Н. А. Широков

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ УГЛА ШТОЛЬЦА ДЛЯ ЕДИНИЧНОГО ШАРА В $\mathbb{C}^n$

Пусть $\mathbb{B}^n$, $n \geqslant 2$ – единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$, $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ – пространство функций, голоморфных в $\mathbb{B}^n$ и ограниченных. Множества, на которых функции из $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ могут обращаться в нуль (назовем их множествами типа $Z(H^\infty(\mathbb{B}^n))$) до сих пор полностью не описаны, как это сделано в классических работах Хенкина [1] и Шкоды [2] для класса Неванлинны $N(\mathbb{B}^n)$. Более того, если T_a – пересечение $\mathbb{B}^n$ с гиперплоскостью, $T_a = \{z \in \mathbb{B}^n : (z,a) = |a|^2\}$, $|a| < 1$, (z,a) – обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ и множество $E \subset \mathbb{B}^n$ состоит из счетного объединения шаров T_a, то полного описания множеств $E = \bigcup\limits_{a \in A} T_a \in Z(H^\infty(\mathbb{B}^n))$ в терминах распределения точек a до настоящего времени тоже нет (если ограничиться значениями только $|a|$, то окончательный результат в этом направлении такой: множество $E = \bigcup\limits_{a \in A} T_a \in Z(H^\infty(\mathbb{B}^n))$ тогда, как установили А. Б. Александров [3] и Хаким и Сибони [4] и только тогда, как следует из теоремы Хенкина–Шкоды [1, 2], когда $\sum\limits_{a \in A} (1 - |a|)^n < \infty$. Однако, в отличие от класса $N(\mathbb{B}^n)$, для которого последнее условие является необходимым и достаточным для соотношения $E \in Z(N(\mathbb{B}^n))$ при любом распределении точек $a \in \mathbb{B}^n$, при изучении класса $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ в таком контексте точки $a \in A$ должны быть распределены более равномерно: если $f \in H^\infty(\mathbb{B}^n)$, $f \not\equiv 0$, $\bigcup\limits_{a \in A} T_a \in f^{-1}(0)$, то должно выполняться [5]:

$$\sum_{a \in A \cap B(\xi,\delta)} (1 - |a|)^{n+1} \leqslant c\delta^n$$

для $\xi \in \partial\mathbb{B}^n$, $B(\xi,\delta) = \{z \in \mathbb{B}^n : |1-(z,\xi)| \leqslant \delta\}$. Если рассматривать задачу продолжения функций с какого-то подмножества $\mathbb{B}^n$ на весь шар, оставаясь в пространстве $H^\infty(\mathbb{B}^n)$, то и эта проблема не имеет пока законченного решения, хотя имеются существенные продвижения (см., например, [6]).

Целью настоящей работы является изложение некоторых свойств подмножеств из $\mathbb{B}^n$, которые можно считать аналогами углов Штольца для круга в $\mathbb{C}$, альтернативными клинам Кораньи–Стейна [7] и определенными ранее в [5, 8]. Оказывается, что если A содержится в конечном объединении подобных определяемых ниже (ρ, c, q)-клинов, то для $E = \bigcup\limits_{a\in A} T_a$ можно указать необходимые и достаточные условия для обоих обсуждаемых ранее вопросов. В данной статье подробно доказывается часть анонсированных в [5] результатов.

1. Обозначения и определения

Множества $T_a \subset \mathbb{B}^N$ определены ранее, если $A \subset \mathbb{B}^N$, полагаем $T_A = \bigcup\limits_{a\in A} T_a$; пишем $T_A \in Z(H^\infty(\mathbb{B}^N))$, если существует функция $f \in H^\infty(\mathbb{B}^N)$, $f \not\equiv 0$, такая что $T_A = f^{-1}(0)$; пишем $T_A \in Ip(H^\infty(\mathbb{B}^N))$, если для всякого набора функций $\{\varphi_a\}_{a\in A}$ такого, что каждая функция φ_a определена и голоморфна в T_a и $|\varphi_a| \leqslant 1$, найдется функция $f \in H^\infty(\mathbb{B}^N)$ такая, что $f\big|_{T_a} = \varphi_a$; $S = \partial\mathbb{B}^N$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^N$; если заданы числа ρ, $0<\rho<1$, $c>0$, $0<q<1$ и $e_0 \in S$, то (ρ, c, q)-клином с вершиной в точке $e_0 \in S$ назовем множество K, состоящее из объединения множеств $\mathbb{B}^N_\rho$ и $E_{c,q}(e_0)$, где

$$\mathbb{B}^N_\rho = \{z \in \mathbb{C}^N : |z| \leqslant \rho\} \tag{1.1}$$

$$E_{c,q}(e_0) = \{z \in \mathbb{B}^N : |\operatorname{Im}(1-(z,e_0))| \leqslant c\operatorname{Re}(1-(z,e_0));$$
$$|z|^2 - |(z,e_0)|^2 \leqslant q(1-|(z,e_0)|^2)\} \tag{1.2}$$

и числа ρ, c, q удовлетворяют соотношениям

$$\rho > 1 - \frac{(1-q)^2}{2(1+c^2)}; \tag{1.3}$$

$(\rho, c, 0)$-клином с вершиной в точке $e_0 \in S$ назовем множество, удовлетворяющее условиям (1.1), (1.2), (1.3) и соотношению

$$|z|^2 - |(z,e_0)|^2 = o\big(1-|(z,e_0)|^2\big), \quad z \to e_0.$$

2. Формулировка результата

Теорема. *Пусть множество A лежит в конечном числе (ρ, c, q)-клинов и $q < \frac{1}{2}$. Тогда*

(A) *для того, чтобы $T_A \in Z(H^\infty(\mathbb{B}^N))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{a\in A}(1-|a|) < \infty; \tag{2.1}$$

(B) *для того, чтобы $T_A \in Ip(H^\infty(\mathbb{B}^N))$, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое $\delta > 0$, при котором выполнялось бы любое из условий*

$$\left|\frac{1-|a_1|^2\delta^2}{\delta(1-|a_1|^2)}\,\frac{(z,a_1)}{|a_1|} - \frac{|a_1|}{\delta}\,\frac{(1-\delta^2)}{1-|a_1|^2}\right|^2 + \frac{1-|a_1|^2\delta^2}{1-|a_1|^2}\left(|z|^2 - \frac{|(z,a_1)|^2}{|a_1|^2}\right) \geqslant 1,$$

$$z \in T_{a_2}, \quad a_1 \neq a_2 \tag{2.2}$$

или

$$\left|\frac{|a_1| - \frac{(z,a_1)}{|a_1|}}{1-(z,a_1)}\right| \geqslant \delta, \quad z \in T_{a_2}, \quad a_1 \neq a_2 \tag{2.3}$$

Условие (2.1) очень походит на обычное условие Бляшке в круге, а условие (2.3) – на условие Ньюмана [2], когда последовательность точек, на которых происходит интерполяция, содержится в угле Штольца.

Замечание. В случае, когда множество A лежит в конечном числе $(\rho, c, 0)$-клинов, условиям (2.2) и (2.3) эквивалентно еще более записываемое условие

$$\left|\frac{|a_1| - \frac{(a_2,a_1)}{|a_1|}}{1-(a_2,a_1)}\right| \geqslant \delta, \quad a_1 \neq a_2, \quad \delta > 0. \tag{2.4}$$

Под величинами δ в (2.2)–(2.4) понимаются, вообще говоря, различные числа.

Шкала (ρ, c, q)-клинов при всех $\rho < 1$, $c > 0$, $q < 1$ эквивалентна по включению шкале клинов Фату–Кораньи–Стейна [7]; в конечном множестве $(\rho, c, 0)$-клинов содержится, например, множество $F \subset \mathbb{B}^N$, удовлетворяющее условию $\operatorname{dist}(z, M) \leqslant \mathrm{const}\cdot\operatorname{dist}(z, S)$, $z \in F$, если M – конечное множество на S.

3. Простые оценки

В дальнейшем нам часто придется оценивать нормы и скалярные произведения векторов из $\mathbb{C}^N$ в некоторых ситуациях, которые заранее перечислим, чтобы потом не прерываться для выведения несложных неравенств. В этом параграфе полагаем

$$a = (\alpha, a'), \quad \alpha = 1 - \lambda + i\mu, \quad a' \in \mathbb{C}^{N-1}, \quad a \in (\rho, c, q)\text{-клину}; \tag{3.1}$$

иногда a с индексами, тогда соответственно нумеруем и α, λ, μ.

$$z = (z_1, z'), \quad z_1 = 1 - \lambda_0 + i\mu_0, \quad z' \in \mathbb{C}^{N-1}, \quad z \in \mathbb{B}^N. \tag{3.2}$$

Имеем следующие соотношения (доказательство некоторых из них помещаем в скобки после написанного неравенства):

$$(1-q)\lambda \leqslant 1 - |a|^2 \leqslant 2\lambda, \quad 0 < \lambda < \frac{1-q}{1+c^2} \tag{3.3}$$

$$1 - |a|^2 \geqslant 2(1-q)\lambda - (1+c^2)\lambda^2 \tag{3.4}$$

$$1 - 2\lambda \leqslant |\alpha|^2 \leqslant 1 - 2\lambda + (c^2+1)\lambda^2 \tag{3.5}$$

$$1 - 2\lambda - 2\lambda_0 + \mu_0^2 - 12(1+c)\sqrt{\lambda\lambda_0} - (5+c^2)(\lambda+\lambda_0)^2 \leqslant \tag{3.6}$$
$$\leqslant |(z,a)|^2 \leqslant 1 - 2\lambda - 2\lambda_0 + \mu_0^2 + 12(1+c)\sqrt{\lambda\lambda_0} + (5+c^2)(\lambda+\lambda_0)^2$$

$$|(z', a')| \leqslant 2\sqrt{q}\sqrt{\lambda\lambda_0} \tag{3.7}$$

$$\text{функция } p(x) = \frac{x\sqrt{1-|\alpha|^2-x^2}}{\sqrt{|\alpha|^2+x^2}} \text{ возрастает на } [0, \sqrt{q(1-|\alpha|^2)}],$$
$$\text{если } q < \frac{1}{2} \text{ и } \lambda < \frac{1-2q}{10(c^2+1)} \tag{3.8}$$

$$(p'(x) = \frac{|\alpha|^2 - (|\alpha|^2+x^2)^2}{(|\alpha|^2+x^2)^{3/2}\sqrt{1-|\alpha|^2-x^2}}; \qquad |\alpha|^2 - (|\alpha|^2+x^2)^2 \geqslant$$
$$\geqslant |\alpha|^2 - ((1-q)|\alpha|^2+q)^2 = (|\alpha| - (1-q)|\alpha|^2 - q)(|\alpha| + (1-q)|\alpha|^2 + q) \geqslant$$
$$\geqslant q(|\alpha|-1)(q - |\alpha|(1-q)) \geqslant 0, \text{ см. (3.5))}$$

$$v(x) = \frac{|a_2|^2 - \frac{x^2}{|a_1|^2}}{(1-x)^2} \leqslant \frac{|a_2|^2}{1-|a_1|^2|a_2|^2}, \ x \in [0, |a_1|\,|a_2|] \tag{3.9}$$

$(v'(x) = 2\frac{|a_2|^2 - \frac{x}{|a_1|^2}}{(1-x)^3}$, $v'(x) = 0$ при $x = |a_1|^2|a_2|^2$.)

4. Канонический автоморфизм шара

Пусть $a \in \mathbb{B}^N$. Введем каноническое биголоморфное отображение $\mathbb{B}^N$ на $\mathbb{B}^N$ [7], которое далее часто будем использовать. Пусть P_a – поворот в $\mathbb{C}^N$, переводящий вектор $\frac{a}{|a|}$ в вектор $(1, 0, \dots, 0)$. Для $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{C}^N$ положим $k' = (k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{C}^{N-1}$. Определим

$$\zeta = L_a(z) : \zeta_1 = \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1 - (z,a)}, \quad \zeta' = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-(z,a)} \left(P_a \left(z - \frac{(z,a)}{|a|^2} a \right) \right)' \tag{4.1}$$

Классическим [7] является следующее

Утверждение.

Отображение L_a биголоморфно отображает шар $\mathbb{B}^N$ на $\mathbb{B}^N$; (4.2)

обратное отображение $z = L_a^{-1}(\zeta)$ выглядит так:

$$z = P_a^{-1} \left(\frac{|a| - \zeta_1}{1 - |a|\zeta_1}, \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-|a|\zeta_1} \zeta' \right); \tag{4.3}$$

отображение L_a переводит пересечение любой гиперплоскости $t = \{z \in \mathbb{C}^N : (z, w_1) = w\}$ с шаром $\mathbb{B}^N$ в пересечение некоторой другой гиперплоскости $\tau = \{\zeta \in \mathbb{C}^N : (\zeta, \omega_1) = \omega\}$ с $\mathbb{B}^N$; (4.4)

5. Доказательство части (A) теоремы

Начнем с достаточности. Пусть множество $A \subset \mathbb{B}^N$ таково, что $\sum\limits_{a \in A} (1 - |a|^2) < \infty$. Введем следующую функцию, впервые определенную, по-видимому, Э. Амаром [6]:

$$B_A(z) = \prod_{a \in A} \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}. \tag{5.1}$$

Функция B_A будет играть важную роль в части (B) теоремы. Ясно, что $B_A \not\equiv 0$, B_A голоморфна в $\mathbb{B}^N$, $|B_A| \leqslant 1$ и $B_A^{-1}(0) = T_A$. Обратимся теперь к необходимости. Ясно, что количество точек

$a \in A$, лежащих в шаре $\{z \in \mathbb{C}^N : |z| \leqslant \rho\}$, $\rho < 1$ конечно. Поэтому следует установить неравенство (2.1) для суммы, распространенной на точки $a \in E_{c,q}(e_0)$. Не умаляя общности, считаем $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим функцию $f \in H^\infty(\mathbb{B}^N)$, для которой $f^{-1}(0) = T_A$. По предположению $a \neq 0$, $a \in A$, поэтому функция $\varphi(z_1) = f(z_1, 0, \dots, 0)$ не равна тождественно нулю в круге $\mathbb{B}^1 = \{|z_1| < 1\}$. Функция $\varphi \in H^\infty(\mathbb{B}^1)$ и ее нулями являются точки $\frac{|a|^2}{\bar\alpha}$, $a = (\alpha, a') \in A$. Поэтому

$$\sum_{a \in A} \left(1 - \frac{|a|^4}{|\alpha|^2}\right) < \infty. \tag{5.2}$$

Однако в силу предположения $a \in E_{c,q}(e_0)$ имеем

$$1 - \frac{|a|^4}{|\alpha|^2} \geqslant 1 - \frac{(|\alpha|^2 + q(1 - |\alpha|^2))^2}{|\alpha|^2} \tag{5.3}$$

и неравенства (3.5) и (5.3) дадут

$$1 - \frac{|a|^4}{|\alpha|^2} \geqslant 2(1 - 2q)\lambda + O(\lambda^2), \quad \alpha = 1 + i\mu,$$

что вместе с (5.2) дает

$$\sum_{a = (1 - \lambda + i\mu, a') \in A} \lambda < \infty. \tag{5.4}$$

Соотношения (5.4) и (3.3) доказывают необходимость условия (2.1).

6. Необходимость условия (2.2) в части (B) теоремы

Рассмотрим произвольные гиперплоскости T_{a_1} и T_{a_2}, $a_1 \neq a_2$, $a_j \in A$. Зададим на T_{a_1} функцию $\varphi_1 \equiv \varphi_1^0$, φ_1^0 – постоянная, $|\varphi_1^0| \leqslant 1$, на T_{a_2} функцию $\varphi_2 \equiv \varphi_2^0$, φ_2^0 – постоянная, $|\varphi_2^0| \leqslant 1$. По теореме о замкнутом графике существует функция f, зависящая от a_1, a_2, φ_1^0, φ_2^0, и постоянная C, не зависящая от a_1, a_2, φ_1^0, φ_2^0 такие, что $f \in H^\infty(\mathbb{B}^N)$, $f\big|_{T_{a_j}} \equiv \varphi_j^0$, $j = 1, 2$ и $|f| \leqslant C$. Совершим преобразование L_{a_1}, и пусть $\psi = f \circ L_{a_1}^{-1}$. Согласно (4.4) T_{a_2} перейдет при отображении L_{a_1} в некоторую гиперплоскость τ, пересеченную с $\mathbb{B}^N$; T_{a_1} перейдет по (4.1) во множество $t_0 \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbb{B}^N : \zeta_1 = 0\}$. Функция $\psi \equiv \varphi_1^0$ при $\zeta \in t_0$ и $\psi \equiv \varphi_2^0$ при

$\zeta \in \tau$. Пусть точка $\zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \tau$. Рассмотрим круг s, следующим образом вложенный в $\mathbb{B}^N$:

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \{z = (z_1, \zeta') \in \mathbb{B}^N : |z_1| < \sqrt{1 - |\zeta'|^2}\}. \tag{6.1}$$

Множество t_0 пересекается с s в точке $(0, \zeta')$, а множество τ в точке (ζ_1, ζ'). Для любых интерполяционных значений φ_1^0 и φ_2^0, $|\varphi_1^0| \leqslant 1$, $|\varphi_2^0| \leqslant 1$, соответственно в точках 0 и ζ_1 круга $s_0 = \{|z_1| < \sqrt{1 - |\zeta'|^2}, z_1 \in \mathbb{C}\}$ найдется функция $\psi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \psi\big|_s$, голоморфная в s_0, интерполирующая в указанных точках указанные значения, и по модулю не превосходящая C. Поэтому в силу теоремы Карлесона [1] найдется постоянная $\delta > 1$, зависящая только от C такая, что

$$|\zeta_1| \geqslant \delta\sqrt{1 - |\zeta'|^2}, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \tau. \tag{6.2}$$

Неравенство (6.2) означает, что всякая точка $\zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \tau$ лежит вне эллипсоида

$$\frac{|\zeta_1|^2}{\delta^2} + |\zeta'|^2 < 1. \tag{6.3}$$

Выражая в соотношении (6.3) преобразование ζ через z, $\zeta = L_{a_1} z$, получим, что T_{a_2} лежит вне эллипсоида $Q_\delta(a_1)$, где

$$\begin{aligned} Q_\delta(a) \stackrel{\text{def}}{=} \Bigg\{ z \in \mathbb{C}^N : \left| \frac{1 - |a|^2\delta^2}{\delta(1 - |a|^2)} \frac{(z, a)}{|a|} - \frac{|a|}{\delta} \frac{(1 - \delta^2)}{1 - |a|^2} \right|^2 + \\ + \frac{1 - |a^2|\delta^2}{1 - |a|^2} \left(|z|^2 - \frac{|(z, a)|^2}{|a|^2} \right) < 1 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

что и требовалось.

7. Эквивалентность условий (2.2) и (2.3)

Пусть гиперплоскости T_{a_1} и T_{a_2} удовлетворяют условию (2.3). Преобразование L_{a_1} переводит T_{a_2} по (4.4) в гиперплоскость τ, и тогда условие (2.3) эквивалентно соотношению

$$|\zeta_1| \geqslant \delta, \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta') \in \tau. \tag{7.1}$$

Условие же (2.2) по пункту 6 эквивалентно условию (6.2), которое следует из (7.1). Значит, (2.3)$\Longrightarrow$(2.2). Выведем теперь из (2.2) условие (2.3), возможно, с некоторым меньшим δ.

Лемма. *Пусть точки* $a_1 = (\alpha_1, a_1')$ *и* $a_2 = (\alpha_2, a_2')$ *принадлежат множеству* A *и удовлетворяют условию* (2.2). *Тогда существует такое число* $\sigma = \sigma(\rho, c, q, A, \delta) < 1$, *что*

$$|(L_{a_1} a_2)'| \leqslant \sigma, \tag{7.2}$$

где ζ' – *последние* $N-1$ *координат вектора* ζ.

Доказательство. По определению L_a в (4.1) имеем

$$\begin{aligned} |(L_{a_1} a_2)'| &= \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{|1-(a_2,a_1)|} \left| \left(P_{a_1} \left(a_2 - \frac{(a_2,a_1)}{|a_1|^2}\, a_1 \right) \right)' \right| = \\ &= \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{|1-(a_2,a_1)|} \left| P_{a_1} \left(a_2 - \frac{(a_2,a_1)}{|a_1|^2}\, a_1 \right) \right| = \\ &= \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{|1-(a_2,a_1)|} \sqrt{|a_2|^2 - \frac{|(a_2,a_1)|^2}{|a_1|^2}}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Возьмем некоторое ρ_1, $\rho < \rho_1 < 1$. Если $|a_2| \leqslant \rho$, то с учетом (3.9) имеем

$$\begin{aligned} (7.3) \leqslant \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{1-|(a_2,a_1)|} \sqrt{|a_2|^2 - \frac{|(a_2,a_1)|^2}{|a_1|^2}} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{|a_2|^2 \cdot \frac{1-|a_1|^2}{1-|a_1|^2|a_2|^2}} \leqslant \rho_1. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Значение ρ_1 выберем в конце доказательства леммы, наложив на него несколько ограничений снизу. Пусть $e_1, \ldots, e_M$ – все вершины (ρ, c, q)-клинов, упоминаемых в условиях теоремы и положим $\delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min |1-(z,\zeta)|$, где min берется по всем парам $z \in \bigcup\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M} E_{c,q}(e_j)$, $\zeta \in E_{c,q}(e_i)$, $i = 1, \ldots, M$. Поскольку $(z,\zeta) = 1$ при $z, \zeta \in \mathbb{B}^N$ только лишь, если $z = \zeta \in S$, то $\delta_0 > 0$. Поэтому при $a_1 \in E_{c,q}(e_i)$ $a_2 \in E_{c,q}(e_j)$, $i \neq j$, имеем

$$|(L_{a_1} a_2)'| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\delta_0} \sqrt{1-|a_1|}$$

и если к тому же $|a_1| > \rho_2 > 1 - \frac{\delta_0^2}{16}$, ρ_2 также определим ниже, $\rho_2 \leqslant \rho_1$, то

$$|(L_{a_1} a_2)'| < \frac{1}{2}. \tag{7.5}$$

Далее, если $|a_2| \leqslant |a_1|$, то из (7.4)

$$|(L_{a_1}a_2)'| \leqslant \sqrt{|a_2|^2 \frac{1-|a_1|^2}{1-|a_1|^2|a_2|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{|a_1|^2(1-|a_1|^2)}{1-|a_1|^4}} = \sqrt{\frac{|a_1|^2}{1+|a_1|^2}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (7.6)$$

Итак, осталось разобраться со следующими возможными ситуациями:

$$\begin{array}{ll} 1. & a_1, a_2 \in E_{c,q}(e_j), \quad |a_1| \geqslant \rho_2, \quad |a_2| > \rho_2 \\ 2. & |a_1| \leqslant \rho_2, \quad |a_2| \geqslant \rho_1 \end{array} \quad (7^*)$$

Рассмотрим первый случай. Пусть $\alpha_1 = 1-\lambda_1+i\mu_1$, $\alpha_2 = 1-\lambda_2+i\mu_2$. Положим $c_1 = \left(\frac{1-4q(1-q)}{20}\right)^2 \frac{(1-q)^2}{8(c^2+1)}$. Пусть сначала $\lambda_2 \geqslant c_1\lambda_1$. Тогда

$$(7.4) \leqslant \sqrt{(|\alpha_2|^2+q(1-|\alpha_2|^2))\frac{1-|\alpha_1|^2}{1-(|\alpha_2|^2+q(1-|\alpha_2|^2))|\alpha_1|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{(1-2(1-q)\lambda_2+(c^2+1)\lambda_2^2)2\lambda_1}{1-(1-2(1-q)\lambda_2+(c^2+1)\lambda_2^2)(1-2\lambda_1+(c^2+1)\lambda_1^2)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+(1-q)\lambda_2-8(c^2+1)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}}. \quad (7.7)$$

Далее, если $\rho_2, \rho_1 \geqslant 1 - \frac{(1-q)^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+c_1(1-q)}}\right)}{8(c^2+1)}$, то с учетом (3.3) получим, что

$$(7.7) \leqslant \frac{1}{(1+c_1(1-q))^{1/4}}. \quad (7.8)$$

Если же $\lambda_2 < c_1\lambda_1$, то по (3.4), (3.6) и (3.7) имеем

$$(7.3) \leqslant \frac{1}{\rho_2}\sqrt{\frac{(2\lambda_1-|a_1'|^2)(\ell_1\ell_2-\ell_3)}{(\lambda_1+\lambda_2-2\sqrt{q}\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^2}}, \quad (7.9)$$

где
$$\begin{aligned} \ell_1 &= 1-2\lambda_1+(c^2+1)\lambda_1^2+|a_1'|^2, \\ \ell_2 &= 1-2\lambda_2+(c^2+1)\lambda_2^2+|a_2'|^2, \\ \ell_3 &= (1-\lambda_1-\lambda_2-|a_1'||a_2'|)^2. \end{aligned}$$

Главная часть V в (7.9) равна

$$V = \frac{1}{\rho_2}\sqrt{\frac{(2\lambda_1 - |a_1'|^2)(|a_1'|^2 + |a_2'|^2 + 2|a_1'||a_2'|)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{q}\sqrt{\lambda_1\lambda_2})^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho_2}\sqrt{\frac{(2\lambda_1 - |a_1'|^2)(|a_1'|^2 + 2qc_1\lambda_1 + 2\sqrt{2q\lambda_1 c_1}|a_1'|)}{(\lambda_1 - 2\sqrt{qc_1}\lambda_1)^2}}$$

Поскольку при $|a_1'|^2 \leqslant 2q\lambda_1$, $q < \frac{1}{2}$, $(2\lambda_1 - |a_1'|^2)|a_1'|^2 \leqslant 4q(1-q)\lambda_1^2$, при выбранном значении c_1 имеется постоянная $\sigma_1' = \sigma_1'(A)$

$$V \leqslant \sigma_1' < 1$$

и также имеется $\sigma_1' \leqslant \sigma_1 < 1$, $\sigma_1 = \sigma_1(A)$

$$(7.9) \leqslant \sigma_1, \tag{7.10}$$

что завершает рассмотрение первой ситуации.

Выберем теперь ρ_2 так, чтобы удовлетворялись неравенства (7.5), (7.8) и (7.10), именно, положим

$$\rho_2 = 1 - \frac{(1-2q)^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+c_1(1-q)}}\right)\left(\frac{1-4q(1-q)}{20}\right)^2}{8(c^2+1)}. \tag{7.11}$$

В шаре $\{z \in \mathbb{C}^N : |z| \leqslant \rho_2\}$ имеется в силу части (A) теоремы конечное число точек $\{a_j\}_{j=1}^R$ из A. Согласно условию (2.2) всякая точка e_k, $k = 1, \ldots, M$, в окрестности которой бесконечно много точек из A, лежит вне $\bigcup\limits_{j=1}^R T_{a_j}$. Поэтому

$$\max_{\substack{j=1,\ldots,R\\ k=1,\ldots,M}}{}' |(L_{a_j}e_k)'| = \sigma_2 < 1, \tag{7.12}$$

где штрих у max означает, что рассматриваются только те точки e_k, в окрестности которых имеется бесконечно много точек из A. Ясно, что существует такое $\rho_1' < 1$, что для $z \in E_{c,q}(e_k)$, $|z| > \rho_1'$, для e_k выполняется (7.12), будет выполняться

$$\max_{j=1,\ldots,R}{}' |(L_{a_j}z)'| \leqslant \frac{1+\sigma_2}{2}. \tag{7.13}$$

Пусть теперь

$$\rho_1'' = \max_{\substack{a\in E_{c,q}(e_k)\\ k=1,\dots,M}}{}'' |a|, \tag{7.14}$$

где в (7.14) максимум берется по тем значениям k, при которых в некоторой окрестности e_k нет точек из A.

Положим, наконец,

$$\rho_1 = \max(\rho_1', \rho_1'', \rho_2).$$

В таком случае соотношения (7.13) и (7.14) завершают рассмотрение второй возможности в (7^*) и доказательство леммы.

Теперь покажем, как из условия (2.2) следует условие (2.3).

Лемма дает, что гиперплоскость $L_{a_1}(T_{a_2})$ проходит через точку $\zeta_0 = L_{a_1}a_2$, $\zeta_0 = (\zeta_1^0, \zeta_0')$, для которой $|\zeta_0'| \leqslant \sigma < 1$ и которая по условию (2.2) лежит вне эллипсоида

$$Q_\delta = \left\{ \frac{|\zeta_1|^2}{\delta^2} + |\zeta'|^2 < 1 \right\}.$$

Рассмотрим следующую функцию $v(\zeta)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$, при $|\zeta| \leqslant 1$, $|\zeta'| \leqslant \sigma$:

$$v(\zeta_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{t_{\zeta_0}} \min_{\zeta=(\zeta_1,\zeta')\in t_{\zeta_0}\cap\bar{\mathbb{B}}^N} |\zeta_1|,$$

где первый min берется по всем гиперплоскостям t_{ζ_0}, проходящим через точку ζ_0 и лежащим вне Q_δ. Функция v непрерывна и достигает минимума в некоторой точке ζ_*. Условие (2.3) будет следовать из того, что $v(\zeta_*) > 0$. Если бы $v(\zeta_*) = 0$, тогда для некоторой плоскости t_{ζ_*}

$$\min_{\zeta\in t_{\zeta_*}\cap\bar{\mathbb{B}}^N} |\zeta_1| = 0. \tag{7.15}$$

Ясно, что min в (7.15) достигается при $\zeta \in t_{\zeta_*} \cap S$. Путем поворотов, переводящих Q_δ в себя, можно получить уравнение t_{ζ_*} в виде $(1-\rho)\zeta_1 + r\zeta_2 = r$, при этом точка ζ_* имеет вид $\zeta_* = (r, \rho, 0, \dots, 0)$, $r^2+\rho^2 \leqslant 1$, $\rho \leqslant \sigma$. Точка с вещественными координатами $\zeta_1 = \frac{rw}{1-\rho}$, $\zeta_2 = 1-w$, $\zeta_3 = \ldots = \zeta_N = 0$, принадлежит t_{ζ_*} и при $w > 0$ и достаточно малом лежит в Q_δ, поскольку

$$\frac{|\zeta_1|^2}{\delta^2} + |\zeta'|^2 = \frac{r^2w^2}{\delta^2(1-\rho)^2} + 1 - 2w + w^2 < 1,$$

что противоречит предположению о том, что t_{ζ_*} лежит вне Q_δ.

Итак, условия (2.2) и (2.3) эквивалентны. Оставшаяся часть работы посвящена достаточности условия (2.3) для того, чтобы $T_A \in Ip\, H^\infty(\mathbb{B}^N)$.

8. Разделенность проекций точек A на некоторых гиперплоскостях

В этом пункте мы установим следующее утверждение.

Лемма. *Пусть множество A удовлетворяет условию (2.3) и лежит в $E_{c,q}(e_0)$, $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Пусть $\lambda_0 > 0$, $c_1 < 1$, $c_2 > 1$. Тогда если $a_1 \neq a_2$, то*

$$\left| \frac{\frac{|a_1|^2}{\bar\alpha_1} - \frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}}{1 - \frac{|a_1|^2|a_2|^2}{\bar\alpha_1\bar\alpha_2}} \right| \geqslant \delta_1 \tag{8.1}$$

$\delta_1 > 0$ не зависит от a_1 и a_2;

$$\begin{gathered} \textit{количество тех точек } a = (1 - \lambda + i\mu, a') \in A, \ \textit{для которых} \\ c_1\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant c_2\lambda_0, \ \textit{не превосходит } K = K(c_1, c_2, \delta, c, q), \\ K \textit{ не зависит от } \lambda_0. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Доказательство. Начнем с (8.1). Согласно условию, при $z = \left(\frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}, 0, \dots, 0\right)$

$$\left| \frac{|a_1| - \frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}\bar\alpha_1}{1 - \frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}\bar\alpha_1} \right| \geqslant \delta. \tag{8.3}$$

С учетом (3.3)–(3.5) и (1.3) из (8.3) получим

$$\left| \frac{\frac{|a_1|^2}{\bar\alpha_1} - \frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}}{\lambda_1 + \lambda_2} \right| \geqslant \frac{\delta(1-2q)}{4}. \tag{8.4}$$

Но, опять с учетом (3.3)–(3.5) и (1.3) имеем

$$\left| 1 - \frac{|a_2|^2}{\bar\alpha_2}\,\frac{|a_1|^2}{\bar\alpha_1} \right| < 4C(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{8.5}$$

Соотношения (8.4) и (8.5) дают (8.1).

Далее, если $a = (\alpha, a') = (1 - \lambda + i\mu, a') \in E_{c,q}(e_0)$, то

$$\frac{|a|^2}{\bar{\alpha}} = \frac{1 - 2\lambda + |a'|^2}{1 - \lambda - i\mu} + O(\lambda^2) = 1 - \lambda + |a'|^2 + i\mu + O(\lambda^2). \qquad (8.6)$$

Из (8.6) видно, что $\left|\mathrm{Im}\left(\frac{|a|^2}{\bar{\alpha}}\right)\right| \leqslant \frac{2c}{1-q}\,\mathrm{Re}\left(\frac{|a|^2}{\bar{\alpha}}\right)$, что вместе с (8.1) дает (8.2). Лемма доказана.

Отметим важное следствие.

Следствие. *Пусть $p \neq 0$, множество A удовлетворяет условию леммы. Тогда существует постоянная $l = l(p, A)$ такая, что*

$$\sum_{\substack{a=(1-\lambda+i\mu,a')\in A\\ \lambda>\lambda_0}} \lambda^p \leqslant l\lambda_0^p, \quad p < 0 \qquad (8.7.1)$$

$$\sum_{\substack{a=(1-\lambda+i\mu,a')\in A\\ \lambda<\lambda_0}} \lambda^p \leqslant l\lambda_0^p, \quad p > 0. \qquad (8.7.2)$$

Доказательство следует из (8.2).

9. Нормирующие функции h_A и ω_A

Пусть множество A удовлетворяет условию (2.3). Введем некоторую функцию $h_A \geqslant 0$, которая будет связана с величиной $|B_A(z)|$, B_A определено в (5.1). Пусть $e_1, \dots, e_M$ – вершины (ρ, c, q)-клинов, в которых содержится A. Положим

$$h_A(z) = \prod_{k=1}^{M} h_{A,e_k}(z), \qquad (9.1)$$

где, если $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, то

$$h_{A,e_0}(z) = h_{A,e_0}(z_1) = \prod_{\substack{a=(1-\lambda+i\mu,a')\in A\cap E_{c,q}(e_0)\\ \lambda>\lambda_0}} \left(1 - \frac{1-|a|^2}{|a|^2}\,\frac{|a'|^2}{\lambda^2+\mu_0^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$z_1 = 1 - \lambda_0 + i\mu_0, \quad |z_1| \leqslant 1. \qquad (9.2)$$

Если же $e \in S$ отлично от e_0, то совершаем поворот P шара $\mathbb{B}^N$ так, чтобы e перешло в e_0, при этом A перейдет в PA и полагаем по определению

$$h_{A,e}(z) = h_{PA,Pe}(Pz). \qquad (9.3)$$

Понятно, что если точка z лежит в столь малой окрестности какой-то точки e_k, что внутри нее нет других точек e_j, $j \neq k$, то существуют постоянные c_{1A} и c_{2A} такие, что

$$c_{1A} h_{A,e_k}(z) \leqslant h_A(z) \leqslant c_{2A} h_{A,e_k}(z). \tag{9.4}$$

Неравенство (9.4) дает возможность локально изучать только $h_{A,e_k}(z)$.

Следующее свойство функции h_A далее будет очень существенным.

Лемма 1. *Пусть множество A удовлетворяет условию* (2.3). *Тогда существуют постоянные c_{5A} и c_{6A} такие, что при $z \in S$ справедливо*

$$c_{5A} h_A(z) \min_{a\in A} \left| \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)} \right| \leqslant |B_A(z)| \leqslant c_{6A} h_A(z) \min_{a\in A} \left| \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)} \right|. \tag{9.6}$$

Доказательство. В силу (9.4) достаточно доказать соотношение (9.6) при условии, что $A \subset E_{c,q}(e_0)$ и $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $z = (1 - \lambda_0 + i\mu_0, z') \in S$. Положим $B = B_A = B_1 B_2 B_3$, где

$$B_1 = \prod_{c_1^0 \lambda_0 < \lambda < c_2^0 \lambda_0}, \quad B_2 = \prod_{\lambda < c_1^0 \lambda_0}, \quad B_3 = \prod_{\lambda > c_2^0 \lambda_0}, \tag{9.7}$$

где $c_1^0 = \frac{1}{100} \frac{(1-2q)}{1+c^2}$, $c_2^0 = \frac{100}{1-2q}(1+c^2)$. В силу (8.2) произведение B_1 содержит не более, чем K сомножителей, K не зависит от λ_0. Аналогично пункту 7 можно установить следующий результат.

Лемма 2. *Пусть множество A удовлетворяет условию* (2.3). *Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, что при $a_1 \neq a_2$ множества $\Pi_{\delta_0}(a_1)$ и $\Pi_{\delta_0}(a_2)$ не пересекаются, где*

$$\Pi_{\delta_0}(a) = \left\{ z \in \mathbb{B}^N : \left| \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1 - (z,a)} \right| < \delta_0 \right\}.$$

Теперь лемма 2 и (8.2) дадут

$$\min_{\substack{a\in A\\ c_1^0\lambda_0<\lambda<c_2^0\lambda_0}}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{a'}}{1-(z,a)}\right| \geqslant |B_1(z)| \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{\delta_0}{2}\right)^K \min_{\substack{a\in A\\ c_1^0\lambda_0<\lambda<c_2^0\lambda_0}}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|. \qquad (9.8)$$

Из нижеследующих выкладок (9.10), (9.11) и (9.14) следует, что при выбранных c_1^0 и c_2^0

$$\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right| \geqslant c_3^0 \min_{\substack{a\in A\\ c_1^0\lambda_0<\lambda<c_2^0\lambda_0}}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|,$$

поэтому (9.8) эквивалентно неравенствам

$$c_8\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right| \geqslant |B_1(z)| \geqslant c_9\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|. \qquad (9.9)$$

Оценим теперь $B_2(z)=\prod\limits_{\lambda<c_1^0\lambda_0}$. Имеем

$$\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|^2 = 1-\frac{1}{|a|^2}\,\frac{(1-|a|^2)(|a|^2-|(z,a)|^2)}{|1-(z,a)|^2}. \qquad (9.10)$$

По оценкам (3.3)–(3.7) получим

$$1-|a|^2\leqslant 2\lambda,\ \ |1-(z,a)|\geqslant \frac{1}{2}\lambda_0,\ \ |a|^2-|(z,a)|^2\leqslant 5\lambda_0. \qquad (9.11)$$

Соотношения (9.11) дадут

$$\sum_{\substack{\lambda<c_1^0\lambda_0\\ a=(1-\lambda+i\mu,a')\in A}} \frac{1-|a|^2}{|a|^2}\,\frac{(|a|^2-|(z,a)|^2)}{|1-(z,a)|^2} \leqslant c_{10}\sum_{\substack{\lambda<c_1^0\lambda_0\\ a\in A}}\frac{\lambda\lambda_0}{\lambda_0^2}\leqslant c_{11}. \qquad (9.12)$$

Теперь (9.10) и (9.12) дадут

$$c_{12}\leqslant |B_2(z)|\leqslant 1. \qquad (9.13)$$

Осталось получить множитель $h(z_1)$ из оценки B_3. Приведем вначале следующий легко проверяемый технический факт.

Лемма 3. *Пусть* $0 \leqslant v_n \leqslant \rho < 1$, $n = 1, 2, \dots$, $|x_n| \leqslant h$, $\rho + h < 1$ *и пусть* $\sum\limits_n |x_n| \leqslant M$. *Тогда*

$$e^{-\frac{M}{1-\rho-h}} \prod_n (1 - v_n) \leqslant \prod_n (1 - v_n - x_n) \leqslant e^{\frac{M}{1-\rho-h}} \prod_n (1 - v_n).$$

Теперь оценим $B_3 = \prod\limits_{\substack{\lambda > c_2^0 \lambda_0 \\ a \in A}}$. Опять по (3.3)–(3.7) имеем

$$\frac{1-|a|^2}{|a|^2} \frac{|a|^2 - |(z,a)|^2}{|1-(z,a)|^2} = \frac{1-|a|^2}{|a|^2} \left(\frac{|a'|^2}{\lambda^2 + \mu_0^2 + O(\lambda_0 \lambda)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda_0 - \mu_0^2 + O(\sqrt{\lambda_0 \lambda}) + O(\lambda^2)}{\lambda^2 + \mu_0^2 + O(\lambda_0 \lambda)} \right). \quad (9.14)$$

Затем,

$$\frac{|a'|^2}{\lambda^2 + \mu_0^2 + O(\lambda_0 \lambda)} = \frac{|a'|^2}{\lambda^2 + \mu_0^2} + O\left(\frac{\lambda_0}{\lambda^2}\right) \quad (9.15)$$

и (9.14) и (9.15) дадут

$$\frac{1-|a|^2}{|a|^2} \frac{|a|^2 - |(z,a)|^2}{|1-(z,a)|^2} =$$
$$= \frac{|a'|^2(1-|a|^2)}{\lambda^2 + \mu_0^2} + O\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) + O\left(\frac{(\sqrt{\lambda_0 \lambda} + \mu_0^2 + \lambda^2)\lambda}{\lambda^2 + \mu_0^2}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{\substack{\lambda > c_2^0 \lambda_0 \\ a \in A}} \frac{1-|a|^2}{|a|^2} \frac{|a|^2 - |(z,a)|^2}{|1-(z,a)|^2} =$$
$$= \sum_{\lambda > \lambda_0} \frac{|a'|^2(1-|a|^2)}{\lambda^2 + \mu_0^2} - \sum_{\lambda_0 < \lambda < c_2^0 \lambda_0} \frac{|a'|^2(1-|a|^2)}{\lambda^2 + \mu_0^2} +$$
$$+ O\left(\sum_{\lambda > c_2^0 \lambda_0} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\lambda}} + \lambda + \frac{\mu_0^2 \lambda}{\lambda^2 + \mu_0^2} \right) \right). \quad (9.16)$$

По соотношению (8.2)

$$\sum_{\lambda_0 < \lambda < c_2^0 \lambda_0} \frac{|a'|^2(1-|a|^2)}{\lambda^2 + \mu_0^2} \leqslant c_{13}, \quad (9.17)$$

затем

$$\sum_{\lambda>c_2^0\lambda_0} \frac{\mu_0^2\lambda}{\lambda^2+\mu_0^2} \leqslant \sum_{c_2^0\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\mu_0} \lambda + \sum_{\lambda>\mu_0} \frac{\mu_0^2}{\lambda}. \tag{9.18}$$

Применяя к (9.16), (9.18) неравенства (8.7.1) и (8.7.2), получим

$$\sum_{\lambda>\lambda_0} \frac{1-|a|^2}{|a|^2} \frac{|a|^2-|(z,a)|^2}{|1-(z,a)|^2} = \sum_{\lambda>\lambda_0} \frac{|a'|^2(1-|a|^2)}{\lambda^2+\mu_0^2} + O(1). \tag{9.19}$$

Теперь (9.8), (9.13) и (9.19) в сочетании с леммой 3 доказывают лемму 1.

Функция h_A нормирует произведение B_A таким образом, что $|B_A/h_A|$ эквивалентно $\min\limits_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|$. В следующей лемме мы укажем голоморфную функцию ω_A, для которой выполнено та же эквивалентность.

Лемма 4. *Существует голоморфная в $\mathbb{B}^N$ функция ω_A, для которой с некоторыми постоянными c_{15} и c_{16}*

$$c_{15}/h_A(z) \leqslant |\omega_A(z)| \leqslant c_{16}/h_A(z). \tag{9.20}$$

Доказательство. Построим функцию $\omega_{e_k}(z)$, для которой бы выполнялось

$$c_{15}/h_{A,e_k}(z_1) \leqslant |\omega_{e_k}(z_1)| \leqslant c_{16}/h_{A,e_k}(z_1), \tag{9.21}$$

и затем положим $\omega_A = \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{e_k}$.

Тогда (9.20) последует из (9.4) и (9.1). Для установления (9.21), как и в (9.2) и (9.3), достаточно рассмотреть случай $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ и построить функцию ω_{e_0}, для которой

$$c_{15}/h_{A,e_0}(z_1) \leqslant |\omega_{e_0}(z)| \leqslant c_{16}/h_{A,e_0}(z_1). \tag{9.22}$$

Не умаляя общности, считаем в (9.22) $A \subset E_{c,q}(e_0)$. Положим

$$\beta(z)=\beta(z_1)= \prod_{\substack{a\in A\\ a=(\alpha,a')}} \frac{\bar\alpha}{|\alpha|} \frac{\frac{|a|^2}{\bar\alpha}-z_1}{1-\frac{|a|^2}{\alpha}z_1} \text{ и } \omega_A = \frac{\beta(z_1)}{B_A(z_1,0,...,0)}. \tag{9.23}$$

Применяя лемму пункта 9 с $N=1$, $a'\equiv 0$ и лемму из пункта 8, получим, что существуют постоянные c_{17} и c_{18}, для которых

$$c_{17}\min_{a\in A}\left|\frac{\frac{|a|^2}{\bar\alpha}-z_1}{1-\frac{|a|^2}{\alpha}\,z_1}\right|\leqslant|\beta(z_1)|\leqslant c_{18}\min_{a\in A}\left|\frac{\frac{|a|^2}{\bar\alpha}-z_1}{1-\frac{|a|^2}{\alpha}\,z_1}\right|. \tag{9.24}$$

Далее, по лемме 1 пункта 9 в нашем случае

$$c_{5A}h_{e_0}(z_1)\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{z_1\bar\alpha}{|a|}}{1-z_1\bar\alpha}\right|\leqslant|B_A(z_1,0,\dots,0)|\leqslant$$
$$\leqslant c_{6A}h_{e_0}(z_1)\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{z_1\bar\alpha}{|a|}}{1-z_1\bar\alpha}\right|. \tag{9.25}$$

Из соотношений пункта 3 следует существование постоянных c_{19} и c_{20}, не зависящих от $a=(\alpha,a')\in A$ и $z_1\in\mathbb{B}^1$, для которых

$$c_{19}\left|1-\frac{|a|^2}{\alpha}\,z_1\right|\leqslant|1-z_1\bar\alpha|\leqslant c_{20}\left|1-\frac{|a|^2}{\alpha}\,z_1\right|. \tag{9.26}$$

Теперь утверждение леммы 4 следует из (9.23)–(9.25).

10. Интерполяционная формула

Для построения интерполяционной формулы сначала введем некоторый способ продолжения с одной гиперплоскости T_a. Пусть на T_a задана голоморфная функция φ. Определим некоторую функцию φ_a голоморфную в $\mathbb{B}^N$, со свойствами

$$\varphi_a\big|_{T_a}\equiv\varphi, \tag{10.1}$$

$$\|\varphi_a\|_{H^\infty(\mathbb{B}^N)}=\|\varphi\|_{H^\infty(T_a)}, \tag{10.2}$$

следующим образом. Пусть $\zeta=(\zeta_1,\zeta')$, $\zeta'\in\mathbb{C}^{N-1}$; положим

$$\psi_0(\zeta')=\varphi(L_a^{-1}(0,\zeta')),\quad \zeta'\in\mathbb{B}^{N-1},$$

затем

$$\psi(\zeta)=\psi_0(\zeta'),\quad \zeta=(\zeta_1,\zeta')\in\mathbb{B}^N,$$

и, наконец,

$$\varphi_a=\psi(L_az),\quad z\in\mathbb{B}^N, \tag{10.3}$$

где отображение L_a определено в п. 4. Свойства (10.1) и (10.2) для функции φ_a, определенной равенством (10.3), с очевидностью выполняются.

Введем еще ряд функций.

Положим по определению

$$b_{a_0}(z) = \prod_{\substack{a\in A\\ a\neq a_0}} \frac{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}$$

$$b_a^0(z) = ((b_a\big|_{T_a}))_a(z)$$

$$\lambda_a = \lambda_a^0 \equiv 1, \text{ если } |a| < \rho, \ \rho \text{ взято из (1.3)}$$

$$\lambda_a(z) = \frac{(z-e_k, e_k)}{1-(z,e_k)}, \quad a \in E_{c,q}(e_k)$$

$$\lambda_a^0(z) = ((\lambda_a\big|_{Ta}))_a(z), \quad a \in E_{c,q}(e_k)$$

ω_A – функция из пункта 9

$$\omega_a^0(z) = (\omega_A|_{T_a})_a(z).$$

Пусть теперь на гиперплоскостях T_a, $a \in A$, заданы функции ${}_a\varphi$, $\|{}_a\varphi\|_{H^\infty(T_a)} \leqslant 1$. Положим

$$f_A(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{a\in A} ({}_a\varphi)_a(z) \frac{1-|a|^2}{|a| - \frac{(z,a)}{|a|}} \, \frac{B_A(z)\omega_A(z)}{b_a^0(z)\omega_a^0(z)} \, \frac{\lambda_a(z)}{\lambda_a^0(z)}. \tag{10.4}$$

Если $z \in T_{a_0}$, то при $a \neq a_0$, $B_A(z) = 0$, $|a| - \frac{(z,a)}{|a|} \neq 0$ и потому все слагаемые в (10.4) с $a \neq a_0$ обратятся в нуль. При $a = a_0$ слагаемое в (10.4) обращается в φ_{a_0} в силу (10.1)–(10.3). Поэтому формула (10.4) дает интерполяцию с T_A на весь шар $\mathbb{B}^N$. Осталось оценить $\|f_A\|_{H^\infty(\mathbb{B}^N)}$. Рассмотрим $z \in S$. Если применим леммы 1 и 2 пункта 9, заменив множество A на $A \setminus \{a\}$, то при $z \in T_a \cap S$, получим

$$c_{22} h_A(z) \leqslant |b_a(z)| \leqslant c_{23} h_A(z)$$

с некоторыми постоянными c_{22} и c_{23}. Затем, по (9.20),

$$c_{15}/h_A(z) \leqslant |\omega_A(z)| \leqslant c_{16}/h_A(z), \ z \in T_a,$$

поэтому
$$c_{22}c_{15} \leqslant |b_a(z)\omega_A(z)| \leqslant c_{23}c_{16}, \quad z \in T_a. \tag{10.5}$$
По определению b_a^0 и ω_a^0
$$b_a^0\omega_a^0 = ((b_a\omega_A)|_{T_a})_a$$
поэтому из (10.5)
$$c_{22}c_{15} \leqslant |b_a^0(z)\omega_a^0(z)| \leqslant c_{23}c_{16}. \tag{10.6}$$
Далее, используя (3.3)–(3.7), получим, что при $z \in T_a$ $|\lambda_a(z)| \geqslant c_{24}$, поэтому и $|\lambda_a^0(z)| \geqslant c_{24}$. Наконец,
$$|B_A(z)||\omega_A(z)| \leqslant$$
$$\leqslant c_{16}\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-(z,a)}{1-(z,a)}\right| h_A(z)/h_A(z) = c_{16}\min_{a\in A}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right|. \tag{10.7}$$
С учетом (10.6) и (10.7) из (10.4) получим
$$|f_A(z)| \leqslant c_{25}\sum_{a\in A}\frac{1-|a|^2}{\left||a|-\frac{(z,a)}{|a|}\right|}\min_{a_0\in A}\left|\frac{|a_0|-\frac{(z,a_0)}{|a_0|}}{1-(z,a_0)}\right||\lambda_a(z)|. \tag{10.8}$$
Не уменьшая общности, в сумме (10.8) можно полагать $A \subset E_{c,q}(e_0)$, $e_0 = (1,0,\ldots,0)$. Пусть $z = (1-\lambda_0+i\mu_0, z')$, $a = (1-\lambda+i\mu, a') \in A$. В таких обозначениях
$$\frac{(z-e_0,e_0)}{1-(z,a)} = \frac{-\lambda_0+i\mu_0}{\lambda+\lambda_0-\mu\mu_0+i(\mu_0-\mu)-(z',a')}$$
и, с учетом (3.7),
$$\left|\frac{(z-e_0,e_0)}{1-(z,a)}\right| \leqslant c_{26}\frac{\lambda_0+\mu_0}{\lambda+\lambda_0+\mu_0}. \tag{10.9}$$
Возьмем, далее, $v_1 = \frac{(1-2q)^2}{100(c^2+1)}$, $v_2 = \frac{1}{v_1}$ и разобьем сумму в (10.8) на три: $\sum_1 = \sum\limits_{v_1\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant v_2\lambda_0}$, $\sum_2 = \sum\limits_{\lambda<v_1\lambda_0}$, $\sum_3 = \sum\limits_{\lambda>v_2\lambda_0}$.

По (8.2) и (10.9) получим
$$\Sigma_1 \leqslant \sum_{\substack{v_1\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant v_2\lambda_0\\ a=(1-\lambda+i\mu,a')\in A}}\frac{1-|a|^2}{\left||a|-\frac{(z,a)}{|a|}\right|}\left|\frac{|a|-\frac{(z,a)}{|a|}}{1-(z,a)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\sum_{v_1\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant v_2\lambda_0} 1 \leqslant c_{27}. \tag{10.10}$$

Далее, по (3.3)–(3.7) при $\lambda < v_1\lambda_0$ $||a|^2-(z,a)| > \frac{1}{2}\lambda_0$, поэтому по (8.7.2) и (10.9)

$$\Sigma_2 \leqslant \text{const} \sum_{\lambda<v_1\lambda_0} \frac{|a|(1-|a|^2)}{||a|^2-(z,a)|} \leqslant \text{const} \sum_{\lambda<v_1\lambda_0} \frac{\lambda}{\lambda_0} \leqslant c_{28}. \tag{10.11}$$

Наконец, при $\lambda > v_2\lambda_0$ $||a|^2-(z,a)| > c_{29}(\lambda+\mu_0)$, и с учетом (10.9) получим

$$\Sigma_3 \leqslant \text{const} \sum_{\lambda>v_2\lambda_0} \frac{\lambda}{\lambda+\mu_0} \frac{\lambda_0+\mu_0}{\lambda+\lambda_0+\mu_0}. \tag{10.12}$$

Если $\mu_0 \leqslant v_2\lambda_0$, то при $\lambda > v_2\lambda_0$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0} \frac{\lambda_0+\mu_0}{\lambda+\lambda_0+\mu_0} \leqslant \text{const} \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

и тогда по (8.7.1)

$$\Sigma_3 \leqslant \text{const} \sum_{\lambda>v_2\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda} \leqslant c_{29}. \tag{10.13}$$

Если же $\mu_0 > v_2\lambda_0$, то

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu_0} \frac{\lambda_0+\mu_0}{\lambda+\lambda_0+\mu_0} \leqslant \text{const} \frac{\lambda\mu_0}{(\lambda+\mu_0)^2}.$$

И опять с помощью (8.7.1) и (8.7.2)

$$\Sigma_3 \leqslant \text{const} \left(\sum_{\lambda\leqslant\mu_0} \frac{\lambda}{\mu_0} + \sum_{\lambda>\mu_0} \frac{\mu_0}{\lambda} \right) \leqslant c_{30}. \tag{10.14}$$

Соотношения (10.10)–(10.14) дадут $|f_A(z)| \leqslant c_{31}$, что доказывает часть (B) теоремы.

Литература

1. Г. М. Хенкин, *Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклых многообразиях (I)*. — Успехи мат. наук **32, No. 3** (1977), 57–118.
— Матем. сборник **102, No. 1** (1977), 71–108.
2. H. Skoda, *Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'', et caracterisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna*. — Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 225–299.
3. А. Б. Александров, *Условие Бляшке и корни ограниченных голоморфных функций. Многомерный комплексный анализ.* Красноярск, Институт физики СОАН СССР, 1985.

4. M. Hakim, N. Sibony, *Ensemble des zéros d'une fonction holomorphe bornée dans la boule unité.* — Math. Ann. **260** (1982), 469–474.
5. Н. А. Широков, *Следы функций из $H^\infty(\mathbb{B}^n)$ на некоторых множествах гиперплоскостей.* — Зап. Научн. семин. ЛОМИ **141** (1985), 183–187.
6. E. Amar, *Extension de fonctions analytiques avec estimation.* — Arkiv för mat. **17**, No. **1** (1979), 123–138.
7. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.* Москва, Мир, 1984.
8. N. A. Shirokov, *Traces of H^∞-functions on hyperplanes.* — Lect. Notes in Math. **1043** (1984), 577–578.
9. D. J. Newman, *Interpolation in H^∞.* — Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1959), 501–507.

Shirokov N. A. Concerning an analog of the Stolz angle for the unit ball in $\mathbb{C}^n$.

By a (ρ, c, q)-wedge in the unit ball $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ we mean the union of the sets $\mathbb{B}^n_\rho$ and $E_{c,q}(e_0)$, where $\mathbb{B}^n_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leqslant \rho\}$, $0 < \rho < 1$, $|e_0| = 1$, $0 < q < 1$, $\rho > 1 - \frac{(1-q)^2}{2(1+c^2)}$,

$$E_{c,q}(e_0) = \{z \in \mathbb{B}^n : |\operatorname{Im}(1 - (z, e_0))| \leqslant c \operatorname{Re}(1 - (z, e_0)); \\ |z|^2 - |(z, e_0)|^2 \leqslant q(1 - |(z, e_0)|^2)\}$$

((z, ξ) is the usual scalar product in $\mathbb{C}^n$). We denote by T_a, $a \in \mathbb{B}^n$, $a \neq 0$, the intersection of $\mathbb{B}^n$ and the hyperplane $\{z : (z, a) = |a|^2\}$. The paper contains a description of the sets Z of the form $\bigcup\limits_{a \in A} T_a$, where A belongs to a finite union of (ρ, c, q)-wedges with $0 < q < \frac{1}{2}$ that may occur as zero-sets or interpolation sets for functions belonging to $H^\infty(\mathbb{B}^n)$.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет

Поступило 4 ноября 1996 г.