcal{A})$. Кроме того, выполняется правило Лейбница

$$d(\sigma\omega) = d\sigma \cdot \omega + (-1)^l \sigma d\omega.$$

2.VI. Кривизна связности ∇. Связность $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_D(\mathcal{A})$ продолжается до дифференцирования

$$\nabla\colon \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}} \Omega^k_D(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{k+1}_D(\mathcal{A})$$

по формуле

$$\nabla(e\otimes\omega) := \nabla e\cdot\omega + e\otimes d\omega$$

для $\omega\in\Omega^k_D(\mathcal{A})$, где $e\in\mathcal{U}$ – базис в $\mathcal{E}$. Для $\sigma\in\Omega^l_D(\mathcal{A})$ имеем

$$\begin{aligned}\nabla(e\otimes\omega\cdot\sigma) &= \nabla e\cdot\omega\cdot\sigma + e\otimes d\omega\cdot\sigma + (-1)^k e\otimes\omega\cdot d\sigma\\ &= \big(\nabla(e\otimes\omega)\big)\sigma + (-1)^k e\otimes\omega\cdot d\sigma.\end{aligned}$$

Кривизна связности ∇ определяется как оператор

$$\nabla^2\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^2_D(\mathcal{A}).$$

В базисе $e\in\mathcal{U}$ имеем

$$\nabla^2 e = e\otimes\theta,$$

где

$$\theta = d\Phi + \Phi^2 \in \Omega^2_D(\mathcal{A})$$

– *оператор кривизны*. Действительно,

$$\nabla^2 e = \nabla(e\otimes\Phi) = \nabla e\cdot\Phi + e\otimes d\Phi = e\otimes(d\Phi+\Phi^2).$$

(2.4) Лемма. *Кривизна ∇^2 есть $\mathcal{A}$-линейный оператор, т.е.*

$$\nabla^2(\xi\cdot a) = \nabla^2\xi\cdot a$$

для любых $\xi\in\mathcal{E}$ и $a\in\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $e\in\mathcal{U}$ – базис модуля $\mathcal{E}$. Достаточно показать, что $\nabla^2(ea) = \nabla^2 e\cdot a$ для $a\in\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}\nabla^2(ea) &= \nabla\big(e\otimes(da+\Phi a)\big)\\ &= e\otimes\Phi(da+\Phi a) + e\otimes d(da+\Phi a)\\ &= e\otimes(\Phi da + \Phi^2 a + d^2 a + d\Phi a - \Phi da)\\ &= e\otimes(d\Phi+\Phi^2)a. \quad \bullet\end{aligned}$$

Отсюда следует *калибровочная инвариантность* кривизны. Пусть θ' – оператор кривизны связности ∇ по отношению к базису $e' = eu^*$, $\nabla^2 e' = e'\otimes\theta'$. Тогда

$$\theta' = u\theta u^*.$$

Действительно, $e'\otimes\theta' = e\otimes u^*\theta'$. С другой стороны, $\nabla^2 e' = \nabla^2 e\cdot u^*$ по лемме 2.4. Следовательно, $u^*\theta' = \theta u^*$. $\bullet$

Для того, чтобы вычислить оператор кривизны θ в случае диполя, введем проекторы $p = (1, 0)$, $1 - p = (0, 1) \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\Phi = -i\phi_{01}\Delta s^2 p dp - i\phi_{10}\Delta s^2 (1-p) dp.$$

Используя то, что $(dp)^2 = \Delta s^{-2} \cdot 1$, получаем $d\Phi = -i(\phi_{01} - \phi_{10}) \cdot 1$. Далее, $\Phi^2 = -\phi_{01}\phi_{10}\Delta s^2 \cdot 1$. Таким образом,

$$\theta = d\Phi + \Phi^2 = i(\phi_{10} - \phi_{01} + i\phi_{01}\phi_{10}\Delta s^2) \cdot 1.$$

В частности, мы видим, что для *унитарной* связности ∇ (т.е. $\Phi^* + \Phi = 0$, или $\overline{\phi}_{01} = \phi_{10}$) норма оператора кривизны

$$\|\theta\|^2 = \left(\left| \frac{1}{\Delta s} + i\phi_{01}\Delta s \right|^2 - \frac{1}{\Delta s^2} \right)^2$$

достигает своего минимума на окружности $U_{\Delta s} \subset \mathbb{C}$ радиуса $1/\Delta s^2$ с центром в $z_{\Delta s} = i/\Delta s^2$, переходящей в вещественную прямую $\mathbb{R} = \{\operatorname{Im}\phi_{01} = 0\}$ при $\Delta s \to 0$. Группа калибровочных преобразований $\mathcal{U}$ действует в $U_{\Delta s}$ транзитивно.

2.VII. Тождество Бьянки. Пусть $\theta = d\Phi + \Phi^2$ – оператор кривизны связности ∇. Тогда выполняется *тождество Бьянки*:

$$d\theta = [\theta, \Phi].$$

Действительно, $d\theta = d^2\Phi + d\Phi \cdot \Phi - \Phi \cdot d\Phi$. Используя равенства $d^2 = 0$ и $d\Phi = \theta - \Phi^2$, получаем

$$d\theta = (\theta - \Phi^2)\Phi - \Phi(\theta - \Phi^2) = \theta\Phi - \Phi\theta.$$

В случае диполя оператор θ является скалярным оператором. Таким образом, обе части тождества Бьянки обращаются в нуль:

$$d\theta = 0 = [\theta, \Phi].$$

2.VIII. Эрмитовы структуры на $\mathcal{E}$. Пусть $\Lambda\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ – оператор умножения на положительный самосопряженный элемент алгебры $\mathcal{A}$. В базисе $e \in \mathcal{U}$ оператор Λ определяется формулой

$$a(\Lambda\xi, e) = \lambda a(\xi, e),$$

где $\xi \in \mathcal{E}$, $\lambda = \lambda(\Lambda, e) \in \mathcal{A}$ – матрица отображения Λ в базисе e, $\lambda^* = \lambda$. Для $e' = eu^*$ имеем $\lambda' = u\lambda u^*$, где $\lambda' = \lambda(\Lambda, e')$.

Эрмитова структура на $\mathcal{E}$ играет роль послойной эрмитовой метрики и определяется формулой

$$(\xi,\eta)_\Lambda = (\Lambda\xi,\eta) \in \mathcal{A},$$

где $(\xi,\eta) = \eta^*\xi$ – стандартная эрмитова структура на $\mathcal{E}$. Ясно, что

$$(\Lambda\xi,\eta) = (\xi,\Lambda^*\eta) = \eta^*\Lambda\xi.$$

В базисе e имеем $\xi = ea$, $\eta = eb$ и $(\xi,\eta)_\Lambda = b^*\lambda a$. В случае диполя эрмитова структура задается положительными числами λ_0, λ_1 и

$$(\xi,\eta)_\Lambda(v_0) = \overline{b}_0\lambda_0 a_0,\ \ (\xi,\eta)_\Lambda(v_1) = \overline{b}_1\lambda_1 a_1$$

для $a = (a_0, a_1)$, $b = (b_0, b_1)$.

2.IX. Связности, согласованные с эрмитовой структурой. Говорят, что связность ∇ на $\mathcal{E}$ *согласована* с эрмитовой структурой $(\ ,\ )_\Lambda$ или является Λ-*эрмитовой*, если

$$d(\xi,\eta)_\Lambda = (\nabla\xi,\eta)_\Lambda + (\xi,\nabla\eta)_\Lambda \tag{2.5}$$

для любых ξ, $\eta \in \mathcal{E}$. Здесь обе части равенства являются 1-формами, т.е. элементами из $\Omega^1_D(\mathcal{A})$. Для $\xi = ea$, $\eta = eb$ имеем

$$(\nabla\xi,\eta)_\Lambda = \big(e\otimes(da+\Phi a),\eta\big)_\Lambda := (e,\eta)_\Lambda(da+\Phi a)$$

и

$$(\xi,\nabla\eta)_\Lambda = \big(\xi, e\otimes(db+\Phi b)\big)_\Lambda := (db+\Phi b)^*(\xi,e)_\Lambda.$$

(2.6) Лемма. *Связность ∇ согласована с эрмитовой структурой Λ тогда и только тогда, когда в некотором (и, значит, в любом) базисе имеем*

$$d\lambda = \lambda\Phi + \Phi^*\lambda, \tag{2.7}$$

где Φ – векторный потенциал связности ∇ по отношению к e, $\lambda = \lambda(\Lambda, e)$.

Доказательство. Для $\xi = ea$, $\eta = eb \in \mathcal{E}$ имеем

$$\begin{aligned} d(\xi,\eta)_\Lambda &= d(b^*\lambda a) = db^*\lambda a + b^* d\lambda a + b^*\lambda da,\\ (\nabla\xi,\eta)_\Lambda &= (e,\eta)_\Lambda(da+\Phi a) = b^*\lambda da + b^*\lambda\Phi a,\\ (\xi,\nabla\eta)_\Lambda &= (db+\Phi b)^*(\xi,e)_\Lambda = db^*\lambda a + b^*\Phi^*\lambda a, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством $(db)^* = db^*$. Таким образом, (2.5) эквивалентно (2.7). •

(2.8) Замечание. Соотношение (2.7) – единственное из вышеприведенных, которое автору не удалось найти в доступной ему литературе по спектральному исчислению. Однако использование общих эрмитовых структур на $\mathcal{E}$ и формула (2.7) играют в дальнейшем важную роль.

В случае диполя несложное вычисление показывает, что (2.7) эквивалентно равенству

$$\lambda_0(1 + i\phi_{01}\Delta s^2) = \lambda_1(1 + i\overline{\phi}_{10}\Delta s^2), \tag{2.9}$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$, $\Phi = -i\phi_{01}\Delta s^2 pdp - i\phi_{10}\Delta s^2(1-p)dp$.

(2.10) Замечание. Векторный потенциал A электромагнитного поля ∇ представляет собой 1-форму на пространстве Минковского M^4 со значениями в алгебре Ли $u(1) = i\mathbb{R}$ группы $\mathbb{U}(1)$, и, таким образом, $A^* + A = 0$.

Следовательно, для любой эрмитовой структуры λ на

$$\mathcal{E} = \{M^4 \to M^4 \times \mathbb{C}\}$$

имеем $d\lambda = \lambda A + A^*\lambda = 0$, т.е. функция λ – константа. Это можно интерпретировать как закон сохранения электрического заряда.

2.X. Эрмитовы метрики. Для эрмитовой структуры Λ на $\mathcal{E}$ произведение $(\xi, \eta)_\Lambda \in \mathcal{A}$ есть оператор в $\mathcal{H}$. Соответствующая *эрмитова метрика* на $\mathcal{E}$ получается интегрированием послойного эрмитова произведения

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathrm{Tr}(\xi, \eta)_\Lambda \in \mathbb{C}$$

для ξ, $\eta \in \mathcal{E}$. В случае диполя, беря координаты $\xi = ea$, $\eta = eb$, $\lambda = \lambda(\Lambda, e) = (\lambda_0, \lambda_1)$, получаем

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathrm{Tr}(b^*\lambda a) = \overline{\eta}_0\lambda_0\xi_0 + \overline{\eta}_1\lambda_1\xi_1.$$

Всякая эрмитова метрика на $\mathcal{E}$ канонически продолжается до эрмитовых метрик на $\mathcal{A}$-модулях

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A}), \quad \hat{\mathcal{E}} = \{\mathcal{E} \to \mathcal{A}\}, \quad \mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$$

(тензорные произведения берутся над $\mathcal{A}$). Это позволяет определить нормы операторов

$$\nabla\xi \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1(\mathcal{A}), \quad \nabla^2 \in \mathcal{E} \otimes \Omega_D^2(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$$

(по поводу подробностей см. приложение B) и ввести действие

$$S = S(\nabla, \xi).$$

2.XI. Лагранжиан взаимодействия скалярного заряженного поля ξ и электромагнитного поля ∇ Λ-эрмитову связность ∇ на $\mathcal{E}$ можно рассматривать как аналог электромагнитного поля, а сечения $\xi \in \mathcal{E}$ описывают скалярные заряженные частицы. Энергия такого поля ξ в присутствии связности ∇ определяется как

$$E_\nabla(\xi) = \langle \nabla\xi, \nabla\xi \rangle.$$

Для того, чтобы вычислить $E_\nabla(\xi)$ в случае диполя, введем базис $e \in \mathcal{U}$ и получим $\xi = ea = (\xi_0, \xi_1)$, $\nabla\xi = e \otimes \sigma$ и $\sigma = da + \Phi a \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{01}\Delta s \xi_1 \\ \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{10}\Delta s \xi_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ имеем

$$\begin{aligned} E_\nabla(\xi) &= \langle e \otimes \sigma, e \otimes \sigma \rangle = \langle \sigma, \lambda\sigma \rangle \\ &= \lambda_0 \left| \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{01}\Delta s \xi_1 \right|^2 + \lambda_1 \left| \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{10}\Delta s \xi_0 \right|^2. \end{aligned}$$

Действие Янга–Миллса связности ∇ имеет вид

$$\mathrm{YM}(\nabla) = \langle \nabla^2, \nabla^2 \rangle,$$

где кривизна ∇^2 рассматривается как элемент пространства $\mathcal{E} \otimes \Omega^2_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$, снабженного Λ-эрмитовой метрикой. Для случая диполя

$$\mathrm{YM}(\nabla) = \langle \theta\lambda, \lambda\theta \rangle = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2) \left| \phi_{10} - \phi_{01} + i\phi_{01}\phi_{10}\Delta s^2 \right|^2.$$

Взаимодействие полей ξ и ∇ минимизирует действие

$$S(\nabla, \xi) = \mathrm{YM}(\nabla) + E_\nabla(\xi) - m^2\langle \xi, \xi \rangle.$$

В случае диполя окончательно получаем

$$\begin{aligned} S(\nabla, \xi) = {} & (\lambda_0^2 + \lambda_1^2) \left| \phi_{10} - \phi_{01} + i\phi_{01}\phi_{10}\Delta s^2 \right|^2 \\ & + \lambda_0 \left| \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{01}\Delta s \xi_1 \right|^2 + \lambda_1 \left| \frac{1}{\Delta s}(\xi_1 - \xi_0) + i\phi_{10}\Delta s \xi_0 \right|^2 \\ & - m^2 \left(\lambda_0 |\xi_0|^2 + \lambda_1 |\xi_1|^2 \right), \end{aligned} \tag{2.11}$$

и условие (2.9) Λ-эрмитовости связности ∇ выполнено. Здесь (ξ_0, ξ_1) – координаты сечения ξ в базисе e, (λ_0, λ_1) – коэффициенты эрмитовой структуры Λ,

$$\Phi = -i\phi_{01}\Delta s^2 p dp - i\phi_{10}\Delta s^2(1-p)dp$$

– векторный потенциал связности ∇. Действие S определяется инвариантным образом, независимо от выбора базиса $e \in \mathcal{U}$, и, таким образом, выражение (2.11) $\mathcal{U}$-инвариантно.

§3. Уравнение Эйлера–Лагранжа для действия S

3.I. Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия S имеют вид

$$d^*_\nabla \nabla^2 = -J, \tag{3.1.1}$$

$$\nabla^* \nabla \xi = m^2 \xi, \tag{3.1.2}$$

где

$$J = \nabla\xi \otimes \hat{\xi} - \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi}$$

– ток, и соответствуют обычным уравнениям классической электродинамики: (3.1.1) является аналогом второй пары уравнений Максвелла (+), (3.1.2) – аналогом волнового уравнения (++). В случае диполя действие S задается равенством (2.11), и уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\frac{1}{\Delta s^2}(\psi_{01}\psi_{10}-1)(\lambda_0\psi_{10}+\lambda_1\overline{\psi}_{01}) = \overline{\xi}_0\xi_1 - \frac{1}{2}\big(\psi_{10}|\xi_0|^2 + \overline{\psi}_{01}|\xi_1|^2\big), \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(\lambda_0(\overline{\psi}_{01}\overline{\psi}_{10}+1) - \lambda_0\rho^2\big)\xi_0 - \lambda_0\psi_{01}\xi_1 &= 0, \\ -\lambda_1\psi_{10}\xi_0 + \frac{1}{2}\big(\lambda_1(\psi_{01}\psi_{10}+1) - \lambda_1\rho^2\big)\xi_1 &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

где мы использовали обозначения

$$\psi_{01} = 1 + i\phi_{01}\Delta s^2, \quad \psi_{10} = 1 - i\phi_{10}\Delta s^2, \quad \rho^2 = m^2\Delta s^2.$$

Мы сохраняем коэффициенты λ_0, λ_1 в уравнениях (3.2.2), чтобы подчеркнуть аналогию с уравнением согласованности (0.1) ввиду условия Λ-эрмитовости (2.9), которое принимает вид

$$\lambda_0\psi_{01} = \lambda_1\overline{\psi}_{10}. \tag{3.2.3}$$

В приложении B показано, как получить уравнения (3.1.1)–(3.2.2). Здесь мы анализируем эти уравнения, сравнивая их с уравнением согласованности для случая элементарных графов: диполя (1.2.1) и монополя (1.2.2). Общий случай рассмотрен в §5.

Представляя

$$\xi_0 = |\xi_0| e^{i\alpha_0}, \ \xi_1 = |\xi_1| e^{i\alpha_1},$$

мы интерпретируем $|\xi_0|$, $|\xi_1|$ как числа, пропорциональные длинам слоев l_0 и l_1 блоков M_{v_0} и M_{v_1} (см. введение).

Так как эти длины положительны, то интерес представляют только невырожденные решения уравнений Эйлера–Лагранжа, т.е. такие, для которых $\xi_0, \xi_1 \neq 0$. Для этого необходимо, чтобы определитель системы (3.2.2) был равен нулю:

$$\left((\overline{\psi}_{01}\overline{\psi}_{10}+1)-\rho^2\right)\left((\psi_{01}\psi_{10}+1)-\rho^2\right) - 4\psi_{01}\psi_{10} = 0. \tag{3.3}$$

Ввиду (3.2.3) можно считать, что $\psi_{01} = |\psi_{01}|e^{i\gamma}$, $\psi_{10} = |\psi_{10}|e^{-i\gamma}$, и мы полагаем

$$\psi := \lambda_0|\psi_{01}| = \lambda_1|\psi_{10}|.$$

Тогда условие невырожденности (3.3) приобретает вид

$$\left(\psi^2 - (\rho^2-1)\lambda_0\lambda_1\right)^2 - 4\lambda_0\lambda_1\psi^2 = 0$$

или

$$\left(\psi^2 - (\rho^2+1)\lambda_0\lambda_1\right)^2 = 4\lambda_0^2\lambda_1^2\rho^2,$$

откуда

$$\psi^2 = \lambda_0\lambda_1(\rho \pm 1)^2. \tag{3.4}$$

Из мнимой части уравнений (3.2.1)–(3.2.2) следует, что

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \gamma = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

и мы получаем из этих уравнений следующую (вещественную) систему:

$$\frac{1}{\Delta s^2}\left(\frac{\psi^2}{\lambda_0\lambda_1}-1\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\psi = (-1)^n|\xi_0||\xi_1| - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi_0|^2}{\lambda_1}+\frac{|\xi_1|^2}{\lambda_0}\right)\psi, \tag{3.6.1}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\left(\frac{\psi^2}{\lambda_1}+\lambda_0(1-\rho^2)\right)|\xi_0| + (-1)^{n+1}\psi|\xi_1| = 0, \\ (-1)^{n+1}\psi|\xi_0| + \frac{1}{2}\left(\frac{\psi^2}{\lambda_0}+\lambda_1(1-\rho^2)\right)|\xi_1| = 0. \end{gathered} \tag{3.6.2}$$

3.II. Случай безмассового поля ξ. Сначала рассмотрим случай, когда масса $m = 0$ и, следовательно, $\rho = 0$. Тогда $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1$ в силу (3.4), и для ненулевого решения $(|\xi_0|, |\xi_1|)$ уравнения (3.6.2) имеем

$$\lambda_0^{1/2}|\xi_0| = (-1)^n \lambda_1^{1/2}|\xi_1|.$$

Таким образом, n четно и

$$\frac{|\xi_0|^2}{|\xi_1|^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \tag{3.7}$$

ср. (1.2.1), (ii). Уравнение (3.6.1) выполняется автоматически: обе его части, и левая, и правая, обращаются в нуль.

Следовательно, решения уравнений Эйлера–Лагранжа (3.1.1) –(3.1.2) для действия (2.11) в случае безмассового поля ξ имеют вид:

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \gamma = 2n\pi, \quad \psi^2 = \lambda_0\lambda_1, \quad |\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0.$$

Эти данные определяют плоскую связность ∇ и параллельное поле ξ: $\nabla\xi = 0$, т.е. $S(\nabla, \xi) = 0$.

3.III. Сравнение спектральной и геометрической моделей. Чтобы интерпретировать решение (l_0, l_1, ω) уравнения согласованности (1.2.1), определяющего NPC-метрику на граф-многообразии, как конфигурацию полей (∇, ξ), критическую для действия S, положим

$$l_0 = |\xi_0|,\ l_1 = |\xi_1|,\ \lambda_0 = |k_0|,\ \lambda_1 = |k_1|, \quad k_0|\psi_{01}| = k_1|\psi_{10}| = \frac{\cos\omega}{b},$$

считая, что $k_0k_1 > 0$. Эти данные определяют Λ-эрмитову связность ∇ на $\mathcal{E}$ и поле ξ, связанные условием калибровочной инвариантности

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \gamma = 2n\pi.$$

Этот выбор и сделал необходимым рассмотрение непостоянных эрмитовых структур λ на $\mathcal{E}$ и использование равенства (2.7). Далее, условие невырожденности $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1$ эквивалентно условию $\cos^2\omega = k_0k_1b^2$, а (3.7) есть в точности условие $l_0^2/l_1^2 = k_1/k_0$ для решений (ii) уравнения (1.2.1). При таком выборе уравнение (3.6.2) превращается в уравнение (1.2.1), если выполнено условие $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1$, что, в свою очередь, гарантирует, что связность ∇ – плоская, $\mathrm{YM}(\nabla) = 0$.

Принцип разложения (см. §5) позволяет распространить эту эквивалентность между спектральной и геометрической моделями на случай произвольных (конечных) графов. В этом смысле NPC-метрику на граф-многообразии можно интерпретировать как конфигурацию полей (∇, ξ), критическую для действия S, где ∇ – плоская Λ-эрмитова связность на $\mathcal{E}$, а $\xi \in \mathcal{E}$ – ковариантно постоянное поле, $\nabla\xi = 0$, или, пользуясь физической терминологией, как взаимодействие электромагнитного поля с безмассовым скалярным заряженным полем на графе многообразия.

Однако эта интерпретация не полна, хотя и очень привлекательна. Ее недостаток состоит, прежде всего, в необходимости условия $k_0 k_1 > 0$, поскольку в противном случае спектральная модель исчезает: $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. С другой стороны, на граф-многообразии часто существуют NPC-метрики, для которых необходимо рассматривать случай $k_0 = k_1 = 0$, $\omega = \pi/2$ с помощью принципа разложения. Такие метрики не интерпретируются в терминах безмассовых полей. Другой недостаток этой интерпретации – в том, что уравнения (3.6.1)–(3.6.2) для $\rho = 0$ не отражают очевидного геометрического запрета $\omega \neq 0$.

Условие $\omega = 0$ влечет коллапс метрики, поскольку оно означает, что слои смежных блоков совпадают, будучи гомотопически различными замкнутыми геодезическими на плоском краевом торе T_w. В следующем параграфе, где мы рассматриваем поля ξ с ненулевыми массами, эти проблемы решаются благодаря скрытому в уравнениях (3.6.1)–(3.6.2) замечательному механизму исключений и вырождений.

§4. Механизм исключений и вырождений

4.I. Здесь мы описываем механизм, позволяющий интерпретировать вырождения $\omega = \pi/2$ и $\omega = 0$ для NPC-метрик на граф-многообразии в терминах уравнений Эйлера–Лагранжа (3.6.1)–(3.6.2) для действия $S = S(\nabla, \xi)$ (2.11). Для этого требуется рассмотреть поле с ненулевыми массами. Тогда уравнения (3.6.1)–(3.6.2) совершенно неожиданным образом открывают такую геометрическую информацию об интерпретируемой метрике на граф-многообразии, которая совершенно отсутствует в уравнении согласованности (0.1). А именно, уравнение (0.1), будучи линейным и однородным относительно длин, не фиксирует длин слоев, а лишь задает их отношения. Однако если $m \neq 0$, уравнения (3.6.1)–(3.6.2) определяют значения $|\xi_0|$ и $|\xi_1|$, причем для этого имеется естественная геометрическая интерпретация.

Механизм исключений и вырождений описывается в ходе доказательства следующей теоремы 4.1. Положим $\rho = m\Delta s$, не предполагая, что $\rho > 0$. Напомним, что m – масса поля ξ, а $|\Delta s|$ интерпретируется как расстояние между вершинами v_0 и v_1.

(4.1) Теорема. *Уравнения Эйлера–Лагранжа* (3.6.1)–(3.6.2) *для действия S, заданного формулой* (2.11), *обладают невырожденными решениями (т.е. $|\xi_0||\xi_1| \neq 0$) тогда и только тогда, когда $\rho = 0$ или $1 < |\rho| < 2$. При $|\rho| = 1, 2$ любое решение вырожденно, а для остальных $\rho \in \mathbb{R}$ – решений нет.*

Доказательство. Поскольку случай $\rho = 0$ уже рассмотрен, будем считать, что $\rho \neq 0$. Кроме того, мы считаем, что $\rho > 0$ (случай $\rho < 0$ разбирается аналогично). Для решения $(|\xi_0|, |\xi_1|)$ уравнения (3.6.2) в силу условия невырожденности (3.4) имеем

$$\lambda_0(1 \pm \rho)|\xi_0| = (-1)^n \psi |\xi_1|. \qquad (4.1.1)$$

Сначала покажем, что в случае $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1(\rho+1)^2$ для условия (3.4) наша система не имеет решений. Действительно, $\psi = \lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}(\rho+1)$, и из (4.1.1) следует, что n четно и $|\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0$.

Тогда левая часть уравнения (3.6.1) положительна:

$$\frac{1}{\Delta s^2}\rho(\rho+1)(\rho+2)\frac{\lambda_0^2+\lambda_1^2}{\lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}} > 0,$$

в то время как правая часть имеет вид

$$(-1)^n|\xi_0||\xi_1| - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi_0|^2}{\lambda_1} + \frac{|\xi_1|^2}{\lambda_0}\right)\psi = -\lambda_0^{1/2}\lambda_1^{-1/2}\rho|\xi_0|^2 \leqslant 0.$$

Таким образом, в дальнейшем считаем, что $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1(\rho-1)^2$.

(a) Случай $0 < \rho < 1$. Тогда $\psi = \lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}(1-\rho)$ и из (4.1.1) следует, что

$$\lambda_0^{1/2}|\xi_0| = (-1)^n\lambda_1^{1/2}|\xi_1|.$$

Таким образом, n четно и $|\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0$. На этот раз левая часть уравнения (3.6.1) отрицательна:

$$\frac{1}{\Delta s^2}\rho(\rho-2)(1-\rho)\frac{\lambda_0^2+\lambda_1^2}{\lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}} < 0,$$

в то время как правая часть имеет вид

$$(-1)^n|\xi_0||\xi_1| - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi_0|^2}{\lambda_1} + \frac{|\xi_1|^2}{\lambda_0}\right)\psi = \lambda_0^{1/2}\lambda_1^{-1/2}\rho|\xi_0|^2 \geqslant 0.$$

(б) Случай $\rho = 1$. В этом случае $\psi = 0$, и система (3.6.2) не накладывает ограничений на $|\xi_0|$, $|\xi_1|$. Тогда уравнение (3.6.1) сводится к условию $|\xi_0||\xi_1| = 0$, что дает вырожденную критическую конфигурацию (∇, ξ) для действия S.

Пусть теперь $\rho > 1$. Тогда $\psi = \lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}(\rho - 1)$, и из (4.1.1) следует, что n нечетно, а $|\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0$. Левая часть уравнения (3.6.1) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta s^2}\left(\frac{\psi^2}{\lambda_0\lambda_1} - 1\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\psi = \frac{1}{\Delta s^2}\rho(\rho-1)(\rho-2)\frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}}, \quad (4.1.2)$$

а правая –

$$(-1)^n|\xi_0||\xi_1| - \frac{1}{2}\left(\frac{|\xi_0|^2}{\lambda_1} + \frac{|\xi_1|^2}{\lambda_0}\right)\psi = -\lambda_0^{1/2}\lambda_1^{-1/2}\rho|\xi_0|^2. \qquad (4.1.3)$$

Таким образом, при $\rho > 2$ для S нет критической конфигурации (∇, ξ), а при $\rho = 2$ единственная критическая конфигурация является вырожденной: $|\xi_0| = |\xi_1| = 0$, $\psi = \lambda_0\lambda_1$.

Остается рассмотреть

(в) Случай $1 < \rho < 2$. В этом случае уравнения (3.6.1)–(3.6.2) дают критическую конфигурацию (∇, ξ), для которой

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \gamma = (2n+1)\pi, \quad \psi = \lambda_0^{1/2}\lambda_1^{1/2}(\rho - 1)$$

и

$$\lambda_0|\xi_0|^2 = \lambda_1|\xi_1|^2 = \frac{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)(\rho - 1)(2 - \rho)}{\Delta s^2}.$$

Очевидно, что $|\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0$ и связность ∇ – не плоская. На этом доказательство теоремы 4.1 завершается. •

4.II. Интерпретация метрик как полей с ненулевыми массами. Интерпретируя решение (l_0, l_1, ω) уравнения согласованности (1.2.1) с k_0, $k_1 > 0$ (случай k_0, $k_1 < 0$ разбирается аналогично) как конфигурацию полей (∇, ξ), критическую для действия S с полем ξ ненулевой массы m, считаем, по теореме 4.1, что

$1 < \rho < 2$ (в случае, когда $k_0,\ k_1 < 0$, следует взять $\rho \in (-2,-1)$) и полагаем

$$\lambda_0|\xi_0|^2 = k_0 l_0^2,\ \lambda_1|\xi_1|^2 = k_1 l_1^2,\ \psi = \frac{\cos\omega}{b},\ \lambda_0(\rho-1) = k_0,\ \lambda_1(\rho-1) = k_1.$$

Эти данные определяют Λ-эрмитову связность ∇ на $\mathcal{E}$ и поле ξ ненулевой массы m, $\rho = m\Delta s$, связанные условием калибровочной инвариантности

$$\alpha_1 - \alpha_0 + \gamma = (2n+1)\pi.$$

Далее, условие невырожденности $\psi^2 = \lambda_0\lambda_1(\rho-1)^2$ эквивалентно условию $\cos^2\omega = k_0k_1b^2$, а равенство $|\xi_0|^2/|\xi_1|^2 = \lambda_1/\lambda_0$ – это в точности условие $l_0^2/l_1^2 = k_1/k_0$. Однако теперь, в отличие от случая $m=0$, эти данные *определяют* длины l_0, l_1:

$$\lambda_0 l_0^2 = \lambda_1 l_1^2 = \frac{(\lambda_0^2+\lambda_1^2)(2-\rho)}{\Delta s}^2, \tag{4.2}$$

делая конфигурацию (∇,ξ) критической для действия S. В связи с этим встает вопрос о том, как понять эти уравнения в геометрических терминах. Уравнение (0.1) однородно относительно длин слоев, что отражает возможность масштабировать метрику при помощи гомотетий.

Для того, чтобы правильно понять (4.2), мы рассмотрим специальные NPC-метрики на M, сужения которых на каждый блок M_v являются геометрическими структурами типа $H^2\times\mathbb{R}$, т.е. метрики ds_F^2 в локальных разложениях

$$ds^2_{M_v} = ds_F^2 + dl^2$$

являются метриками постоянной кривизны -1. Мы называем такие метрики *геометризациями* граф-многообразия M [1–3].

Знание длин l_0, l_1 слоев смежных блоков и углов ω между ними однозначно определяет плоскую метрику на краевом торе T_w и, следовательно, фиксирует длину замкнутой геодезической z_w на T_w, представляющей компоненту $(\partial F_v)_w$ края поверхности F_w из разложения $M_v = F_v \times S^1$. (Выбор геодезической z_w, вообще говоря, не однозначен: он эквивалентен выбору базиса Вальдхаузена, см. приложение А; однако он не зависит от метрики, и базис Вальдхаузена можно считать фиксированным.)

В свою очередь, на поверхности F_v с геодезическим краем имеется метрика постоянной кривизны -1, для которой длина каждой компоненты z_w, $w \in \partial v$, – заданное положительное число. Однако тогда длины l_0, l_1 однозначно определяются длиной геодезической z_w, если зафиксирована конформная структура на торе T_w, заданная отношением l_0/l_1 и углом ω.

Именно это свойство и отражено в (4.2). Длина геодезической z_w пропорциональна $1/|\Delta s|$, что согласуется с интерпретацией $|\Delta s|$ как "расстояния" между блоками M_{v_0}, M_{v_1}: метрики коллапсируют при $|\Delta s| \to \infty$ и становятся "бесконечно толстыми" при $|\Delta s| \to 0$. Другими словами, параметр m управляет формой геометризации многообразия M при фиксированном $\rho = m\Delta s$.

4.III. Вырождение $\rho = 1$**.** Другой факт, подтверждающий, что спектральная модель с ненулевой массой адекватна геометрической модели,– это возможность интерпретировать вырождение $k_0 = k_1 = 0$, когда $\omega = \pi/2$ и отсутствуют ограничения на длины слоев l_0, l_1. (Напомним, что такая интерпретация невозможна в случае безмассовых полей.) Этот случай естественно соответствует случаю $\rho = 1$, когда $\psi = 0$ и $|\xi_0||\xi_1| = 0$. Тогда можно взять в качестве λ_0, λ_1 произвольные положительные числа, и мы получим критическую конфигурацию (∇, ξ), определенную рассматриваемой метрикой. Кроме того, любой переход к пределу при k_0, $k_1 \to 0+$ можно интерпретировать при помощи соответствующего перехода к пределу при $\rho \to 1+$.

Адекватное описание гораздо более сильного вырождения метрик $\omega \to 0$ возможно для более общих граф-многообразий, граф которых отличен от диполя. Дело в том, что если граф-многообразие с дипольным графом допускает NPC-метрику, то $k_0 = k_1 = 0$ и $\omega = \pi/2$ (см. приложение A), что соответствует случаю $\rho = 1$.

4.IV. Монополь. Кратко опишем спектральную модель для графа Γ, который является петлей с вершиной v, см. 1.2 (б). Здесь $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, а представление алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$ задается матрицами $\pi(a) = \mathrm{diag}(a, a)$. Остальные данные очевидным образом получаются из уже рассмотренного случая диполя:

$$\phi_{01} = \phi_{10}, \ \lambda_0 = \lambda_1 \ (= \lambda), \ \xi_0 = \xi_1 \ (= \xi),$$

и т.д. Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия S имеют тот же самый механизм исключений и вырождений, что и в случае диполя. Подробности оставляются читателю. Отметим только, что $k_0 = k_1 = k/2$ в силу принципа разложения, и соответствие между геометрической моделью и спектральной задается равенствами

$$\lambda|\xi| = kl, \ \psi = \frac{\cos\omega}{b}, \ \lambda(\rho - 1) = \frac{k}{2}$$

(считаем, что $k > 0$). Тогда для критической конфигурации

$$\lambda^2(\rho-1)^2 = \psi^2 = \frac{\cos^2\omega}{b^2}.$$

§5. Принцип разложения

Принцип разложения был обнаружен В. Л. Кобельским в 1994 г. и широко применялся в [1–3]. Он основан на следующем простом топологическом свойстве граф-многообразий (см. приложение A).

Пусть граф-многообразие M является торической суммой $M'+M''$ граф-многообразий M' и M'' вдоль блоков $M'_{v'} \subset M'$, $M''_{v''} \subset M''$, и пусть M_v – его блок, где вершина v – соединение вершин v' и v''. Тогда для соответствующих инвариантов (зарядов) многообразий M, M' и M'' имеем

$$k_v = k_{v'} + k_{v''}.$$

Принцип разложения связан с графами граф-многообразий, точнее, с *раскрашеными графами*, снабженными зарядами k_v, $v \in V$, и индексами пересечения b_w, $w \in W$, которые являются коэффициентами уравнения согласованности (0.1). Для упрощения формулировки ограничимся случаем, когда граф Γ многообразия M является *триплетом*, т.е. состоит из двух ребер $w_0 \cup w_1$ с общей вершиной $\partial_+ w_0 = v_1 = \partial_- w_1$.

Мы используем обозначения $v_0 = \partial_- w_0$, $v_2 = \partial_+ w_1$, и k_0, k_1, k_2 для соответствующих зарядов, b_0, b_1 – для соответствующих индексов пересечения. Всякое разложение

$$k_1 = k_1^+ + k_1^-$$

представляет раскрашеный граф Γ в виде соединения раскрашеных графов $\Gamma_0 = w_0$ и $\Gamma_1 = w_1$ вдоль вершины v_1, где граф Γ_0 снабжен зарядами k_0, k_1^+ и индексом пересечения b_0, а Γ_1 – зарядами k_1^-, k_2 и индексом пересечения b_1.

5.I. Принцип разложения. Он утверждает следующее:

(а) Если графы Γ_0, Γ_1 обладают изометрическими состояниями $(l_0, l_1^+; \omega_0)$ и $(l_1^-, l_2; \omega_1)$, соответственно, и $l_1^+ = l_1^- =: l_1$, то $(l_0, l_1, l_2; \omega_0, \omega_1)$ – изометрическое состояние графа Γ.

(б) Обратно, всякое изометрическое состояние $(l_0, l_1, l_2; \omega_0, \omega_1)$ графа Γ канонически определяет разложение $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ с $k_1 = k_1^+ + k_1^-$, где числа k_1^+, k_1^- определяются соотношениями

$$l_0^2/l_1^2 = k_1^+/k_0 \text{ и } l_1^2/l_2^2 = k_2/k_1^-.$$

(Если k_0 или k_1 обращается в нуль, то $k_1^+ = 0$ или, соответственно, $k_1^- = 0$.)

Другими словами, этот принцип соответствует представлению системы (0.1) для графа Γ

$$\begin{array}{cccl} k_0 l_0 & -\frac{\cos\omega_0}{b_0} l_1 & & = 0, \\ -\frac{\cos\omega_0}{b_0} l_0 & +k_1 l_1 & -\frac{\cos\omega_1}{b_1} l_2 & = 0, \\ & -\frac{\cos\omega_1}{b_1} l_1 & +k_2 l_2 & = 0 \end{array} \tag{5.1}$$

как системы для двух диполей Γ_0, Γ_1:

$$\begin{array}{cccl} k_0 l_0 & -\frac{\cos\omega_0}{b_0} l_1^+ & & = 0, \\ -\frac{\cos\omega_0}{b_0} l_0 & +k_1^+ l_1^+ & & = 0, \\ & k_1^- l_1^- & -\frac{\cos\omega_1}{b_1} l_2 & = 0, \\ & -\frac{\cos\omega_1}{b_1} l_1^- & +k_2 l_2 & = 0 \end{array} \tag{5.2}$$

с дополнительными условиями

$$k_1 = k_1^+ + k_1^- \text{ и } l_1^+ = l_1 = l_1^-.$$

Подчеркнем, что на уровне граф-многообразий разложения раскрашеных графов $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$, вообще говоря, не существует, т.е. соответствующего представления $M = M_0 + M_1$ в виде торической суммы может не существовать, и, как правило, не существует.

Этот принцип очевидным образом распространяется на любое граф-многообразие M, делая возможным разложение его раскрашеного графа на элементарные раскрашеные графы – монополи и диполи. Разумеется, это разложение осмысленно только в случае, если M допускает NPC-метрику, Грубо говоря, этот принцип описывает параметризацию множества NPC-метрик (геометризаций) на M.

5.II. Спектральная модель. Здесь мы описываем спектральную модель геометризации произвольного граф-многообразия M. В качестве мотивации используем вышеуказанный принцип разложения.

Пусть $\Gamma = \Gamma(V, W)$ – граф многообразия M с множеством вершин V и множеством ориентированных ребер W. Алгебра $\mathcal{A}$ ("пространство") определяется как алгебра функций

$$v \mapsto \{\partial v \to \mathbb{C}\}$$

на множестве V, где $\partial v \subset W$ – множество ребер w с общей начальной вершиной $\partial_- w = v$. В качестве "касательного расслоения" возьмем гильбертово пространство сечений

$$\eta \colon W \to W \times \mathbb{C}$$

тривиального линейного расслоения $W \times \mathbb{C} \to W$ со скалярным произведением

$$\langle \eta, \eta' \rangle = \sum_{w \in W} \overline{\eta}'(w)\eta(w).$$

Представление π алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$ задается формулой

$$\left(\pi(a)\eta\right)_v (w) = a_v(w)\eta(w)$$

для $w \in \partial v$. Оператор единичной длины ds определяется формулой

$$ds(\eta)(w) = i\Delta s(w) \cdot \eta(-w),$$

где $\Delta s \colon W \to \mathbb{R} \setminus 0$ – нечетная функция: $\Delta s(-w) = -\Delta s(w)$.

Эти данные определяют спектральную тройку $\{\mathcal{A}, \mathcal{H}, ds\}$, ассоциированную с графом Γ. В случае диполя это определение совпадает с данным в §2.

Формула Конна (2.1), примененная к ребрам, определяет на Γ внутреннюю метрику, которая называется *спектральной*. Различные ребра w, w' между одними и теми же вершинами могут иметь различные длины. Нетрудно видеть, что для любой внутренней метрики на Γ существует нечетная функция $\Delta s \colon W \to \mathbb{R} \setminus 0$, для которой длины любого ребра по отношению данной метрике и к соответствующей спектральной метрике совпадают. Этот факт может служить отправной точкой для приближения классических моделей (дискретными) спектральными моделями.

Пространство скалярных заряженных полей $\mathcal{E}$, группа калибровочных преобразований $\mathcal{U}$, эрмитова структура Λ, Λ-эрмитова связность ∇ на $\mathcal{E}$, ее кривизна $\nabla\circ\nabla$ и эрмитовы метрики на $\mathcal{A}$-модулях

$$\mathcal{E},\ \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1_D(\mathcal{A}),\ \mathcal{E}\otimes\Omega^2_D(\mathcal{A})\otimes\hat{\mathcal{E}}$$

описываются в §2. Следовательно, можно определить действие

$$S(\nabla,\xi)=\mathrm{YM}(\nabla)+E_\nabla(\xi)-m^2\|\sigma\|^2$$

и вывести его уравнения Эйлера–Лагранжа (3.1.1), (3.1.2).

5.III. Редукция калибровочной группы. Вышеописанная модель, очевидно, представляет собой прямую сумму (почти независимых) спектральных моделей для диполей Γ_w, $w\in W$. Единственные соотношения между последними устанавливаются посредством функции Δs, определяющей спектральную метрику на графе Γ.

Функция Δs не является динамической переменной, следовательно, уравнение Эйлера–Лагранжа для S распадается в систему из $|W|/2$ независимых пар уравнений (3.2.1), (3.2.2), параметризованных (неориентированными) ребрами $(w,-w)$, $w\in W$.

Калибровочная группа $\mathcal{U}$ есть группа отображений

$$\{\partial V\to\mathbb{U}(1)\},\ \text{где}\ \partial V=\bigcup_{v\in V}\partial v.$$

Чтобы сделать ситуацию нетривиальной и приспособленной для приближений, уменьшим группу $\mathcal{U}$ до ее подгруппы

$$\mathcal{U}_0=\{V\to\mathbb{U}(1)\}.$$

Это значит, что если $e\in\mathcal{U}_0$ – фиксированный базис и $\xi=(\xi_w)\in\mathcal{E}$, $v\in V$, то $\arg(\xi_w)=\arg(\xi_{w'})$ для любых w, $w'\in\partial v$.

Более существенные соотношения между диполями Γ_w возникают, если зафиксировать соответствие между спектральной и геометрической моделями.

5.IV. Соответствие между спектральной и геометрической моделями. Для упрощения формулировки будем считать, что у графа Γ многообразий M нет ребер, являющихся петлями. Зафиксируем NPC-метрику (геометризацию) на M. (Необходимые и достаточные условия существования таких метрик установлены в [2].) Принцип разложения определяет разложение раскрашеного графа $\{\Gamma, B, K\}$ на диполи

$$\{\Gamma_w, b_w, K_w\},\ \ w \in W,$$

где $K = \{k_v \,|\, v \in V\}$ – набор зарядов многообразия M, $B = \{b_w \,|\, w \in W\}$ – индексы пересечения, $b_w = b_{-w} \in \mathbb{N}$, а $K_w = \{k_w, k_{-w}\}$ – заряды диполей Γ_w, $k_w := k_{\partial_- w}$. Кроме того, для каждой вершины $v \in V$ выполняется условие

$$k_v = \sum_{w \in \partial v} k_w. \tag{5.3}$$

Геометризация определяет для каждого диполя Γ_w его изометрическое состояние $(l_w, l_{-w}; \omega_w)$, где $l_w := l_{\partial_- w}$, см. пример 1.2 (a). Для простоты будем считать, что все эти изометрические состояния невырожденны, т.е.

$$0 < \cos^2 \omega_w = k_w k_{-w} b_w^2 < 1. \tag{5.4}$$

Случай отрицательных зарядов k_w, k_{-w}, вообще говоря, исключить нельзя. Чтобы описать такие случаи, выберем у каждого неориентированного ребра $(w, -w)$ такую ориентацию $w = w_s$, что

$$\operatorname{sgn}(\Delta s(w)) = \operatorname{sgn}(k_w) = \operatorname{sgn}(k_{-w}).$$

Пусть $W_s \subset W$ – множество выбранных ориентированных ребер. Кроме того, если граф Γ не является односвязным, то для каждого нетривиального цикла $Z \subset \Gamma$ выполняется следующее условие равновесия. Пусть цикл Z ориентирован и ориентации $w = w_Z$ его ребер согласуются с ориентацией цикла Z. (Ориентация w_Z не имеет ничего общего с вышеуказанной ориентацией w_s.) Тогда

$$\prod_{w \in Z} \frac{k_w}{k_{-w}} = 1. \tag{5.5}$$

Этот очевидно следует из равенства

$$\frac{l_{-w}^2}{l_w^2} = \frac{k_w}{k_{-w}}, \tag{5.6}$$

выполняющегося для каждого ребра $w \in W$.

Считая для простоты, что для каждого ребра $w \in W_s$ число $\rho_w = m\Delta s(w)$ удовлетворяет условию $1 < \rho_w < 2$, положим, как в §4,

$$\lambda_w |\xi_w|^2 = k_w l_w^2, \tag{5.7}$$

$$\lambda_w(\rho_w - 1) = k_w, \tag{5.8}$$

$$\psi_w = \frac{\cos\omega_w}{b_w}, \tag{5.9}$$

$$\arg(\xi_w) - \arg(\xi_{-w}) + \gamma_w = (2n+1)\pi, \tag{5.10}$$

где $\lambda_w := \lambda_{\partial_- w}$. Для фиксированного базиса $e \in \mathcal{U}_0$ эти условия определяют поле $\xi \in \mathcal{E}$ с координатами $\xi_w := \xi_{\partial_- w} \in \mathbb{C}$, эрмитову структуру $\Lambda = (\lambda_w)$ на $\mathcal{E}$ и Λ-эрмитову связность ∇ на $\mathcal{E}$, коэффициенты которой определяются параметрами ψ_w, γ_w, как в §3. Условие калибровочной инвариантности (5.10) гарантирует, что конфигурация (∇, ξ) корректно определена, т.е. не зависит от выбора базиса $e \in \mathcal{U}_0$. Из (5.4), (5.8) и (5.9) следует, что выполнено условие невырожденности

$$\psi_w^2 = \lambda_w \lambda_{-w} (\rho_w - 1)^2,$$

см. (3.4), а из (5.6) и (5.7) – что

$$|\xi_{-w}|^2 / |\xi_w|^2 = \lambda_w / \lambda_{-w},$$

т.е. поле ξ удовлетворяет волновому уравнению (3.1.2).

5.V. Решение уравнений Максвелла. Конфигурация полей (∇, ξ), определенная выше, является критической для действия S, если она удовлетворяет уравнению (3.1.1). Это значит, что для каждого ребра $w \in W_s$ должно выполняться условие

$$\lambda_w |\xi_w|^2 = \lambda_{-w} |\xi_{-w}|^2 = \frac{(\lambda_w^2 + \lambda_{-w}^2)(\rho_w - 1)(2 - \rho_w)}{\Delta s^2(w)}, \tag{5.11}$$

см. доказательство теоремы 4.1, случай (в). Такие условия для различных ребер w, $w' \in \partial v \cap W_s$ не являются независимыми, поскольку для длин слоев имеет место равенство $l_{\partial_- w} = l_v = l_{\partial_- w'}$. Таким образом, условие (5.11) означает, что между параметрами ρ_w и $\rho_{w'}$ имеется определенное соотношение. Другими словами, конфигурация полей (∇, ξ), определенная геометризацией (l_w, ω_w), $w \in W$, многообразия M по формулам (5.7)–(5.10), является критической для действия S, если можно удовлетворить упомянутому соотношению между ρ_w, $\rho_{w'}$ для всех пар w, $w' \in \partial v \cap W_s$, $v \in V$.

(5.12) Теорема. *Для любой геометризации* (l_w, ω_w), $w \in W$, *многообразия* M *существует (нечетная) функция* $\Delta s\colon W \to \mathbb{R} \setminus 0$ *такая, что конфигурация полей* (∇, ξ), *определенная по формулам* (5.7)–(5.10), *является критической для действия* S.

Доказательство. Если имеется ребро w с $k_w = 0$, то также $k_{-w} = 0$, и мы полагаем $\rho_w = \pm 1 = m\Delta s(w)$. Поскольку в этом случае нет никаких ограничений на длины l_w, l_{-w}, возьмем в качестве λ_w, λ_{-w} в (5.8) произвольные положительные числа, и тогда (5.7)–(5.9) выполняются с ξ_w, $\xi_{-w} = 0$, $\psi_w = 0$. Такие ребра $(w, -w)$ разделяют граф на несколько частей, и для простоты мы рассматриваем случай, когда такая часть всего одна. Более того, будем считать, что для геометризации многообразия M выполняется условие (5.4) с k_w, $k_{-w} > 0$ для всех $w \in W_s$. Этим определен знак функции Δs, $\Delta s(w) > 0$ для всех $w \in W_s$. Возьмем w, $w' \in \partial v \cap W_s$ для некоторой вершины $v \in V$. Ввиду равенства $l_w = l_{w'}$ условие (5.11) того, что конфигурация (∇, ξ) – критическая, имеет вид

$$\frac{k_w^2 + k_{-w}^2}{k_w} \cdot \frac{2 - \rho_w}{\rho_w - 1} \cdot \frac{1}{\Delta s^2(w)} = \frac{k_{w'}^2 + k_{-w'}^2}{k_{w'}} \cdot \frac{2 - \rho_{w'}}{\rho_{w'} - 1} \cdot \frac{1}{\Delta s^2(w')},$$

где использованы равенства (5.7), (5.8). Вспоминая, что $\rho_w = m\Delta s(w)$, получаем

$$\frac{2 - \rho_{w'}}{(\rho_{w'} - 1)\rho_{w'}^2} = \frac{2 - \rho_w}{(\rho_w - 1)\rho_w^2} \cdot K_{w,w'}, \tag{5.12.1}$$

где

$$K_{w,w'} = \frac{k_w^2 + k_{-w}^2}{k_{w'}^2 + k_{-w'}^2} \cdot \frac{k_{w'}}{k_w}. \tag{5.12.2}$$

Пусть $\rho = \rho(\delta)$ – функция на $(0, \infty)$, обратная к функции

$$\delta(\rho) = \frac{2 - \rho}{(\rho - 1)\rho^2}.$$

(Легко видеть, что функция $\delta = \delta(\rho)$ монотонна на промежутке $1 < \rho < 2$, $\rho(\delta) \to 2$ при $\delta \to 0+$ и $\rho(\delta) \to 1$ при $\delta \to \infty$).

Полагая $\rho_w = \rho(\delta)$ для некоторого $\delta > 0$, видим, что (5.12.1) выполняется для $\rho_{w'} = \rho(K_{w,w'} \cdot \delta)$. Следовательно, значения функции Δs также фиксированы условиями

$$\Delta s(w) = \frac{\rho(\delta)}{m}, \quad \Delta s(w') = \frac{\rho(K_{w,w'} \cdot \delta)}{m}.$$

Если граф Γ многообразия M односвязен, то выбор $\Delta s(w) = \rho(\delta)/m$ для некоторого ребра $w \in W_s$ при некотором $\delta > 0$ корректно и однозначно определяет значение $\Delta s(w')$ для каждого ребра $w' \in W_s$, так что для каждой пары смежных ребер w, w' выполняется условие (5.12.1), откуда следует, что конфигурация (∇, ξ) – критическая.

Пусть граф Γ неодносвязен и Z – один из его нетривиальных (ориентированных) циклов. Определяя Δs так же, как выше, видим, что функция Δs корректно определена, если выполнено равенство

$$\prod_{w \in Z} K_{w,w'} = 1,$$

где w' – следующее за w ребро цикла Z. Однако очевидно, что

$$\prod_{w \in Z} K_{w,w'} = \prod_{w \in Z} \frac{k_w}{k_{-w}},$$

и функция Δs корректно определена благодаря условию (5.5). •

Приложение A

Здесь собраны необходимые определения, результаты и факты о геометризациях граф-многообразий из [1–3].

В настоящей работе под *граф-многообразием* понимается трехмерное замкнутое ориентируемое многообразие M, для которого существует непустой минимальный набор E дизъюнктных вложенных несжимаемых торов таких, что замыкание M_v каждой связной компоненты v дополнения набора E гомеоморфно $F_v \times S^1$, где F_v – компактная поверхность с краем, отличная от от диска и кольца. Многообразия M_v называются *блоками* многообразия M. Множество блоков V есть множество вершин графа Γ многообразия M с множеством неориентированных ребер E. Мы обозначаем через W множество *ориентированных* ребер графа Γ.

A.I. Базисы Вальдхаузена. Зафиксируем ориентацию многообразия M. Это определяет ориентацию на каждом блоке M_v, для которого также зафиксируем ориентацию сомножителя S^1 в разложении $M_v = F_v \times S^1$.

Для $w \in \partial v \subset W$ пусть $L_w \simeq \mathbb{Z}^2$ – первая гомологическая группа соответствующей компоненты края $(\partial M_v)_w = T_w$, представляющей собой тор T^2. Выберем базис $\{(z_w, f_w) \,|\, w \in \partial v\}$ группы

$$H_1(\partial M; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in \partial v} L_w$$

таким образом, чтобы он был согласован с ориентацией, индуцированной на ∂M_v, элементы f_w представляли ориентированные слои, а сумма $\bigoplus_{w \in \partial v} z_w$ принадлежала ядру гомоморфизма включения

$$H_1(\partial M_v; \mathbb{Z}) \to H_1(M_v; \mathbb{Z}).$$

Набор

$$(z, f) = \{(z_w, f_w) \,|\, w \in \partial v,\ v \in V\}$$

называется *базисом Вальдхаузена*.

Всякому ориентированному ребру w графа Γ соответствует склеивающее отображение компонент края смежных блоков, индуцирующее изоморфизм $g_w : L_{-w} \to L_w$. В выбранных базисах изоморфизм g_w имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} a_w & b_w \\ c_w & d_w \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z}),$$

т.е.

$$g_w(z_{-w}) = a_w z_w + c_w f_w,$$
$$g_w(f_{-w}) = b_w z_w + d_w f_w.$$

Поскольку M ориентируемо, $\det g_w = a_w d_w - b_w c_w = -1$. Кроме того, $g_{-w} = g_w^{-1}$ и $b_{-w} = b_w$.

A.II. Инварианты граф-многообразия. Поскольку набор E – минимальный, то $b_e \neq 0$, и (неориентированный) *индекс пересечения* $b_e = |b_w| = |b_{-w}|$ ребра $e = (w, -w)$ является топологическим инвариантом многообразия M.

Заряд

$$k_v = \sum_{w \in \partial v} \frac{d_w}{b_w}$$

блока M_v (вершины v графа Γ) также является инвариантом ориентированного многообразия M. Заряды меняют знак, если ориентация многообразия M меняется.

Заряды k_v и индексы пересечения b_w являются коэффициентами уравнения согласованности (0.1).

(A.1) Пример. Для граф-многообразия M, граф которого является диполем, имеется всего одно склеивающее отображение

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, индекс пересечения многообразия M равняется $|b|$, а заряды суть $k_0 = d/b$, $k_1 = -a/b$.

A.III. Критерий геометризуемости. *Геометрической структурой* типа $H^2 \times \mathbb{R}$ на блоке M_v называется метрика, для которой универсальное накрытие $\widetilde{M}_v$ изометрично метрическому произведению $A_v \times \mathbb{R}$, где A_v – выпуклое подмножество гиперболической плоскости H^2, ограниченное бесконечными геодезическими. Следовательно, край ∂M_v каждого геометризованного блока M_v – вполне геодезический, и каждая его компонента – плоский тор.

Заметим, что геометризованный блок не обязательно изометричен метрическому произведению поверхности F_v с гиперболической метрикой на окружность. Может случиться, что имеется нетривиальная голономия окружности S^1 вдоль некоторых (нестягиваемых) петель в базе F_v. Более того, подобная ситуация типична, и только как исключение геометризованный блок имеет метрику, расщепляющуюся глобально.

Граф-многообразие M *допускает геометризацию*, если на каждом его блоке M_v можно выбрать геометрическую структуру типа $H^2 \times \mathbb{R}$ таким образом, чтобы все склеивающие отображения были изометриями.

Каждая геометризация определяет C^1-гладкую метрику на M, вещественно-аналитическую внутри каждого блока. Эта метрика имеет неположительную кривизну (секционную – внутри блоков, и в смысле Александрова–Буземана – везде). Граф-многообразие M допускает геометризацию тогда и только тогда, когда на M существует C^∞-гладкая риманова NPC-метрика.

Раскрашеный граф $\{\Gamma; B; K\}$ граф-многообразия M содержит информацию о геометризуемости многообразия M. Здесь $B =$

$\{b_w = b_{-w} \in \mathbb{N} \mid w \in W\}$ – набор индексов пересечения многообразия M, а $K = \{k_v \in \mathbb{Q} \mid v \in V\}$ – вектор зарядов. Для упрощения формулировки ограничимся случаем, когда $K > 0$, т.е. $k_v > 0$ для всех $v \in V$.

Пусть J_B – квадратичная форма на $\mathbb{R}^V$, заданная формулой

$$(J_B\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \sum_{w \in W} \frac{1}{b_w} l_{\partial_- w} l_{\partial_+ w}, \tag{A.2}$$

где $\mathcal{L} = \{l_v \mid v \in V\} \in \mathbb{R}^V$.

Обозначим через $\operatorname{diag} K$ квадратичную форму на $\mathbb{R}^V$, заданную формулой

$$(\operatorname{diag} K\mathcal{L}, \mathcal{L}) = \sum_{v \in V} k_v l_v^2. \tag{A.3}$$

(A.4) Теорема. *Граф-многообразие M с положительным вектором зарядов K не допускает геометризации тогда и только тогда, когда форма*

$$H_M = \operatorname{diag} K - J_B$$

неотрицательно определена.

В общем случае имеется аналогичный критерий (см. [2, теорема 0.6]), только определение формы H_M становится сложнее.

Другими словами, этот результат дает необходимое и достаточное условие того, что уравнение согласованности (0.1) обладает изометрическим состоянием.

Например, если $k_v = 0$ для всех $v \in V$, то M допускает геометризацию.

Возвращаясь к случаю, когда граф многообразия M есть диполь, получаем $k_0 k_1 b^2 = -ad$, и условие геометризуемости $0 \leqslant k_0 k_1 b^2 < 1$ выполнено только если $k_0 k_1 = 0$, поскольку a, $d \in \mathbb{Z}$. Тогда $k_0 = k_1 = 0$, т.е. $a = d = 0$ и $b = c = \pm 1$. Следовательно, если многообразие M допускает NPC-метрику, то для всякой такой метрики угол между слоями $\omega = \pi/2$.

A.IV. Торическая сумма и принцип разложения. *Торическая сумма* граф-многообразий M' и M'' определяется следующим образом. Пусть $U' \subset M'_{v'}$ и $U'' \subset M''_{v''}$ – насыщенные регулярные окрестности слоев блоков $M'_{v'} \subset M'$ и $M''_{v''} \subset M''$. Склеивая многообразия $M' \setminus U'$ и $M'' \setminus U''$ при помощи гомеоморфизма $T' \to T''$ между их краями, индуцированного некоторым послойным гомеоморфизмом $U' \to U''$, получаем торическую сумму $M = M' + M''$, которая также является граф-многообразием. Результат может зависеть от выбора блоков, а также от гомотопического типа склеивающего отображения. Пусть на многообразиях M' и M'' выбраны некоторые ориентации. Тогда выбор базиса Вальдхаузена (z', f') для M' эквивалентен выбору расщепления $M'_{v'} = F'_{v'} \times S^1$ с ориентированными сомножителями для каждого блока многообразия M'. Пусть (z'', f'') – базис Вальдхаузена для M''. Тогда торическая сумма $M = M' + M''$ вдоль вершин v', v'', отождествляемых в вершину v, определяется условием $M_v = F_v \times S^1$, где F_v – ориентированная связная сумма $F'_{v'} \# F''_{v''}$ поверхностей, соответствующих вершинам v' и v''. Кроме того, для зарядов соответствующих блоков многообразий M, M' и M'' имеем $k_v = k_{v'} + k_{v''}$.

Именно на этом свойстве и основан принцип разложения из §5. В качестве приложения этого принципа, немедленно получаем

(A.5) Пример. (1) Пусть граф Γ многообразия M есть окружность с нечетным количеством ребер и пусть $k_v = 0$ для всех $v \in V$.

Тогда для любой геометризации многообразия M все углы между слоями смежных блоков $\omega_w = \pi/2$.

Это – следствие того, что раскрашеный граф Γ допускает лишь разложение на диполи с нулевыми зарядами.

(2) Пусть граф Γ многообразия M есть окружность с четным количеством ребер и $k_v = 0$ для всех $v \in V$.

Тогда M допускает геометризации с некоторыми из углов ω_w между слоями смежных блоков сколь угодно близкими к нулю. Это верно для всех углов, если все индексы пересечения равны друг другу.

Приложение Б

Здесь мы выводим уравнения Эйлера–Лагранжа для действия

$$S(\nabla, \xi) = \mathrm{YM}(\nabla) + E_\nabla(\xi) - m^2\|\xi\|^2.$$

Будем проводить вычисления в инвариантном виде, избегая, насколько возможно, выбора координат.

Мы не предполагаем, что алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна. Однако считаем, что для спектральных троек $\{\mathcal{A}, \mathcal{H}, ds\}$, которые мы рассматриваем, при каждом $a \in \mathcal{A}$ выполняется условие

$$[ds^2, \pi(a)] = 0. \qquad (\text{Б}.1)$$

Отметим, что для спектральных троек, использованных выше, это условие выполняется автоматически.

Б.I. Сопряженный модуль $\hat{\mathcal{E}}$ модуля $\mathcal{E}$. Пусть $\hat{\mathcal{E}}$ – левый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{A}$-линейных гомоморфизмов $\mathcal{E} \to \mathcal{A}$, т.е. для $\zeta \in \hat{\mathcal{E}}$, $\eta \in \mathcal{E}$ и $a \in \mathcal{A}$ имеем

$$\zeta(\eta a) = \zeta(\eta)a,$$

и левое действие алгебры $\mathcal{A}$ определяется формулой $(a\zeta)(\eta) = a\zeta(\eta)$.

На $\mathcal{E}$ имеется стандартная эрмитова структура $(\eta, \xi) = \xi^*\eta$. Таким образом, можно определить взаимно обратные канонические изоморфизмы

$$\wedge \colon \mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}} \text{ и } \vee \colon \hat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E},$$

где

$$(\wedge\xi)(\eta) = (\eta, \xi), \quad \vee\zeta = e\,(\zeta(e))^*\,,$$

для ξ, $\eta \in \mathcal{E}$, $\zeta \in \hat{\mathcal{E}}$. Определение изоморфизма $\vee$ не зависит от выбора базиса $e \in \mathcal{U}$, поскольку при $e' = eu^*$

$$e'\,(\zeta(e'))^* = eu^*\,(\zeta(e)u^*)^* = e\,(\zeta(e))^*\,.$$

Из определений легко следует, что $\vee \circ \wedge = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ и $\wedge \circ \vee = \mathrm{id}_{\hat{\mathcal{E}}}$. Кроме того, для базисов $e \in \mathcal{E}$ и $\wedge e \in \hat{\mathcal{E}}$ имеем $\wedge e(e) = e^*e = 1$.

Для сечения $\zeta \in \hat{\mathcal{E}}$ его координата $b = b(\zeta, \wedge e) \in \mathcal{A}$ в базисе $\wedge e$ определяется условием $\zeta = b \cdot \wedge e$.

Калибровочная группа $\mathcal{U}$ действует на координатах сечения ζ следующим образом. Если $e' = eu^*$, то $\wedge e' = u \cdot \wedge e$, и для $\zeta = b' \cdot \wedge e'$ имеем $b' = bu^*$.

Для эрмитовой структуры Λ на $\mathcal{E}$ соответствующая эрмитова Λ-структура на $\hat{\mathcal{E}}$ определяется тем условием, что изоморфизм $\vee \colon \hat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ является изометрией этих структур:

$$(\zeta, \kappa)_\Lambda := (\vee\kappa, \vee\zeta)_\Lambda$$

для ζ, $\kappa \in \hat{\mathcal{E}}$. Следовательно,

$$(\wedge\xi, \wedge\eta)_\Lambda = (\vee \circ \wedge\eta, \vee \circ \wedge\xi)_\Lambda = (\eta, \xi)_\Lambda, \quad \xi, \eta \in \mathcal{E}.$$

В то время, как для a, $b \in \mathcal{A}$, ξ, $\eta \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$(\xi a, \eta b)_\Lambda = b^*(\xi, \eta)_\Lambda a,$$

для ζ, $\kappa \in \hat{\mathcal{E}}$ имеем

$$(a\zeta, b\kappa)_\Lambda = a(\zeta, \kappa)_\Lambda b^*,$$

поскольку $\vee(a\zeta) = \vee\zeta a^*$.

Кроме того, если $\xi = ea \in \mathcal{E}$, то элемент $\wedge\xi \in \hat{\mathcal{E}}$ имеет координаты $\wedge\xi = a^* \wedge e$.

Б.II. Эрмитова метрика на $\Omega_D^k(\mathcal{A})$. Для $k \geqslant 0$ и ω, $\omega' \in \Omega_D^k(\mathcal{A})$ положим

$$\langle \omega, \omega' \rangle = \mathrm{Tr}({\omega'}^* \omega).$$

Из свойств следа Tr вытекает, что

$$\begin{aligned} \langle \omega', \omega \rangle &= \langle {\omega'}^*, \omega^* \rangle = \overline{\langle \omega, \omega' \rangle}, \\ \langle a\omega, \omega' \rangle &= \langle \omega, a^*\omega' \rangle, \\ \langle \omega b, \omega' \rangle &= \langle \omega, \omega' b^* \rangle \end{aligned}$$

для a, $b \in \mathcal{A}$.

Б.III. Эрмитова метрика на $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{E}$ зафиксирована эрмитова структура Λ. Для $\xi \otimes \omega$, $\xi' \otimes \omega' \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})$ положим

$$\langle \xi \otimes \omega, \xi' \otimes \omega' \rangle = \langle \omega, (\xi, \xi')_\Lambda \omega' \rangle,$$

и продолжим по линейности на $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})$. Из свойств эрмитовой метрики на $\Omega_D^k(\mathcal{A})$ легко следует, что

$$\langle \xi' \otimes \omega', \xi \otimes \omega \rangle = \overline{\langle \xi \otimes \omega, \xi' \otimes \omega' \rangle}.$$

Б.IV. Эрмитова метрика на $\mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$. Пространство $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\big(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})\big)$ эндоморфизмов правых $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})$ можно отождествить с векторным пространством $\mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$ (над $\mathbb{C}$) (тензорные произведения берутся над $\mathcal{A}$). Для $\xi \otimes \omega \otimes \zeta \in \mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$ и $\eta \in \mathcal{E}$ имеем

$$(\xi \otimes \omega \otimes \zeta)(\eta) = \xi \otimes \omega \cdot \zeta(\eta).$$

Введем Λ-эрмитову метрику на $\mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$, полагая

$$\begin{aligned} \langle \xi \otimes \omega \otimes \zeta, \xi' \otimes \omega' \otimes \zeta' \rangle :&= \langle \xi \otimes \omega(\zeta, \zeta')_\Lambda, \xi' \otimes \omega' \rangle \\ &= \langle \omega(\zeta, \zeta')_\Lambda, (\xi, \xi')_\Lambda \omega' \rangle. \end{aligned}$$

В частности, для базиса $e \in \mathcal{U}$ имеем

$$\langle e \otimes \omega \otimes \wedge e, e \otimes \omega' \otimes \wedge e \rangle = \langle \omega(\wedge e, \wedge e)_\Lambda, (e,e)_\Lambda \omega' \rangle = \langle \omega\lambda, \lambda\omega' \rangle.$$

(Б.2) Лемма. *Пусть элемент $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{E}}$ сопряжен с $\xi \in \mathcal{E}$ по отношению к эрмитовым метрикам на $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^k_D(\mathcal{A})$, $\mathcal{E} \otimes \Omega^k_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$, т.е.*

$$\langle \overline{\omega}, \gamma(\xi) \rangle = \langle \overline{\omega} \otimes \hat{\xi}, \gamma \rangle$$

для $\overline{\omega} \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^k_D(\mathcal{A})$, $\gamma \in \mathcal{E} \otimes \Omega^k_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$. Тогда для любого базиса $e \in \mathcal{U}$ имеем

$$\hat{a} = a^* \lambda^{-1},$$

где $\xi = ea$, $\hat{\xi} = \hat{a} \cdot \wedge e$, $\lambda = \lambda(\Lambda, e)$.

Доказательство. Можно считать, что $\overline{\omega} = e \otimes \omega$, $\gamma = e \otimes \sigma \otimes \wedge e$. Тогда

$$\langle \overline{\omega}, \gamma(\xi) \rangle = \langle e \otimes \omega, e \otimes \sigma \cdot \wedge e(ea) \rangle = \langle \omega, (e,e)_\Lambda \sigma a \rangle = \langle \omega a^*, \lambda\sigma \rangle.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\langle \overline{\omega} \otimes \hat{\xi}, \gamma \rangle &= \langle e \otimes \omega \otimes \hat{a} \cdot \wedge e, e \otimes \sigma \otimes \wedge e \rangle = \langle \omega(\hat{a} \cdot \wedge e, \wedge e)_\Lambda, \lambda\sigma \rangle \\ &= \langle \omega \hat{a} \lambda, \lambda \sigma \rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, $a^* = \hat{a}\lambda$. •

Отметим также, что выражение $a^*\lambda^{-1} \wedge e$ не зависит от выбора базиса: для $e' = eu^*$ имеем

$$\wedge e' = u \cdot \wedge e, \quad a' = ua, \quad {a'}^* = a^* u^*, \quad \lambda' = u\lambda u^*, \quad {\lambda'}^{-1} = u\lambda^{-1}u^*$$

и

$${a'}^* {\lambda'}^{-1} \wedge e' = a^* u^* u \lambda^{-1} u^* u \wedge e = u^* \lambda^{-1} \wedge e.$$

Б.V. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Вычислим вариацию действия $S = S(\nabla, \xi)$ при вариации $\nabla \mapsto \nabla + \delta\nabla$ Λ-эрмитовой связности ∇ на $\mathcal{E}$ и вариации $\xi \mapsto \xi + \delta\xi$ сечения $\xi \in \mathcal{E}$, сохраняя только члены, линейные по $\delta\nabla$ и $\delta\xi$.

Мы всегда считаем, что связность $\nabla' = \nabla + \delta\nabla$ Λ-эрмитова. Для того, чтобы сформулировать результат, нам потребуется несколько определений.

(1) Для $\xi \in \mathcal{E}$ элемент $\hat{\xi} \in \hat{\mathcal{E}}$ определяется следующим условием:

$$\langle \omega, \gamma(\xi) \rangle = \langle \omega \otimes \hat{\xi}, \gamma \rangle$$

при всех $\omega \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^k(\mathcal{A})$, $\gamma \in \mathcal{E} \otimes \Omega_D^k(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$, см. лемму Б.2.

(2) Связность

$$\hat{\nabla} \colon \hat{\mathcal{E}} \to \Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$$

на $\hat{\mathcal{E}}$ определяется связностью ∇ при помощи условия $\hat{\nabla}\hat{e} = \Phi^* \otimes \hat{e}$, где $\nabla e = e \otimes \Phi$, $\hat{e} = \lambda^{-1} \cdot \wedge e$.

Легко видеть, что это определение не зависит от выбора базиса $e \in \mathcal{U}$.

(3) Определим теперь ток J как элемент пространства $\mathcal{E} \otimes \Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$,

$$J = J(\nabla, \xi) := \nabla\xi \otimes \hat{\xi} - \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi}.$$

(4) Пусть

$$\nabla^* \colon \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}$$

– оператор, сопряженный к связности ∇, т.е. $\langle \nabla^*\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \nabla\eta \rangle$ для любых $\omega \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_D^1(\mathcal{A})$, $\eta \in \mathcal{E}$.

Тогда *обобщенный лапласиан* – это оператор $\nabla^*\nabla \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

(5) Пусть

$$d^* \colon \Omega_D^*(\mathcal{A}) \to \Omega_D^*(\mathcal{A})$$

– оператор, сопряженный с внешним дифференциалом $d \colon \Omega_D^*(\mathcal{A}) \to \Omega_D^*(\mathcal{A})$, $\langle d^*\sigma, \omega \rangle = \langle \sigma, d\omega \rangle$ для всех σ, $\omega \in \Omega_D^*(\mathcal{A})$.

Оператор

$$d_\nabla^* \colon \mathcal{E} \otimes \Omega_D^2(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E} \otimes \Omega_D^1(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$$

определяется формулой $d_\nabla^*(e \otimes \sigma \otimes \hat{e}) = e \otimes (\omega - \omega^*) \otimes \hat{e}$, где

$$\omega = d^*\sigma + \sigma\Phi^* - \Phi\sigma.$$

Мы покажем, что это определение не зависит от выбора базиса $e \in \mathcal{U}$.

(Б.3) Теорема. *Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия $S = S(\nabla, \xi)$ имеют вид*

$$d_\nabla^* \nabla^2 = -J, \tag{Б.3.1}$$

$$\nabla^*\nabla\xi = m^2\xi. \tag{Б.3.2}$$

Б.VI. Оператор d^*. Прежде чем доказывать теорему Б.3, опишем оператор d^* и покажем, что оператор d^*_∇ корректно определен.

(Б.4) Лемма. *Для $\omega \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$ выполняется равенство*

$$d^*\omega = -i[D, \omega],$$

где, напомним, $D = ds^{-1}$ – оператор Дирака. В частности, $(d^*\omega)^* = d^*\omega^*$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathcal{A}$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle d^*\omega, a\rangle &= \langle \omega, da\rangle = \operatorname{Tr}((da)^*\omega)\\ &= \operatorname{Tr}(-i(a^*D - Da^*)\omega)\\ &= -\operatorname{Tr}(a^*i(D\omega - \omega D))\\ &= \langle -i[D,\omega], a\rangle. \quad \bullet\end{aligned}$$

(Б.5) Лемма. *Для $\omega \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$, $\sigma \in \Omega^2_D(\mathcal{A})$ выполняются равенства*

$$d\omega = i(D\omega + \omega D) \in \Omega^2_D(\mathcal{A}), \quad d^*\sigma = -i(D\sigma + \sigma D) \in \Omega^1_D(\mathcal{A}).$$

Доказательство. Второе равенство очевидным образом вытекает из первого. В свою очередь, первое равенство легко следует из определения (2.3) внешнего дифференциала и условия (Б.1). $\bullet$

(Б.6) Следствие. *Для $a \in \mathcal{A}$, $\sigma \in \Omega^2_D(\mathcal{A})$ имеем*

$$\begin{aligned}d^*(a\sigma) &= -da \cdot \sigma + ad^*\sigma,\\ d^*(\sigma a) &= d^*\sigma \cdot a + \sigma da. \quad \bullet\end{aligned}$$

Покажем, что оператор d^*_∇ корректно определен. Выбирая другой базис $e' = eu^*$, имеем

$$\Phi' = udu^* + u\Phi u^*, \quad \lambda' = u\lambda u^*, \quad \hat{e'} = u\hat{e},$$

и для $\sigma' \in \Omega^2_D(\mathcal{A})$ с $e' \otimes \sigma' \otimes \hat{e'} = e \otimes \sigma \otimes \hat{e}$ получаем $\sigma' = u\sigma u^*$. Теперь прямой подсчет с использованием следствия Б.6 и соотношения $u^*u = uu^* = 1$ дает

$$\omega' = u\omega u^*$$

для $\omega = d^*\sigma + \sigma\Phi^* - \Phi\sigma$ и $\omega' = d^*\sigma' + \sigma'\Phi'^* - \Phi'\sigma'$. Отсюда получается требуемое равенство

$$e' \otimes (\omega' - \omega'^*) \otimes \hat{e'} = e \otimes (\omega - \omega^*) \otimes \hat{e}.$$

Б.VII. Вариация энергии $\delta E_\nabla(\xi)$**.** Оператор

$$\delta\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_D(\mathcal{A})$$

$\mathcal{A}$-линеен, поскольку это – разность двух дифференцирований. Таким образом, его можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{E} \otimes \Omega^1_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$.

Кроме того, для базиса $e \in \mathcal{U}$ имеем $\delta\nabla = e \otimes \delta\Phi \otimes (\wedge e)$, где $\delta\nabla(e) = e \otimes \delta\Phi$.

(Б.7) Лемма. *Для* $\xi \in \mathcal{E}$ *выполняется равенство*

$$\langle \delta\nabla, \nabla\xi \otimes \hat{\xi}\rangle = -\langle \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi}, \delta\nabla\rangle.$$

Доказательство. Поскольку связности ∇ и $\nabla' = \nabla + \delta\nabla$ Λ-эрмитовы, то имеет место равенство

$$\lambda \cdot \delta\Phi + (\delta\Phi)^* \lambda = 0.$$

Таким образом, представляя $\xi = ea$, имеем $\nabla\xi = e \otimes (da + \Phi a)$, $\hat{\xi} = a^* \hat{e}$ (см. лемму Б.2) и

$$\begin{aligned}
\langle \delta\nabla, \nabla\xi \otimes \hat{\xi}\rangle &= \langle e \otimes \delta\Phi \otimes (\wedge e), e \otimes (da + \Phi a) \otimes a^* \hat{e}\rangle \\
&= \langle \delta\Phi, \lambda(da + \Phi a)a^*\rangle \\
&= \langle a(da + \Phi a)^* \lambda, (\delta\Phi)^*\rangle \\
&= \langle a(da + \Phi a)^*, (\delta\Phi)^* \lambda\rangle \\
&= -\langle a(da + \Phi a)^*, \lambda \cdot \delta\Phi\rangle \\
&= -\langle e \otimes a(da + \Phi a)^* \otimes \hat{e}, e \otimes \delta\Phi \otimes \wedge e\rangle \\
&= -\langle \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi}, \delta\nabla\rangle. \quad \bullet
\end{aligned}$$

(Б.8) Лемма. *Для* $e \otimes \omega \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$, $\xi = ea \in \mathcal{E}$ *выполняются равенства*

$$\begin{aligned}
\nabla^*(e \otimes \omega) &= e \cdot \lambda^{-1} \left(d^*(\lambda\omega) + \Phi^* \lambda\omega\right), \\
\nabla^*\nabla\xi &= e \cdot \lambda^{-1} \left(d^*\left(\lambda(da + \Phi a)\right) + \Phi^* \lambda(da + \Phi a)\right),
\end{aligned}$$

где $\nabla e = e \otimes \Phi$.

Доказательство. Второе равенство вытекает из первого, поскольку $\nabla\xi = e \otimes (da + \Phi a)$. Для того, чтобы доказать первое равенство, возьмем $\eta \in \mathcal{E}$, $\eta = e \cdot b$ и рассмотрим

$$\begin{aligned}\langle \nabla^*(e \otimes \omega), \eta\rangle &= \langle e \otimes \omega, \nabla\eta\rangle = \langle e \otimes \omega, e \otimes (db + \Phi b)\rangle \\ &= \langle \omega, \lambda(db + \Phi b)\rangle = \langle \lambda\omega, db\rangle + \langle \lambda\omega, \Phi b\rangle \\ &= \langle d^*(\lambda\omega) + \Phi^*\lambda\omega, b\rangle \\ &= \langle \lambda^{-1}\left(d^*(\lambda\omega) + \Phi^*\lambda\omega\right), (e,e)_\Lambda b\rangle \\ &= \langle e \cdot \lambda^{-1}\left(d^*(\lambda\omega) + \Phi^*\lambda\omega\right), \eta\rangle. \quad \bullet\end{aligned}$$

Для Λ-эрмитовой связности $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_D(\mathcal{A})$ определим две (вообще говоря, различные) связности

$$\hat{\nabla}, \overline{\nabla}\colon \hat{\mathcal{E}} \to \Omega^1_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$$

на $\hat{\mathcal{E}}$, полагая для базиса $e \in \mathcal{U}$

$$\hat{\nabla}\hat{e} = \Phi^* \otimes \hat{e} \quad \text{и} \quad \overline{\nabla}(\wedge e) = \Phi^* \otimes \wedge e,$$

где $\nabla e = e \otimes \Phi$, $\hat{e} = \lambda^{-1} \cdot \wedge e$. Поскольку связность ∇ Λ-эрмитова, то, как легко видеть,

$$(\hat{\nabla} - \overline{\nabla})(\wedge e) = \lambda(\Phi + \Phi^*)\lambda^{-1} \otimes \wedge e.$$

Таким образом, для унитарной связности ∇, т.е. $\Phi + \Phi^* = 0$, имеем $\overline{\nabla} = \hat{\nabla}$.

Если дано $\xi = e \cdot a \in \mathcal{E}$, то $\wedge\xi = a^*(\wedge e)$. Следовательно,

$$\overline{\nabla}(\wedge\xi) = (da^* + a^*\Phi^*) \otimes \wedge e.$$

Отсюда, как в лемме Б.8, получаем следующее утверждение (оставляя подробности читателю).

(Б.9) Лемма. *Для $\omega \otimes \wedge e \in \Omega^1_D(\mathcal{A}) \otimes \hat{\mathcal{E}}$ и $\wedge\xi = a^*(\wedge e) \in \hat{\mathcal{E}}$ выполняются равенства*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}^*(\omega \otimes \wedge e) &= (d^*(\omega\lambda) + \omega\lambda\Phi)\,\hat{e}, \\ \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(\wedge\xi) &= (d^*\left((da^* + a^*\Phi^*)\lambda\right) + (da^* + a^*\Phi^*)\lambda\Phi)\,\hat{e}. \quad \bullet\end{aligned}$$

Прямой подсчет с использованием лемм Б.8 и Б.9 дает

(Б.10) Следствие. *Для ξ, $\delta\xi \in \mathcal{E}$ выполняется равенство*

$$\langle \delta\xi, \nabla^*\nabla\xi\rangle = \langle \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(\wedge\xi), \wedge\delta\xi\rangle. \quad \bullet$$

Пусть $\delta E_\nabla(\xi)$ – часть разности $E_{\nabla+\delta\nabla}(\xi+\delta\xi) - E_\nabla(\xi)$, линейная по $\delta\nabla$ и $\delta\xi$.

(Б.11) Лемма. *Вариация энергии имеет вид*

$$\delta E_\nabla(\xi) = \langle J, \delta\nabla\rangle + \langle \nabla^*\nabla\xi, \delta\xi\rangle + \langle \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(\wedge\xi), \wedge\delta\xi\rangle,$$

где $J = \nabla\xi \otimes \hat{\xi} - \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi}$.

Доказательство. Поскольку

$$E_{\nabla+\delta\nabla}(\xi+\delta\xi) - E_\nabla(\xi) = \langle(\nabla+\delta\nabla)(\xi+\delta\xi), (\nabla+\delta\nabla)(\xi+\delta\xi)\rangle - \langle\nabla\xi, \nabla\xi\rangle,$$

то, используя лемму Б.7 и следствие Б.10, получаем

$$\begin{aligned}\delta E_\nabla(\xi) &= \langle\nabla\xi, \nabla(\delta\xi)\rangle + \langle\nabla(\delta\xi), \nabla\xi\rangle + \langle\nabla\xi, \delta\nabla(\xi)\rangle + \langle\delta\nabla(\xi), \nabla\xi\rangle\\ &= \langle\nabla^*\nabla\xi, \delta\xi\rangle + \langle\delta\xi, \nabla^*\nabla\xi\rangle + \langle\nabla\xi\otimes\hat{\xi}, \delta\nabla\rangle + \langle\delta\nabla, \nabla\xi\otimes\hat{\xi}\rangle\\ &= \langle J, \delta\nabla\rangle + \langle\nabla^*\nabla\xi, \delta\xi\rangle + \langle\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}(\wedge\xi), \wedge\delta\xi\rangle. \quad \bullet\end{aligned}$$

Б.VIII. Вариация действия Янга–Миллса $\mathrm{YM}(\nabla)$**.** Прямой подсчет показывает, что оператор

$$T := \nabla\circ\delta\nabla + \delta\nabla\circ\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2_D(\mathcal{A})$$

$\mathcal{A}$-линеен. Таким образом его можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{E}\otimes\Omega^2_D(\mathcal{A})\otimes\hat{\mathcal{E}}$. Кроме того,

$$T = e\otimes(d(\delta\Phi) + \Phi\cdot\delta\Phi + \delta\Phi\cdot\Phi)\otimes\wedge e,$$

где $\nabla e = e\otimes\Phi$, $\delta\nabla(e) = e\otimes\delta\Phi$ для Φ, $\delta\Phi\in\Omega^1_D(\mathcal{A})$.

(Б.12) Лемма. *Пусть* $\theta\in\Omega^2_D(\mathcal{A})$ *– оператор кривизны связности* ∇, $\nabla^2 e = e\otimes\theta$. *Тогда*

$$\langle\nabla^2, T\rangle = \langle e\otimes\omega\otimes\hat{e}, \delta\nabla\rangle,$$

где $\omega = d^*(\theta\lambda) + \theta\lambda\Phi^* - \Phi\theta\lambda$, $\nabla e = e\otimes\Phi$.

Доказательство. Представляя кривизну ∇^2 в виде $\nabla^2 = e\otimes\theta\otimes\wedge e$, получаем

$$\langle\nabla^2, T\rangle = \langle\theta\lambda, \lambda\,(d(\delta\Phi) + \Phi\cdot\delta\Phi + \delta\Phi\cdot\Phi)\rangle.$$

Поскольку связность ∇ Λ-эрмитова, то

$$\lambda\cdot d(\delta\Phi) = d(\lambda\cdot\delta\Phi) - (\lambda\Phi + \Phi^*\lambda)\cdot\delta\Phi.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\langle \nabla^2, T\rangle &= \langle d^*(\theta\lambda) - \lambda^{-1}(\lambda\Phi + \Phi^*\lambda)^*\theta\lambda, \lambda\cdot\delta\Phi\rangle\\ &\quad + \langle \Phi^*\lambda\theta\lambda, \delta\Phi\rangle + \langle \theta\lambda\Phi^*, \lambda\cdot\delta\Phi\rangle\\ &= \langle d^*(\theta\lambda) - \lambda^{-1}(\lambda\Phi + \Phi^*\lambda)\theta\lambda + \lambda^{-1}\Phi^*\lambda\theta\lambda + \theta\lambda\Phi^*, \lambda\cdot\delta\Phi\rangle\\ &= \langle \omega, \lambda\cdot\delta\Phi\rangle = \langle e\otimes\omega\otimes\hat{e}, \delta\nabla\rangle. \quad \bullet\end{aligned}$$

Используя равенство $\lambda\cdot\delta\Phi + (\delta\Phi)^*\lambda = 0$ так же, как в доказательстве леммы Б.7, аналогичным вычислением получаем следующий результат (подробности оставляем читателю).

(Б.13) Лемма. *В условиях леммы* В.12 *выполняется равенство*

$$\langle T, \nabla^2\rangle = -\langle e\otimes\omega^*\otimes\hat{e}, \delta\nabla\rangle. \quad \bullet$$

Пусть

$$\delta\,\mathrm{YM}(\nabla)$$

– часть разности $\mathrm{YM}(\nabla + \delta\nabla) - \mathrm{YM}(\nabla)$, линейная по $\delta\nabla$.

(Б.14) Лемма. *Для вариации действия Янга–Миллса имеет место равенство*

$$\delta\,\mathrm{YM}(\nabla) = \langle d^*_\nabla\nabla^2, \delta\nabla\rangle.$$

Доказательство. Так как $\nabla^2 = e\otimes\theta\otimes\wedge e = e\otimes\theta\lambda\otimes\hat{e}$, то, применяя леммы Б.12 и Б.13, получаем

$$\begin{aligned}\delta\,\mathrm{YM}(\nabla) &= \langle \nabla^2, T\rangle + \langle T, \nabla^2\rangle\\ &= \langle e\otimes(\omega - \omega^*)\otimes\hat{e}, \delta\nabla\rangle\\ &= \langle d^*_\nabla\nabla^2, \delta\nabla\rangle,\end{aligned}$$

где $\omega = d^*(\theta\lambda) + \theta\lambda\Phi^* - \Phi\theta\lambda$. $\bullet$

(Б.15) Следствие. *Для вариации действия S имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\delta S(\nabla, \xi) &:= \delta\,\mathrm{YM}(\nabla) + \delta E_\nabla(\xi) - m^2\delta\|\xi\|^2\\ &= \langle d^*_\nabla\nabla^2 + J, \delta\nabla\rangle\\ &\quad + \langle \nabla^*\nabla\xi - m^2\xi, \delta\xi\rangle\\ &\quad + \langle \overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\wedge\xi - m^2\wedge\xi, \wedge\delta\xi\rangle.\end{aligned}$$

Доказательство. Это вытекает из лемм Б.11 и Б.14 и того, что

$$\delta\|\xi\|^2 = \langle \xi, \delta\xi \rangle + \langle \delta\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \delta\xi \rangle + \langle \wedge\xi, \wedge\delta\xi \rangle. \quad \bullet$$

Доказательство теоремы Б.3. Поскольку для $\delta\xi = e \cdot \delta a$ и $\wedge\delta\xi = (\delta a)^* \wedge e$ имеем

$$\delta a = \mathrm{Re}(\delta a) + i \cdot \mathrm{Im}(\delta a) \quad \text{и} \quad (\delta a)^* = \mathrm{Re}(\delta a) - i \cdot \mathrm{Im}(\delta a),$$

то можно считать, что вариации $\delta\xi$ и $\wedge\delta\xi$ независимы. Таким образом, уравнения Эйлера–Лагранжа для действия S имеют вид

$$\begin{aligned} d^*_\nabla \nabla^2 &= -J, \\ \nabla^* \nabla \xi &= m^2 \xi, \\ \overline{\nabla}^* \overline{\nabla} \wedge \xi &= m^2 \wedge \xi. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что для $\omega \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$ выполнено равенство $(d^*\omega)^* = d^*\omega^*$ (см. лемму Б.4), мы видим из лемм Б.8 и Б.9, что третье уравнение следует из второго. $\bullet$

Выбирая базис $e \in \mathcal{U}$ и представляя $\nabla e = e \otimes \Phi$, $\xi = ea$, $\lambda = \lambda(\Lambda, e)$, $\hat{\xi} = a^* \hat{e}$, получаем

$$\begin{aligned} J &= \nabla\xi \otimes \hat{\xi} - \xi \otimes \hat{\nabla}\hat{\xi} \\ &= e \otimes \left((da + \Phi a)a^* - a(da + \Phi a)^*\right) \otimes \hat{e}. \end{aligned}$$

Следовательно, из лемм Б.8 и Б.14 вытекает, что уравнения Эйлера–Лагранжа (Б.3.1) и (Б.3.2) в координатах имеют вид

$$\omega - \omega^* = a(da + \Phi a)^* - (da + \Phi a)a^*, \tag{Б.16.1}$$

$$d^*\left(\lambda(da + \Phi a)\right) + \Phi^* \lambda(da + \Phi a) = m^2 \lambda a, \tag{Б.16.2}$$

где $\omega = d^*(\theta\lambda) + \theta\lambda\Phi^* - \Phi\theta\lambda$.

Для случая диполя пусть $p = (1, 0)$, $q = 1 - p \in \mathcal{A}$ – проекторы. Тогда

$$a = \xi_0 p + \xi_1 q, \quad \lambda = \lambda_0 p + \lambda_1 q, \quad \Phi = -i\Delta s^2(\phi_{01} p dp + \phi_{10} q dp),$$

$$\theta = i(\phi_{10} - \phi_{01} + i\phi_{10}\phi_{01}\Delta s^2) \cdot 1,$$

где ξ_0, ξ_1, ϕ_{01}, $\phi_{10} \in \mathbb{C}$, λ_0, $\lambda_1 > 0$.

Прямые вычисления, использующие условие Λ-эрмитовости (3.2.3) и леммы Б.4 и Б.5 для нахождения внешнего дифференциала d^*, показывают, что уравнение (Б.16.1) принимает вид (3.2.1), а (Б.16.2) – вид (3.2.2). На некотором шаге следует воспользоваться тем, что оператор θ самосопряжен в силу условия (3.2.3): $\theta^* = \theta$.

Литература

1. С. В. Буяло, В. Л. Кобельский, *Геометризация граф-многообразий. I. Конформная геометризация.* — Алгебра и анализ **7**, № 2 (1995), 3–45.
2. С. В. Буяло, В. Л. Кобельский, *Геометризация граф-многообразий. II. Изометрическая геометризация.* — Алгебра и анализ **7**, № 3 (1995), 96–117.
3. С. В. Буяло, В. Л. Кобельский, *Геометризация бесконечных граф-многообразий.* — Алгебра и анализ **8** (1996).
4. A. Chamseddine, A. Connes, *The spectral action principle.* Preprint IH-ES/M/96/37.
5. A. Connes, *Non Commutative Geometry.* Academic Press, 1994.
6. A. Connes, *Non commutative geometry and physics.* Preprint IHES/M/93/32.
7. A. Connes, *Noncommutative geometry and reality.* — J. Math. Phys. **36** (1995).
8. A. Connes, *Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry.* — Commun. Math. Phys. **182** (1996), 155–176.
9. A. Connes, H. Moscovici, *The local index formula in noncommutative geometry.* — GAFA **5** (1995), 174–243.
10. W. Kalau, *Hamilton formalism in non-commutative geometry.* — J. Geom. Phys. **18** (1996), 349–380.
11. W. Kalau, N. A. Papadopoulos, J. Plass, J.-M. Warzecha, *Differential algebras in non-commutative geometry.* — J. Geom. Phys. **16** (1995), 149–167.
12. W. Kalau, M. Walze, *Gravity, non-commutative geometry and the Wodzicki residue.* — J. Geom. Phys. **16** (1995), 327–344.
13. T. Schücker, J.-M. Zylinski, *Connes' model building kit.* — J. Geom. Phys. **16** (1995), 207–326.
14. A. Sitarz, *Noncommutative geometry and gauge theory on discrete groups.* — J. Geom. Phys. **15** (1995), 123–136.
15. J. C. Várilly, J. M. Gracia-Bondia, *Connes' noncommutative differential geometry and the Standard Model.* — J. Geom. Phys. **12** (1993), 223–301.

Buyalo S. V. Metrics of nonpositive curvature on graph-manifolds and electromagnetic fields on graphs.

A 3-dimensional graph-manifold M consists of simple blocks, which are products of compact surfaces with boundary by the circle. The global structure of M can be as complicated as one likes and is described by a graph which can be arbitrary. A metric of nonpositive curvature (an NPC-metric) on M, if it exists, is described essentially by a finite number of parameters satisfying a geometrization equation. In the paper, this equation is shown to be a discrete version of the Maxwell equations of classical electrodynamics, and its solutions, i.e., NPC-metrics on M, are critical configurations of the same sort of action that describes interaction of an electromagnetic field with a scalar charged field. This analogy is established in the framework of A. Connes' spectral calculus (noncommutative geometry).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail buyalo@pdmi.ras.ru

Поступило 23 февраля 2000 г.