Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

Н. А. Вавилов, В. А. Петров

О НАДГРУППАХ EO($2l$,R)

**Дорогому Анатолию Владимировичу
с восхищением и благодарностью**

В настоящей работе мы рассматриваем задачу описания подгрупп в полной линейной группе $\mathrm{GL}(2l, R)$ над коммутативным кольцом R, содержащих элементарную ортогональную группу $\mathrm{EO}(2l, R)$, в предположении, что $2 \in R^*$, а $l \geqslant 3$. Оказывается, для каждой такой подгруппы H существует единственный идеал A в R такой, что H лежит между группой $\mathrm{EO}(2l, R)E(2l, R, A)$ и ее нормализатором в $\mathrm{GL}(2l, R)$. Точнее, целью настоящей работы является доказательство следующего результата.

Теорема. *Пусть R – коммутативное кольцо такое, что $2 \in R^*$, а $l \geqslant 3$. Тогда для любой подгруппы H в $G = \mathrm{GL}(2l, R)$, содержащей элементарную ортогональную группу $\mathrm{EO}(2l, R)$ существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{EO}(2l, R)E(2l, R, A) \leqslant H \leqslant N_G(\mathrm{EO}(2l, R)E(2l, R, A)).$$

Заметим, что имеется большое количество работ о надгруппах классических групп, но все они относятся к случаю, когда $R = K$ – поле (или тело в случае унитарных групп). Специально этому вопросу посвящены работы Р.Дая, О.Кинга и Ли Шанчжи [17 – 19], [21], [22], [24 – 26]. В действительности, в большинстве случаев нормализаторы классических групп максимальны в $\mathrm{GL}(n, K)$ (либо, в характеристике 2, в другой классической группе) и образуют класс Ашбахера $\mathcal{C}_8$, так что, по крайней мере для алгебраически замкнутого и конечного поля, надгруппы классических групп изучались в связи с классификацией максимальных подгрупп, см., например, [12],

Настоящая работа выполнена в рамках проектов РФФИ 98–01–00825 (СПбГУ) и 00–01–00441 (ПОМИ РАН). Часть работы выполнена при поддержке SFB-343 (университет Билефельда).

[23]. С другой стороны, изотропные классические группы в векторных представлениях содержат унипотентные элементы небольшого вычета, скажем, трансвекции или произведения двух коммутирующих трансвекций, так что в случае поля описание их надгрупп вытекает также из теорем типа Маклафлина, т.е. описания неприводимых подгрупп, порожденных маломерными элементами. Именно такого типа соображения использовались Ли Шанчжи. Наиболее сильные результаты в этом направлении принадлежат, по-видимому, Е. Л. Башкирову (см. [1–3] и содержащиеся там ссылки), при этом, в действительности, описываются подгруппы в $\mathrm{GL}(n, K)$, содержащие классическую группу над подполем $L \leqslant K$ таким, что расширение K/L алгебраическое. Вероятно, эти результаты можно вывести и из общих теорем Ф.Тиммесфельда о подгруппах, порожденных квадратичными подгруппами [28].

Возможность обобщения этих результатов на произвольные коммутативные кольца с использованием метода разложения унипотентов отмечалась в [30], [31], [27], но детальные доказательства никогда не публиковались. В действительности, там утверждалось, что тем же методом можно описать и подгруппы в $\mathrm{GL}(n, R)$, нормализуемые элементарной классической группой. Этот результат был бы не только обобщением упомянутых результатов Дая, Кинга и Ли Шанчжи о надгруппах классических групп, но и теорем о нормальном строении классических групп, таких, как теорема Уилсона-Голубчика для GL_n и теоремы Голубчика для Sp_{2l} и SO_n. Ограничение $2 \in R^*$ в нашем результате необходимо, без этого предположения могут возникать другие подгруппы.

§1. Основные обозначения

Используемые нами обозначения большей частью совершенно стандартны и совпадают с обозначениями, употреблявшимися в [27]. Стандартным источником по теории линейных групп над кольцами является монументальная книга А.Хана и О.Т.О'Миры [20]. Там можно найти, в частности, определения всех используемых нами понятий.

Пусть вначале G – произвольная группа. Под коммутатором двух элементов $x, y \in G$ мы всегда понимаем их левонормированный коммутатор $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Кратные коммутаторы также левонормированы: $[x, y, z] = [[x, y], z]$. Через ${}^x y = xyx^{-1}$ и $y^x = x^{-1}yx$ обозначаются, соответственно, левый и правый сопряженные к y при помощи

x. Запись $H \leqslant G$ обозначает, что H – подгруппа в G, а $H \trianglelefteq G$б что H – нормальный делитель. Для подмножества $X \subseteq G$ через $\langle X \rangle$ обозначается порожденная им подгруппа. Если $H \leqslant G$, то $\langle X \rangle^H$ обозначает наименьшую подгруппу в G, содержащую X и нормализуемую H. Для двух подгрупп $F, H \leqslant G$ через $[F, H]$ обозначается их взаимный коммутант, порожденный $[f, h]$, $f \in F$, $h \in H$.

Далее, пусть R – произвольное коммутативное кольцо с 1, R^* – его мультипликативная группа, $G = \mathrm{GL}(n, R)$ и $\mathrm{SL}(n, R)$ – полная и специальная линейные группы степени n над R, соответственно. Как обычно, для матрицы $a \in G$ через a_{ij} обозначается ее коэффициент, стоящий на месте (i, j), т.е. $a = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Через $a^{-1} = (a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная.

Как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой на месте (i, j) стоит 1 и нули на всех остальных местах. Через $t_{ij}(\xi)$ для $\xi \in R$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, обозначается элементарная трансвекция. В дальнейшем мы будем без всякого специального упоминания пользоваться стандартными соотношениями между элементарными трансвекциями, такими как аддитивность $t_{ij}(\xi)t_{ij}(\zeta) = t_{ij}(\xi + \zeta)$ и коммутационная формула Шевалле $[t_{ij}(\xi), t_{jh}(\zeta)] = t_{ih}(\xi\zeta)$, см., например, [10], [16].

Пусть теперь $I \trianglelefteq R$ – идеал в R. Обозначим через $E(n, I)$ подгруппу в G, порожденную всеми элементарными трансвекциями уровня I:

$$E(n, I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle .$$

В наиболее важном случае $I = R$ группа $E(n, R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями, называется (абсолютной) элементарной группой. В дальнейшем основную роль играют (относительные) элементарные группы $E(n, R, I)$. Напомним, что $E(n, R, I)$ – это нормальное замыкание $E(n, I)$ в $E(n, R)$:

$$E(n, R, I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle^{E(n,R)}.$$

Теорема Суслина утверждает, что если R коммутативно и $n \geqslant 3$, то группа $E(n, R, I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$. Известно, что при $n \geqslant 3$ подгруппа $E(n, R, I)$ порождается всеми трансвекциями вида $z_{ij}(\xi, \zeta) = t_{ji}(\zeta)t_{ij}(\xi)t_{ji}(-\zeta)$, $\xi \in I$, $\zeta \in R$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ (см., например, [9]).

Пусть, по-прежнему, $I \trianglelefteq R$, а R/I – фактор-кольцо R по I. Обозначим через $\rho_I : R \longrightarrow R/I$ каноническую проекцию, отправляющую

$\lambda \in R$ в $\overline{\lambda} = \lambda + I \in R/I$. Применяя проекцию ко всем компонентам матриц, мы получим гомоморфизм редукции $\rho_I : \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R/I)$, сопоставляющий матрице $a = (a_{ij})$ ее класс $\overline{a} = (\overline{a}_{ij})$ по модулю I. Ядро гомоморфизма ρ_I обозначается $\mathrm{GL}(n, R, I)$ и называется главной конгруэнц-подгруппой в G уровня I.

Пусть теперь $C(n, R)$ обозначает центр группы $\mathrm{GL}(n, R)$, состоящий из скалярных матриц εe, $\varepsilon \in R^*$. Полный прообраз центра группы $\mathrm{GL}(n, R/I)$ обозначается $C(n, R, I)$ и называется полной конгруэнц-подгруппой уровня I. Группа $C(n, R, I)$ состоит из всех матриц, сравнимых со скалярной матрицей по модулю I. Ключевым моментом для проведения редукции по модулю идеала является следуюшая стандартная коммутационная формула

$$[E(n, R), C(n, R, A)] = E(n, R, A).$$

Для интересующего нас случая, когда R коммутативно и $n \geqslant 3$, эта формула доказана Васерштейном [29] и Боревичем и Вавиловым [4].

§2. Расщепимые ортогональные группы

В настоящей статье обычно мы имеем дело со случаем четного $n = 2l$. Нам будет удобно следуя [16] занумеровать строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, l, -l, \dots, -1$. В случае нечетного n мы полагаем $n = 2l + 1$ и нумеруем строки и столбцы матриц из G следующим образом: $1, \dots, l, 0, -l, \dots, -1$. Обозначим через $\mathrm{sdiag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ матрицу, у которой на побочной диагонали в направлении с Северо-Востока на Юго-Запад стоят $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ и нули во всех остальных местах, и положим $f = f_n = \mathrm{sdiag}(1, \dots, 1)$, где число 1 равняется n. Иначе говоря, элементы матрицы $f = (f_{ij})$ определяются условием $f_{ij} = \delta_{i,-j}$.

Без предположения $2 \in R^*$ формулировки наших основных результатов заметно усложнятся. Однако многие вспомогательные результаты доказываются нами без этого предположения, поэтому мы должны уточнить определение расщепимых ортогональных групп по сравнению с работами [5 – 8], где условие $2 \in R^*$ накладывалось с самого начала. Правильное определение классических групп над кольцами, не зависящее от условия $2 \in R^*$, было предложено в диссертации А.Бака [13], детальное изложение этой теории можно найти в [14], [20]. В настоящей статье мы ограничимся случаем четного $n = 2l$.

Мы следуем статье [15], где рассматривались гиперболические унитарные группы $\mathrm{SU}^{\lambda}(2l, R, \Lambda)$, где R – ассоциативное кольцо с инволюцией $x \mapsto \overline{x}$, $\lambda \in R^*$, $\lambda\overline{\lambda} = 1$, – симметрия, а $\Lambda \leqslant R$ – форменный параметр. Рассматриваемые нами группы $\mathrm{SO}(2l, R)$ получаются, если считать, что инволюция тривиальна (и, таким образом, R автоматически коммутативно), $\lambda = 1$, а $\Lambda = 0$.

По определению расщепимая ортогональная группа $\Gamma = \mathrm{SO}(2l, R)$ состоит из тех матриц a из специальной линейной группы $\mathrm{SL}(2l, R)$, которые сохраняют квадратичную форму $x_1x_{-1} + \ldots + x_lx_{-l}$. Это значит, что матрица $g = (g_{ij}) \in \mathrm{SL}(n, R)$ в том и только том случае принадлежит $\mathrm{SO}(2l, R)$, когда

O1) $g'_{ij} = g_{-j,-i}$ для всех $i, j = 1, \ldots, -1$,

O2) $\sum g_{ij}g_{-i,j} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant l$, для всех $j = 1, \ldots, -1$.

С точки зрения теории алгебраических групп группа $\mathrm{SO}(2l, R)$ является группой Шевалле типа D_l (теорема Ри-Дьедонне).

Поясним, что именно означают эти условия. Условие O1 означает в точности, что g сохраняет билинейную форму с матрицей Грама f_{2l}, т.е. $gf_{2l}g^t = f_{2l}$. Условие же O2 означает, что все столбцы матрицы g лежат на квадрике $x_1x_{-1} + \ldots + x_lx_{-l} = 0$. Ясно, что условие O1 влечет, что тогда то же самое верно и для строк.

Если предполагать дополнительно, что $2 \in R^*$, то O2 вытекает из O1, таким образом, в этом случае $\mathrm{SO}(2l, R)$ состоит из тех матриц $g \in \mathrm{GL}(2l, R)$, для которых $\det g = 1$ и $gf_{2l}g^t = f_{2l}$. В общем же случае из O1 вытекает лишь, что $\sum g_{ij}g_{-i,j} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant -1$, а это совсем не то же самое, что утверждается в O2.

Кроме специальных, рассматриваются также полные ортогональные группы $\mathrm{GO}(2l, R)$, сохраняющие соответствующую форму в смысле подобия. Иначе говоря, матрицы из $\mathrm{GO}(2l, R)$ удовлетворяют соотношению $gf_{2l}g^t = \lambda f_{2l}$ для подходящего мультипликатора $\lambda = \lambda(g) \in R^*$. Таким образом, для группы $\mathrm{GO}(2l, R)$ условие O1 должно быть заменено на следующее:

GO1) $\lambda(g)g'_{ij} = g_{-j,-i}$ для всех $i, j = 1, \ldots, -1$,

в то время как условие O2 остается без изменений.

Как обычно, (элементарной) ортогональной трансвекцией называется одна из матриц $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq \pm j$, вида

$$T_{ij}(\xi) = T_{-j,-i}(-\xi) = e + \xi e_{ij} - \xi e_{-j,-i},$$

С точки зрения теории групп Шевалле это корневой элемент группы Г. Соотношения между ортогональными трансвекциями являются частными случаями коммутационной формулы Шевалле (см. [9, 16]), в явном виде они приведены, например, в [5, 6]. Основную роль в настоящей работе играет элементарная ортогональная группа $\mathrm{EO}(2l, R)$, т.е. подгруппа в Г, порожденная всеми элементарными ортогональными трансвекциями вида $T_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $i \neq \pm j$. В дальнейшем мы существенно пользуемся следующим результатом, принадлежащим Суслину и Копейко [11] (см. также [30], [15], [27] по поводу дальнейших ссылок и других доказательств).

Лемма 1. *Пусть R – коммутативное кольцо. Тогда для любого $l \geqslant 3$ элементарная группа $\mathrm{EO}(2l, R)$ нормальна в $\mathrm{GO}(2l, R)$.*

Как хорошо известно, этот результат не имеет места при $l = 2$. Обычно мы будем использовать этот результат в следующей форме.

Лемма 2. *Пусть $l \geqslant 3$. Тогда если $[g, \mathrm{EO}(2l, R)] \leqslant \mathrm{GO}(2l, R)$ для некоторого $g \in \mathrm{GL}(2l, R)$, то $g \in \mathrm{GO}(2l, R)$.*

Доказательство. По теореме Суслина-Копейко

$$[g, \mathrm{EO}(2l, R), \mathrm{EO}(2l, R)] \leqslant \mathrm{EO}(2l, R).$$

Так как при $l \geqslant 3$ группа $\mathrm{EO}(2l, R)$ совершенна, утверждение леммы вытекает теперь из леммы о трех подгруппах.

Обозначим через $W = W(D_l)$ группу Вейля группы Г. Напомним, что октаэдральная группа Oct_l состоит из всех перестановок из симметрической группы S_{2l}, коммутирующих со сменой знака, т.е. таких, что $w(-i) = -w(i)$ для всех i (напомним, что наши индексы всегда занумерованы так: $1, \ldots, l, -l, \ldots, -1$). Группа же W_{2l} – это подгруппа индекса 2 октаэдральной группы $\mathrm{Oct}_l \leqslant S_{2l}$, состоящая из четных перестановок. Для перестановки $w \in W$ мы будем той же буквой обозначать и любую ортогональную мономиальную матрицу вида $\sum \varepsilon_i e_{w(i),j}$, где $\varepsilon_i \in R^*$.

В одном месте для упрощения доказательства мы явно воспользуемся содержащимися в $\mathrm{EO}(2l, R)$ полупростыми элементами. А именно, для $i \neq \pm j$, $\varepsilon \in R^*$, обозначим через $h_{ij}(\varepsilon)$ матрицу

$$h_{ij}(\varepsilon) = e - (\varepsilon - 1)e_{ii} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{jj} - (\varepsilon^{-1} - 1)e_{-i,-i} - (\varepsilon - 1)e_{-j,-j},$$

называемую в теории алгебраических групп *полупростым корневым элементом*. Как очень хорошо известно (см., например, [10]), матрицы $h_{ij}(\varepsilon)$ выражаются как произведения элементарных ортогональных трансвекций, т.е. принадлежат $\mathrm{EO}(2l, R)$. В настоящей работе мы используем главным образом корневые инволюции $h_{ij}(-1)$, которые мы обозначаем просто через h_{ij}. В действительности, мы хотели бы воспользоваться инволюциями $h_i = e - 2e_{ii} - 2e_{-i,-i}$, которые принадлежат $\mathrm{SO}(2l, R)$, но, вообще говоря, не $\mathrm{EO}(2l, R)$. Впрочем, для нечетного $l \geqslant 3$ это легко исправить, см. § 8.

§3. Элементарные трансвекции в подгруппах, нормализуемых $\mathrm{EO}(2l, R)$

В настоящем параграфе мы предполагаем, что $l \geqslant 3$ и $2 \in R^*$. Ценой некоторого усложнения вычислений можно было бы ослабить эти предположения во многих вспомогательных результатах.

Лемма 3. *Для идеала $A \trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$E(2l, A)^{\mathrm{EO}(2l,R)} = E(2l, R, A).$$

Доказательство. Ясно, что левая часть содержится в правой. Для того, чтобы доказать обратное включение, нам достаточно убедиться в том, что $z_{ij}(\xi, \zeta) = {}^{t_{ji}(\zeta)}t_{ij}(\xi)$ принадлежат $H = E(2l, A)^{\mathrm{EO}(2l,R)}$. Для $i \neq \pm j$ это очевидно, так как в этом случае ${}^{t_{ji}(\zeta)}t_{ij}(\xi) = {}^{T_{ji}(\zeta)}t_{ij}(\xi)$. Таким образом, нам осталось лишь показать, что $z_{i,-i}(\xi, \zeta) \in H$. Для этого возьмем индекс j такой, что $j \neq \pm i$ и выразим $t_{i,-i}(\xi)$ как коммутатор элементарных трансвекций $t_{i,-i}(\xi) = [t_{ij}(\xi), t_{j,-i}(1)]$. Теперь

$$z_{i,-i}(\xi, \zeta) = {}^{t_{-i,i}(\zeta)}t_{i,-i}(\xi) = {}^{t_{-i,i}(\zeta)}[t_{ij}(\xi), t_{j,-i}(1)],$$

Применяя сопряжение при помощи $t_{-i,i}(\zeta)$ к аргументам коммутатора, получаем

$$z_{i,-i}(\xi, \zeta) = [t_{ij}(\xi)t_{-i,j}(\zeta\xi), t_{j,-i}(1)t_{ji}(-\zeta)] = \\ [t_{ij}(\xi)t_{-i,j}(\zeta\xi), T_{j,-i}(1)T_{ji}(-\zeta)] \in H.$$

что и заканчивает доказательство.

Лемма 4. *Пусть H – подгруппа в* $\mathrm{GL}(2l, R)$, *содержащая* $\mathrm{EO}(2l, R)$. *Для $i \neq j$ положим $A_{ij} = \{\xi \in R \mid t_{ij}(\xi) \in H\}$. Тогда для любых $h \neq k$ имеем $A_{hk} = A_{ij} = A$, причем $A \trianglelefteq R$.*

Доказательство. Ясно, что каждое из подмножеств A_{ij}, $i \neq j$, представляет собой аддитивную подгруппу. Сейчас мы покажем, что в действительности они являются идеалами. Пусть вначале $i \neq \pm j$ и $\xi \in A_{ij}$. Возьмем любое $\zeta \in R$, любой индекс h такой, что индексы $\pm i, \pm j, \pm h$ попарно различны, и рассмотрим коммутатор

$$t_{ih}(\xi\zeta) = [t_{ij}(\xi), t_{jh}(\zeta)] = [t_{ij}(\xi), T_{jh}(\zeta)] \in H.$$

Это значит, что $A_{ij}R \subseteq A_{ih}$. В частности, $A_{ij} \subseteq A_{ih}$. Аналогично,

$$t_{hj}(\zeta\xi) = [t_{hi}(\zeta), t_{ij}(\xi)] = [T_{hi}(\zeta), t_{ij}(\xi)] \in H$$

так что $RA_{ij} \subseteq A_{hj}$, и, в частности, $A_{ij} \subseteq A_{hj}$. Таким образом, действительно, все подгруппы A_{ij}, $i \neq \pm j$, совпадают между собой и являются идеалами. Обозначим их общее значение через A.

Рассмотрим теперь аддитивные подгруппы $A_{i,-i}$. Возьмем любое $\xi \in A$ и выберем индекс $j \neq \pm i$. Тогда для любого $\zeta \in R$ имеем

$$t_{i,-i}(\xi\zeta) = [t_{ij}(\xi), t_{j,-i}(\zeta)] = [t_{ij}(\xi), T_{j,-i}(\zeta)] \in H,$$

так что $A \subseteq A_{i,-i}$. Наконец, пусть $\xi \in A_{i,-i}$. Тогда для любого $\zeta \in R$ и любого индекса $j \neq \pm i$ имеем

$$t_{j,-i}(\zeta\xi)t_{i,-j}(\xi\zeta) = [T_{ji}(\zeta), t_{i,-i}(\xi)] \in H.$$

Так как, кроме того, $T_{j,-i}(\zeta\xi) = t_{j,-i}(\zeta\xi)t_{i,-j}(\zeta\xi) \in H$, то $t_{j,-i}(2\zeta\xi) \in H$, так что $2RA_{i,-i} \subseteq A$. В силу условия $2 \in R^*$ это значит, что $A_{i,-i} \subseteq A$. Но это и значит, что все подгруппы $A_{i,-i}$ также совпадают с A.

Суммируя две предшествующие леммы, мы получаем следующий результат.

Лемма 5. *Пусть H – подгруппа в* $\mathrm{GL}(2l, R)$, *содержащая* $\mathrm{EO}(2l, R)$. *Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что $E(2l, R, A) \leqslant H$. При этом, если $t_{ij}(\xi) \in H$ для некоторых $i \neq j$, то $\xi \in A$.*

§4. Основная редукция

Ядром доказательства Теоремы является следующая

Основная лемма. *Предположим, что* $l \geqslant 3$ *и* $2 \in R^*$. *Пусть, далее,* H *– подгруппа в* $\mathrm{GL}(2l,R)$, *содержащая* $\mathrm{EO}(2l,R)$. *Тогда либо* $H \leqslant \mathrm{GO}(2l,R)$, *либо* H *содержит нетривиальную элементарную трансвекцию.*

После этого доказательство теоремы совсем просто завершается редукцией по наибольшему идеалу $A \trianglelefteq R$ такому, что $E(2l,R,A) \leqslant H$.

Доказательство теоремы. Пусть A – наибольший идеал такой, что $E(2l,R,A) \leqslant H$, существование которого установлено в Лемме 5. Пусть $\overline{H} = \rho_A(H)$ – образ группы H под действием гомоморфизма редукции $\rho_A : \mathrm{GL}(2l,R) \longrightarrow \mathrm{GL}(2l,R/A)$. Ясно, что группа $\overline{H}$ содержит $\mathrm{EO}(2l,R/A)$ и, применяя к ней основную лемму, мы видим, что имеет место следующая альтернатива: либо $\overline{H} \leqslant \mathrm{GO}(2l,R/A)$, либо $\overline{H}$ содержит нетривиальную элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi + A)$, $i \neq j$, $\xi \in R \setminus A$. Покажем, что вторая из этих возможностей не может реализовываться. В самом деле, представим $t_{ij}(\xi) \in H\,\mathrm{GL}(2l,R,A)$ в виде $t_{ij}(\xi) = ab$, $a \in H$, $b \in \mathrm{GL}(2l,R,A)$, выберем индекс $h \neq \pm i, \pm, j$ и рассмотрим коммутатор $[t_{ij}(\xi), T_{jh}(1)] = t_{ih}(\xi)$. Подставляя сюда выражение для $t_{ij}(\xi)$, получим $t_{ih}(\xi) = [ab, T_{jh}(1)] = {}^a[b, T_{jh}(1)][a, T_{jh}(1)]$. Первый из коммутаторов в правой части принадлежит $E(2l,R,A)$ в силу стандартной коммутационной формулы, а второй лежит в H. Это значит, что $t_{ih}(\xi) \in H$, причем $\xi \notin A$, что противоречит максимальности A. Это значит, что в действительности всегда реализуется первая возможность, $\overline{H} \leqslant \mathrm{GO}(2l,R/A)$ и, окончательно, $H \leqslant \rho_A^{-1}(GO(2l,R/A))$.

Нам осталось показать, что $\rho_A^{-1}(GO(2l,R/A))$ нормализует $\mathrm{EO}(2l,R)E(2l,R,A)$. В самом деле, по определению, для любого $g \in \rho_A^{-1}(GO(2l,R))$ имеем $[g, \mathrm{EO}(2l,R)] \leqslant \mathrm{EO}(2l,R)\,\mathrm{GL}(2l,R,A)$. Таким образом, в силу теоремы Суслина-Копейко и стандартной коммутационной формулы $[g, \mathrm{EO}(2l,R), \mathrm{EO}(2l,R)]$ содержится в

$$[\mathrm{EO}(2l,R)\,\mathrm{GL}(2l,R,A), \mathrm{EO}(2l,R)] \leqslant \mathrm{EO}(2l,R)E(2l,R,A).$$

В силу того, что $\mathrm{EO}(2l,R)$ совершенна, а $E(2l,R,A)$ нормальна (теорема Суслина), следует, что $[g, \mathrm{EO}(2l,R)] \leqslant \mathrm{EO}(2l,R)E(2l,R,A)$. Еще раз воспользовавшись нормальностью $E(2l,R,A)$ можно заключить, что g нормализует $\mathrm{EO}(2l, R)E(2l, R, A)$, что и завершает доказательство теоремы по модулю основной леммы.

Приведенное в теореме описание промежуточных подгрупп укладывается в схему "веерного" расположения подгрупп, разрабатывавшуюся З.И.Боревичем и его школой, см. [31] по поводу многочисленных примеров подобного описания различных классов подгрупп.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству основной леммы. Доказательство будет вестись индукцией по l, база индукции $l = 3$.

§5. Разложение унипотентов

Следующее соображение представляет собой вариацию на тему "разложения унипотентов", см. [30], § 11 и [27], § 13. Этот трюк позволяет с самого начала свести все вычисления к вычислениям в группе меньшего ранга, а точнее в максимальной параболической подгруппе P_1 группы $\mathrm{GL}(2l, R)$.

Лемма 6. *Пусть H – подгруппа в $\mathrm{GL}(2l, R)$, содержащая $\mathrm{EO}(2l, R)$. Если H не содержится в $\mathrm{GO}(2l, R)$, то в H найдется не принадлежащая $\mathrm{GO}(2l, R)$ матрица x, какой-то столбец которой совпадает с соответствующим столбцом единичной матрицы.*

Доказательство. Пусть $g \in H \setminus \mathrm{GO}(2l, R)$. По Лемме 2 найдется такая элементарная ортогональная трансвекция $T_{i,-j}(\xi)$, $i \neq \pm j$, $\xi \in R$, что $[g, T_{i,-j}(\xi)] \notin \mathrm{GO}(2l, R)$. Выберем индекс h такой, что все 6 индексов $\pm i, \pm j, \pm h$ попарно различны и представим $T_{i,-j}(\xi)$ в виде $T_{i,-j}(\xi) = \prod x_k$, $1 \leqslant k \leqslant -1$, где

$$x_k = T_{i,-j}(g_{k,-i}\xi g'_{-h,k})T_{i,-h}(g_{k,-i}\xi g'_{-j,k})T_{j,-h}(g_{k,-i}\xi g'_{-i,k}) \in \mathrm{EO}(2l, R).$$

Так как $[g, T_{i,-j}(\xi)] \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, то по крайней мере для одного k имеем $[g, x_k] \notin \mathrm{GO}(2l, R)$ и, тем самым, $gx_kg^{-1} \notin \mathrm{GO}(2l, R)$. Однако непосредственное вычисление (см. [30] или [27]) показывает, что k-й столбец матрицы x_kg^{-1} совпадает с k-м столбцом g^{-1}. Но тогда k-й столбец матрицы $x = gx_kg^{-1} \in H \setminus \mathrm{GO}(2l, R)$ совпадает с k-м столбцом единичной матрицы.

Сопрягая при помощи элемента группы Вейля W, мы можем не теряя общности считать, что H содержит матрицу $g \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, *первый* столбец которой совпадает с первым столбцом единичной матрицы. Матрицы такого вида содержатся в максимальной параболической подгруппе P_1 группы $\mathrm{GL}(2l,R)$, состоящей из всех матриц, первый столбец которых пропорционален первому столбцу единичной матрицы. В дальнейшем мы рассматриваем такую матрицу $g \in P_1 \setminus \mathrm{GO}(2l,R)$ и хотим показать, что подгруппа H содержит нетривиальную элементарную трансвекцию. В следующих параграфах мы поочередно рассмотрим случаи, когда g коммутирует со всеми трансвекциями вида $T_{1i}(1)$, $i \neq \pm 1$, и когда g не коммутирует с какой-либо из этих трансвекций, по модулю $\mathrm{GO}(2l,R)$.

Замечание. При $l \geqslant 4$ можно было бы избежать отдельного рассмотрения этих случаев, а с самого начала представить $T_{i,-j}(\xi)$ в виде $T_{i,-j}(\xi) = \prod x_{rs}$, $1 \leqslant r < s \leqslant -1$, так, чтобы в матрице $gx_{rs}g^{-1}$ *два* столбца, а именно столбцы с номерами r и s, совпадали с соответствующими столбцами единичной матрицы. При этом x_{rs} имеет вид произведения *шести* ортогональных трансвекций $T_{i,-j}(*)$, $T_{i,-h}(*)$, $T_{i,-k}(*)$, $T_{j,-h}(*)$, $T_{j,-k}(*)$, $T_{h,-k}(*)$, где восемь индексов $\pm i, \pm j, \pm h, \pm k$ попарно различны, а коэффициенты трансвекций выражаются через миноры второго порядка матриц g и g^{-1}, см. [27]. Ниже мы делаем по существу то же самое, но в два приема, что позволяет избежать громоздких формул и, кроме того, за счет отдельного анализа случая, когда получившаяся после первого шага матрица коммутирует с элементарными ортогональными трансвекциями, дает возможность охватить также случай $l \geqslant 3$.

§6. Извлечение трансвекции в случае, когда g коммутирует с $T_{1h}(1)$

Мы продолжаем считать, что $g \in H \setminus \mathrm{GO}(2l,R)$ – матрица, первый столбец которой совпадает с первым столбцом единичной матрицы.

Лемма 7. *Если $[g, T_{1h}(1)] \in \mathrm{GO}(2l,R)$ для всех $h \neq \pm 1$, то последняя строка матрицы g пропорциональна последней строке единичной матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим ортогональную трансвекцию $x = gT_{1h}(1)g^{-1} \in \mathrm{GO}(2l,R)$. Прямое вычисление показывает, что $x = e + \sum(g_{i1}g'_{hj} - g_{i,-h}g'_{-1,j})$, $1 \leqslant i,j \leqslant -1$. Так как $x \in \mathrm{GO}(2l,R)$ и $x_{i1} = \delta_{i1}$, то $x_{-1,j} = 0$ для всех $j \neq -1$. Рассмотрим матрицу $\overline{x} = e + \sum g_{i,-h}g'_{-1,j}e_{ij}$, $i,j \neq \pm 1$, получающуюся из x вычеркиванием строк и столбцов с номерами $1, -1$. Эта матрица является *линейной* трансвекцией, принадлежащей $\mathrm{GO}(2l-2,R)$, и, следовательно, в силу уравнений ортогональной группы $\overline{x}=e$. Таким образом, $g_{i,-h}g'_{-1,j}=0$ для всех $i,j,h\neq\pm1$. Так как матрица g обратима, а $l\geqslant 3$, то идеал, порожденный $g_{i,-h}$, $i,h\neq\pm1$, совпадает с R. Таким образом, $g'_{-1,j}=0$ для всех $j\neq\pm1$. Но это и значит, что матрица g имеет требуемый вид.

Иными словами, матрица g лежит в субмаксимальной параболической подгруппе $P_{1,-1}$ группы $\mathrm{GL}(2l,R)$. В оставшейся части параграфа мы покажем, что для любой матрицы $g\in P_{1,-1}$ имеет место сформулированная в основной лемме альтернатива: либо $g\in \mathrm{GO}(2l,R)$, либо подгруппа, порожденная g и $\mathrm{EO}(2l,R)$, содержит элементарную трансвекцию. Этот факт существенно используется в следующих параграфах.

Обозначим через Y подгруппу Гейзенберга в $\mathrm{GL}(2l,R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{1j}(\xi)$ и $t_{i,-1}(\xi)$, где $j\neq1$, $i\neq-1$, $\xi\in R$. Ясно, что Y состоит из всех матриц y, для которых $y_{ij}=\delta_{ij}$ для всех пар (i,j), кроме пар вида $(1,j)$, $j\neq1$, и $(i,-1)$, $i\neq-1$. С точки зрения теории алгебраических групп Y является унипотентным радикалом $P_{1,-1}$, так что, в частности, $[P_{1,-1},Y]\leqslant Y$.

Лемма 8. *Если $g\in H\setminus \mathrm{GO}(2l,R)$ такова, что ее первый столбец совпадает с первым столбцом единичной матрицы, а последняя строка пропорциональна последней строке единичной матрицы, то H содержит матрицу $y\in Y\setminus \mathrm{GO}(2l,R)$.*

Доказательство. Возьмем $i\neq\pm1$ и рассмотрим лежащий в H коммутатор $x_i=[g,T_{1i}(1)]\in[P_{1,-1},Y]\leqslant Y$. Если для некоторого $i\neq\pm1$ имеем $x_i\notin \mathrm{GO}(2l,R)$, то матрица $y=x_i$ искомая. Будем поэтому считать, что *все* матрицы x_i, $i\neq\pm1$, принадлежат $\mathrm{GO}(2l,R)$. Ясно, что тогда в действительности $x_i\in \mathrm{SO}(2l,R)$. Выражая это последнее условие в терминах матричных элементов матрицы g, получаем $g'_{ij}=\lambda g_{-j,-i}$ для всех $i,j\neq\pm1$, где $\lambda=g'_{-1,-1}$. Но это в точности означает, что матрица z, получающаяся из g вычеркиванием строк и столбцов с номерами ±1, принадлежит $\mathrm{GO}(2l-2,R)$.

Лемма 9. *Если H содержит матрицу $y\in Y\setminus \mathrm{GO}(2l,R)$, то H содержит нетривиальную элементарную трансвекцию.*

Доказательство. Умножая y на ортогональные трансвекции $t_{1i}(y_{-i,-1})$, $i\neq\pm1$, мы можем считать, что с самого начала все строки

y, кроме первой, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы, в то же время, так как $y \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, в первой строке есть ненулевой элемент y_{1i}, $i \neq 1$. Если какой-то из элементов y_{1i}, $i \neq \pm 1$, отличен от 0, то возьмем любой индекс $j \neq \pm 1, \pm i$ и рассмотрим коммутатор $Z = [y, T_{ij}(1)] = t_{1j}(y_{1i})t_{1,-i}(-y_{1,-j}) \in H$. Еще раз применив коммутирование с элементарной ортогональной трансвекцией $[z, T_{j,-i}(1)] = t_{1,-i}(y_{1i}) \in H$, мы видим, что H содержит нетривиальную трансвекцию. Нам осталось рассмотреть лишь случай, когда все элементы $y_{1i} = 0$ для всех $i \neq \pm 1$, но в этом случае сама матрица y является нетривиальной элементарной трансвекцией $y = t_{1,-1}(y_{1,-1}) \in H$.

Резюмируя леммы 7 – 9, мы видим, что если группа H содержит матрицу $g \in P_1 \setminus \mathrm{GO}(2l, R)$, коммутирующую с какой-то из элементарных ортогональных трансвекций $T_{1i}(1)$, $i \neq \pm 1$, то H содержит нетривиальную элементарную трансвекцию. Поэтому для доказательства Основной Леммы нам остается лишь рассмотреть случай, когда $[g, T_{1i}(1)] \neq e$ для всех $i \neq \pm 1$.

§7. Извлечение трансвекции из матрицы с двумя стандартными столбцами $r \neq \pm s$

Пусть теперь H содержит такую матрицу $g \in P_1$, что $[g, T_{1,-i}(1)] \notin \mathrm{GO}(2l, R)$ для некоторого $i \neq \pm 1$. Тогда мы можем повторить рассуждение из §5 и заключить, что H содержит матрицу, *два* столбца которой совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы. Точнее, имеет место следующий аналог Леммы 6.

Лемма 10. *Пусть H – подгруппа в $\mathrm{GL}(2l,R)$, содержащая $\mathrm{EO}(2l,R)$. Если $g \in H \cap P_1$ такова, что $[g, T_{1,-i}(1)] \notin \mathrm{GO}(2l, R)$ для некоторого $i \neq \pm 1$, то H содержит матрицу $x \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, у которой столбцы с номерами 1 и k, где $k \neq 1$, совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы.*

Доказательство. Выберем индекс $j \neq \pm 1, \pm i$ и повторим доказательство Леммы 6, заменив в нем i, j, h на $1, i, j$. Так как $T_{1,-i}(*)$, $T_{1,-j}(*)$, $T_{i,-j}(*)$ лежат в P_1, проведенное вычисление не выведет нас из P_1. Так как множитель $x_1 = e$, а матрица $T_{1,-i}(1) = \prod x_k$, $1 \leqslant k \leqslant -1$, не коммутирует с g, найдется $k \neq 1$, такое, что x_k не коммутирует с g. Для этого k в матрице $gx_kg^{-1} \in H$ столбцы с номерами 1 и k совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы.

Сопрягая при помощи элемента группы Вейля W, мы можем не теряя общности считать, что имеет место одна из двух следующих возможностей: $k = 2$ или $k = -1$. В настоящем параграфе мы рассмотрим первую из них. Обозначим через Z группу, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{1i}(\xi)$ и $t_{2i}(\xi)$, где $i \neq 1, 2$, $\xi \in R$. Ясно, что Z состоит из всех матриц y, для которых $y_{ij} = \delta_{ij}$ для всех пар (i, j), кроме пар вида $(1, i)$ и $(2, i)$, $i \neq 1, 2$. С точки зрения алгебраических групп Z является унипотентным радикалом максимальной параболической подгруппы P_2.

Лемма 11. *Если H содержит матрицу $g \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, первый и второй столбцы которой совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы, но не содержит нетривиальной элементарной трансвекции, то H содержит матрицу $y \in P_{1,-1} \setminus \mathrm{GO}(2l, R)$,*

Доказательство. Легко видеть, что

$$y = g^{-1} T_{1,-2}(1) g = e + \sum (g'_{i1} g_{-2,j} - g'_{i2} g_{-1j}) e_{ij}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant -1,$$

равна $e + \sum (g_{-2,j} e_{1j} - g_{-1,j} e_{2j})$, $j \neq 1, 2$, и, следовательно, принадлежит Z. Ясно, что $[y, T_{12}(1)] \in Y$, а $[y, T_{21}(1)]$ принадлежит подгруппе, сопряженной с Y при помощи матрицы перестановки. Таким образом, по Лемме 9, если хотя бы один из этих коммутаторов не принадлежит $\mathrm{GO}(2l, R)$, то H содержит нетривиальную элементарную трансвекцию. С другой стороны, если оба эти коммутатора принадлежат $\mathrm{GO}(2l, R)$, то $y = T_{1,-2}(g_{-2,-2})$, так что, в частности, $g_{-1,j} = 0$ для всех $j \neq -1$.

Таким образом, в случае $k = 2$ мы снова оказываемся в ситуации, рассмотренной в § 6. Нам осталось рассмотреть еще случай, когда $k = -1$.

§8. Извлечение трансвекции из матрицы с двумя стандартными столбцами $r = -s$

Итак, предположим теперь, что H содержит матрицу $g \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, столбцы которой с номерами 1 и -1 совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы. Мы отдельно рассмотрим случай нечетного l, для которого нам придется явно воспользоваться тем, что $2 \in R^*$, и случай $l \geqslant 4$, для которого мы сможем воспользоваться индукционным предположением (так как $l = 3$ нечетно!).

Теперь мы будем обозначать через Z подгруппу, сопряженную подгруппой Z из предыдущего параграфа при помощи мономиальной матрицы, а именно, подгруппу, порожденную всеми элементарными трансвекциями $t_{1i}(\xi)$ и $t_{-1,i}(\xi)$, где $i \neq \pm 1$, $\xi \in R$. Ясно, что Z состоит из всех матриц y, для которых $y_{ij} = \delta_{ij}$ для всех пар (i,j), кроме пар вида $(1,i)$ и $(-1,i)$, $i \neq \pm 1$. Покажем, прежде всего, что если H содержит неединичную матрицу из Z, то H содержит нетривиальную трансвекцию. Это почти в точности то же самое, что мы делали в предыдущем параграфе, но наша новая подгруппа Z не сопряжена с рассматривавшейся там подгруппой при помощи элемента из W. Кроме того, нам понадобятся матрицы чуть более общие, чем матрицы из Z.

Лемма 12. *Если H содержит неединичную матрицу вида $y \in t_{ij}(\xi)Z$, $i,j \neq \pm 1$, $i \neq \pm j$, $\xi \in R$, то H содержит нетривиальную элементарную трансвекцию.*

Доказательство. Строки матрицы y с номерами $-i, -j$ совпадают с соответствующими строками единичной матрицы. Применяя аналог Леммы 11 с заменой строк на столбцы, мы видим, что H содержит нетривиальную трансвекцию или матрицу x такую, что $x \in P_{1,-1} \setminus \mathrm{GO}(2l,R)$. Однако во втором случае группа H также содержит нетривиальную трансвекцию по Леммам 8 и 9.

Лемма 13. *Пусть $l \geqslant 3$ нечетно. Если H содержит матрицу $g \notin \mathrm{GO}(2l,R)$, столбцы которой с номерами $1,-1$ совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы, но не содержит нетривиальной элементарной трансвекции, то H содержит матрицу $y \in P_{1,-1} \setminus \mathrm{GO}(2l,R)$,*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $h = h_{23}h_{45}\dots h_{l-1,l} \in \mathrm{EO}(2l,R)$. Ясно, что h только знаком отличается от h_1. Это значит, что $y = ghg^{-1} = -gh_1g^{-1} \in H \cap Z$, причем для всех $i \neq \pm 1$ имеем $y_{1i} = 2g_{1i}$ и $y_{-1,i} = 2g_{-1,y}$. По предыдущей лемме либо H содержит элементарную трансвекцию, либо, так как 2 обратима, $g_{1i} = g_{-1,i} = 0$ для всех $i \neq \pm 1$, так что уже сама g лежит в $P_{1,-1}$.

Заметим, что эта лемма завершает доказательство Основной Леммы для случая $l = 3$. В самом деле, в §§5 – 7 мы показали, что если H содержит матрицу $g \notin \mathrm{GO}(2l,R)$, то H содержит также и матрицу $y \in P_{1,-1} \setminus \mathrm{GO}(2l,R)$. А как мы знаем из Лемм 8 и 9, в этом случае в H обязательно есть нетривиальная элементарная трансвекция. Нам остается еще провести шаг индукции. Это делается совсем просто, аналогично доказательству теоремы, но при этом вместо редукции по модулю идеала используется редукция к группе меньшего ранга.

Лемма 14. *Пусть* $l \geqslant 4$. *Если* H *содержит матрицу* $g \notin \mathrm{GO}(2l, R)$, *столбцы которой с номерами* $1, -1$ *совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы, то* H *содержит нетривиальную элементарную трансвекцию или матрицу* $y \in P_{1,-1} \setminus \mathrm{GO}(2l, R)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой матрице $g \in H$, столбцы которой с номерами $1, -1$ совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы, матрицу $\overline{g}$, получающуюся из g вычеркиванием строк и столбцов с номерами ± 1. Ясно, что это отображение является гомоморфизмом подгруппы матриц из H такого вида в группу $\mathrm{GL}(2l-2, R)$. Обозначим образ этого гомоморфизма через $\overline{H}$. Ясно, что $\overline{H} \geqslant \mathrm{EO}(2l-2, R)$. Так как по индукционному предположению Основная Лемма для $l-1 \geqslant 3$ уже доказана, для $\overline{H}$ имеет место следующая альтернатива: либо $\overline{H} \leqslant \mathrm{GO}(2l-2, R)$, либо $\overline{H}$ содержит нетривиальную элементарную трансвекцию $t_{ij}(\xi)$, $i, j \neq \pm 1$, $i \neq \pm j$, $\xi \in R$, $\xi \neq 0$. Во втором случае матрица y, для которой $\overline{y} = t_{ij}(\xi)$, удовлетворяет условиям Леммы 11 и, следовательно, H содержит нетривиальную трансвекцию. Пусть поэтому, $\overline{g} \in \mathrm{GO}(2l-2, R)$. Если $g_{-1,i} = 0$ для всех $i \neq \pm 1$, то сама матрица g принадлежит $P_{1,-1}$ и доказательство закончено. Если это не так, то зафиксируем какой-то индекс $i \neq \pm 1$ такой, что $g_{-1,i} \neq 0$, возьмем любой индекс $j \neq \pm 1, \pm i$ и рассмотрим матрицу $x = gT_{ij}(1)g^{-1} \in H$, у которой столбцы с номерами $1, -1$ также совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы. Однако теперь по теореме Суслина-Копейко $\overline{x} \in \mathrm{EO}(2l, R)$, так что вместе с матрицей x группа H содержит матрицу $y \in Z$, совпадающую с x в строках с номерами $1, -1$ и с единичной матрицей во всех остальных позициях. В самом деле, $y = \mathrm{diag}(1, \overline{x}^{-1}, 1)x \in H$. Осталось убедиться, что $y \neq e$. Для этого заметим, что $y_{-1h} = g_{-1,i}g'_{jh} - g_{-1,-j}g'_{-i,h}$ для всех $h \neq \pm 1$, причем линейная комбинация этих элементов с коэффициентами g_{hj}, $2 \leqslant h \leqslant -2$ равна $g_{-1,i} \neq 0$. Таким образом, мы нашли в H неединичную матрицу $y \in Z$ и, осталось снова сослаться на Лемму 11.

Это значит, что и в случае $k = -1$ мы всегда оказываемся в ситуации, рассмотренной в § 6. Это завершает доказательство Основной Леммы.

Литература

1. Е. Л. Башкиров *Линейные группы, содержащие группу* $\mathrm{Sp}_n(k)$ *над полем характеристики 2.* — Вести Акад. Наук БССР, Сер. физ.-мат. наук no. № 4 (1991), 21–26.
2. Е. Л. Башкиров *Линейные группы, содержащие коммутант ортогональной группы индекса большего 1.* — Сиб. мат. журн. **33** no. № 5 (1992), 754–759.
3. Е. Л. Башкиров *О подгруппах полной линейной группы над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу.* — Сиб. мат. журн. **39** no. № 6 (1998), 1251–1266.
4. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммукативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **165** (1984), 24–42.
5. Н. А. Вавилов *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* — Сиб. мат. журн. **29** no. № 3 (1988), 12–25.
6. Н. А. Вавилов *О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом.* I, II. — Сиб. мат. журн. **29** no. № 4 (1988), 31–43; — Записки научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 42–57.
7. Н. А. Вавилов *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. Акад. Наук СССР **299** no. № 6 (1988), 1300–1303.
8. Н. А. Вавилов *О подгруппах расщепимых классических групп.* — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **183** (1990), 29–41.
9. Л.Н.Васерштейн, А. А. Суслин *Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория.* — Изв. АН СССР, Сер. мат. **40** no. № 5 (1976), 993–1054.
10. Р. Стейнберг (1973), , *Лекции о группах Шевалле.* М., Мир.
11. А. А. Суслин, В. И. Копейко *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов.* — Запимки научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
12. M. Aschbacher *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* — Invent. Math., **76** no. № 3 (1984), 469–514.
13. A. Bak (1969), , *The stable structure of quadratic modules.* Thesis, Columbia Univ..
14. A. Bak (1981), 98, *K-theory of forms.* Princeton, N.J., Princeton Univ. Press.
15. A. Bak, N. A. Vavilov *Structure of hyperbolic unitary groups* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7** no. № 2 (2000), 159–196.
16. R. Carter (1972), , *Simple groups of Lie type.* London et al., Wiley.
17. R. H. Dye *Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic 2.* — J. Algebra **59** no. № 1 (1979), 202–221.
18. R. H. Dye *On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two.* — Math. Z. **172** no. № 3 (1980), 203–212.
19. R. H. Dye *Maximal subgroups of* $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, $\mathrm{SL}_{2n}(K)$, $\mathrm{PGL}_{2n}(K)$, $\mathrm{PSL}_{2n}(K)$ *associated with symplectic polarities.* — J. Algebra **66** no. № 1 (1980), 1–11.
20. A. Hahn, O. T. O'Meara (1989), , *The classical groups and K-theory.* Berlin et al., Springer.
21. O. H. King *On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group.* — J. Algebra **96** no. № 1 (1985), 178–193.

22. O. H. King *On subgroups of the special linear group containing the special unitary group.* — Geom. Dedic. **19** no. № 3 (1985), 297–310.
23. P. Kleidman, M. Liebeck *The subgroup structure of the finite classical groups.* , London Math. Soc. Lect. Notes, No. 129, Cambridge Univ. Press, 1988.
24. Sh. Li *Overgroups of* $\mathrm{SU}(n, K, f)$ *or* $\Omega(n, K, Q)$ *in* $\mathrm{GL}(n, K)$. — Geom. Dedic. **33** no. № 3 (1990), 241–250.
25. Sh. Li *Overgroups of a unitary group in* $\mathrm{GL}(2, K)$. — J. Algebra **149** no. № 2 (1992), 275–286.
26. Sh. Li *Overgroups in* $\mathrm{GL}(n, F)$ *of a classical group over a subfield of* F. — Algebra Colloq. **1** no. № 4 (1994), 335–346.
27. A. Stepanov, N. Vavilov *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
28. F. Timmesfeld *Abstract root subgroups and quadratic action. With an appendix by A. E. Zalesskii.* — Adv. Math. **142** no. № 1 (1999), 1–150.
29. L. N. Vaserstein *On normal subgroups of* GL_n *over a ring* (1981), 456–465, 854, — V kn.: Lect. Notes Math..
30. N. A. Vavilov *Structure of Chevalley groups over commutative rings* (1991), 219–335, , — V kn.: Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990). London et al., World Scientific.
31. N. A. Vavilov *Intermediate subgroups in Chevalley groups* (1995), 233–280, , — V kn.: Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como – 1993). C.U.P..

Vavilov N. A., Petrov V. A. Overgroups of $\mathrm{EO}(2l, R)$.

Let R be a commutative ring with 1, $2 \in R^*$, and $l \geqslant 3$. We describe subgroups of the general linear group $\mathrm{GL}(n, R)$ containing the split elementary orthogonal group $\mathrm{EO}(2l, R)$. For every intermediate subgroup H there exists a unique maximal ideal $A \trianglelefteq R$ such that $E(2l, R, A) \leqslant H$, and moreover H normalises $\mathrm{EO}(2l, R)E(2l, R, A)$. In the case when $R = K$ is a field, similar results have been obtained earlier by Dye, King, Li Shangzhi and Bashkirov.

С.-Петербургский
государственный университет
vavilov@pdmi.ras.ru
vavilov@math.nwu.edu
vavilov@mathematik.uni-bielefeld.de

Поступило 10 июня 2000 г.