Ф. А. Шамоян, О. В. Ярославцева

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЕКТОРЫ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ДИАГОНАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Введение

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_j| < 1, j = \overline{1,n}\}$ – единичный полидиск в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{T}^n$ – его остов, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))$, где $0 < p_j < +\infty$, $\omega_j(t)$ – положительные медленно изменяющиеся функции на $(0, 1]$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ пространство измеримых в U^n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}(\vec{\omega})} = \Bigg(\int\limits_U \omega_n(1-|\zeta_n|)\Bigg(\int\limits_U \omega_{n-1}(1-|\zeta_{n-1}|)\dots\Bigg(\int\limits_U |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|^{p_1}$$
$$\times\, \omega_1(1-|\zeta_1|)dm_2(\zeta_1)\Bigg)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots dm_2(\zeta_{n-1})\Bigg)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dm_2(\zeta_n)\Bigg)^{\frac{1}{p_n}} < +\infty,$$

где dm_2 – 2-мерная мера Лебега на U. Подпространство $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, состоящее из голоморфных в U^n функций, обозначим через $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, а подпространство $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, состоящее из n-гармонических в U^n функций, – через $h^{\vec{p}}(\vec{\omega})$. Отметим, что изучение пространств $L^{\vec{p}}$ было начато в работе [1]. В дальнейшем исследования по теории пространств типа $L^{\vec{p}}$ интенсивно продолжались, что нашло отражение в известных монографиях [2–4]. Однако соответствующие пространства голоморфных функций в отличие от пространств типа Харди (см. [5–7]) и пространств типа Бергмана (см. [8–11]) сравнительно мало изучены.

В этой статье мы построим линейный ограниченный оператор, отображающий $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ на $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ при всех $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$,

---

Первый автор частично поддержан грантом РФФИ No. 96-01-00693.

$1 \leqslant p_j < +\infty$, и $h^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ на $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ при $0 < p_j < 1$, $j = \overline{1, n}$. Кроме того мы получим полное описание линейных непрерывных функционалов на пространствах $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ и характеристику следов функций класса $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ на диагонали U^n при всех $\vec{p}$ и $\vec{\omega}$. При этом мы построим линейный оператор продолжения с диагонали полидиска в полидиск.

§1. Построение линейного ограниченного проектора, отображающего $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ и $h^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ на $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$

Сначала напомним, что классом функций, правильно изменяющихся на промежутке $(0, 1]$, называется множество измеримых функций, обладающих следующими свойствами:

1) $\omega(t) > 0$, $t \in (0, 1]$;

2) существуют положительные числа $q_\omega, m_\omega \in (0, 1)$, $M_\omega > 0$ такие, что

$$m_\omega \leqslant \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant M_\omega, \quad r \in (0, 1], \quad \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Множество таких функций обозначим через S. Учитывая результаты [12], можно установить, что $\omega \in S$ тогда и только тогда, когда существуют ограниченные измеримые функции η, ε на $(0, 1]$ такие, что

$$\omega(x) = \exp\left\{\eta(x) + \int_x^1 \frac{\varepsilon(u)}{u}\, du\right\},$$

$x \in (0, 1]$, при этом

$$\frac{\lg m_\omega}{\lg \frac{1}{q_\omega}} \leqslant \varepsilon(u) \leqslant \frac{\lg M_\omega}{\lg \frac{1}{q_\omega}}, \quad u \in (0, 1].$$

Будем предполагать, что

$$\eta(x) \equiv 0, \quad \alpha_\omega = \frac{\lg m_\omega}{\lg \frac{1}{q_\omega}}, \quad 0 < \beta_\omega = \frac{\lg \frac{1}{m_\omega}}{\lg \frac{1}{q_\omega}} < 1.$$

Пусть далее $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > 1$, $j = \overline{1, n}$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$. Введем следующие обозначения:

$$D_\alpha(\zeta, z) = \prod_{j=1}^n D_{\alpha_j}(\zeta_j, z_j),$$

где

$$D_{\alpha_j}(\zeta_j, z_j) = \frac{(\alpha_j+1)(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j}}{\pi(1-\overline{\zeta}_j z_j)^{\alpha_j+2}}.$$

Отметим, что в случае $\alpha = 0$ эти ядра совпадают с ядрами Бергмана. Благодаря "гасящему" множителю $(1-|\zeta_j|^2)^{\alpha_j}$ эти ядра обладают рядом свойств, удобных в приложениях (см., например, [8, 11, 13]). Некоторыми такими приложениями являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда оператор*

$$K(f)(z) = \int\limits_{U^n} D_\alpha(\zeta, z) f(\zeta) dm_{2n}(\zeta), \quad z \in U^n, \tag{1}$$

является ограниченным оператором из $L^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *в* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *при всех* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $j = \overline{1, n}$.

Замечание. Если $\omega_j(t) = t^{\gamma_j}$, $t \in (0, 1]$, $\gamma_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, то, как и в [14], можно установить, что утверждение теоремы справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha_j > \gamma_j - \frac{1}{q_j}$, $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{q_j} = 1$, $j = \overline{1, n}$.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $0 < p_j < 1$, $\alpha_j > \alpha_{\omega_j} + \frac{2}{p_0}$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда оператор*

$$K(u)(z) = \int\limits_{U^n} D_\alpha(\zeta, z) u(\zeta) dm_{2n}(\zeta)$$

является ограниченным оператором из $h^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ *на* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$.

Используя равенство

$$\overline{f(0)} = \int\limits_{U^n} D_\alpha(\zeta, z) \overline{f(\zeta)} dm_{2n}(\zeta), \quad z \in U^n,$$

из Теорем 1, 2 получаем следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* $f(z)$ *– голоморфная в* U^n *функция,* $f(0) = 0$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $j = \overline{1, n}$. *Тогда имеет место оценка:*

$$\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})} \leqslant \mathrm{const} \, \| \operatorname{Re} f \|_{h^{\vec{p}}(\vec{\omega})}.$$

§2. Описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$

Легко видеть, что относительно нормы $\|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})}$ пространство $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$ превращается в банахово пространство при $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = \overline{1, n}$, и в квазибанахово пространство при $0 < p_j < 1$. Теоремы 1, 2 позволяют получить полное описание линейных непрерывных функционалов в этих пространствах. Аналоги этих утверждений в случае пространств типа пространств Харди можно найти в [5, 7, 15], а типа пространств Бергмана – в [10, 11]. Для формулировки полученных результатов введем понятие интегродифференциального оператора Римана–Лиувилля. Наше определение этих операторов незначительно отличается от обычных определений операторов указанного типа. Пусть f – голоморфная в U^n функция:

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{+\infty} a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}.$$

Положим

$$D^\alpha f(z) = \sum_{|k|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1 + k)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \tag{2}$$

$z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j > -1$, $j = \overline{1, n}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$. Здесь

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1 + k)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(k + 1)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha_j + 1 + k_j)}{\Gamma(\alpha_j + 1)\Gamma(k_j + 1)}.$$

Легко видеть, что если f – голоморфная в U^n функция, то $D^\alpha f$ также будет голоморфной в U^n функцией. Очевидны следующие свойства операторов D^α:

1) Если

$$\psi(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta) dm_{2n}(\zeta)}{(1 - \zeta z)}, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in U^n, \quad h \in L^1(dm_{2n}),$$

то

$$D^\alpha \psi(z) = \int_{U^n} \frac{h(\zeta) dm_{2n}(\zeta)}{(1 - \zeta z)^{\alpha + 1}}.$$

2) Если $D^\alpha \psi(\zeta) = D^\alpha g(\zeta)$, $\zeta \in U^n$, то $\psi(\zeta) \equiv g(\zeta)$, $\zeta \in U^n$.

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n$. Положим

$$e_z(\zeta) = \prod_1^n \frac{1}{1 - \zeta_j z_j}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть Φ – линейный непрерывный функционал на $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_j < +\infty$, $j = \overline{1, n}$, и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in U^n$. Тогда*

1. а) *g голоморфна в U^n и $D^\alpha g$ принадлежит классу $H^{\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)$ при $\alpha_j > \alpha_{\omega_j}$, $j = \overline{1, n}$, где*

$$\omega_{\alpha_j}(t) = \omega_j(t) \cdot \left(\frac{t^{\alpha_j}}{\omega_j(t)}\right)^{q_j}, \quad t \in (0,1), \quad q_j = \frac{p_j}{p_j - 1}, \quad j = \overline{1, n}.$$

б) *Φ представим в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{p \to 1-0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\rho\zeta) g(\rho\bar{\zeta}) dm_n(\zeta), \tag{4}$$

причем существуют положительные числа $C_1(\vec{p}, \alpha)$, $C_2(\vec{p}, \alpha)$ такие, что

$$C_1(\vec{p}, \alpha) \|D^{\alpha+1} g\|_{H^{\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)} \leqslant \|\Phi\| \leqslant C_2(\vec{p}, \alpha) \|D^{\alpha+1} g\|_{H^{\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)}. \tag{5}$$

2. *Обратно: каждая функция g такая, что $D^\alpha g \in H^{\vec{q}}(\vec{\omega}_\alpha)$ ($\alpha_j > \alpha_{\omega_j}, j = \overline{1, n}$) по формуле (4) порождает линейный непрерывный функционал на $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, для которого справедливы оценки (5).*

Имеет место аналог Теоремы 3 и в случае, когда $0 < p_j \leqslant 1$, $j = \overline{1, n}$. Пусть $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $0 < p_j \leqslant 1$. Обозначим через $\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}} = \lambda_{\omega_1, \dots, \omega_n}^{\vec{p}}$ множество всех голоморфных в U^n функций f, для которых при $\alpha_j > \frac{\alpha_{\omega_j}}{p_j}$ выполняется оценка

$$|D^{\alpha+1} g(z_1, \dots, z_n)| \leqslant \operatorname{const} \prod \frac{[\omega_j(1 - |z_j|)]^{\frac{1}{p_j}}}{(1 - |z_j|)^{\alpha_j + 2 - \frac{2}{p_j}}}, \ z = (z_1, \dots, z_n) \in U^n.$$

Здесь оператор D^α определяется по (2). Введем в $\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ норму:

$$\|g\|_{\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}} = \sup_{z \in U^n} \left\{ \frac{|D^{\alpha+1} g(z)| (1 - |z|)^{\alpha + 2 - \frac{2}{p}}}{[\omega(1 - |z|)]^{\frac{1}{p}}} \right\},$$

где
$$\frac{(1-|z|)^{\beta}}{[\omega(1-|z|)]^{\gamma}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{(1-|z_j|)^{\beta_j}}{[\omega_j(1-|z_j|)]^{\gamma_j}}.$$

Очевидно, что относительно указанной нормы множество $\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ превращается в банахово пространство.

Теорема 4. *Пусть* Φ *– линейный непрерывный функционал на* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $0<p_j\leqslant 1$, $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$, $\omega_j\in S$, $j=\overline{1,n}$, *и пусть* $e_z(\zeta)$, $\zeta,z\in U^n$, *определяется по* (3), $g(z)=\Phi(e_z)$. *Тогда:*

1. $g\in\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$, Φ *представим в виде*
$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{T}^n}f(\rho\zeta)g(\rho\bar{\zeta})dm_n(\zeta), \tag{6}$$
при этом существуют положительные константы $C_1(\vec{p},\alpha)$, $C_2(\vec{p},\alpha)$ *такие, что*
$$C_1(\vec{p},\alpha)\|\Phi\|\leqslant\|g\|_{\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}}\leqslant C_2(\vec{p},\alpha)\|\Phi\|. \tag{7}$$

2. *Обратно: каждая функция* $g\in\lambda_{\vec{\omega}}^{\vec{p}}$ *по формуле* (6) *порождает линейный непрерывный функционал на* $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, *для которого справедливы оценки* (7).

§3. Диагональное отображение в пространствах $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$

Нетрудно заметить, что если $f\in H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, то функция
$$\varphi(z)=D(f)(z)\stackrel{\text{def}}{=}f(z,\dots,z),\quad z\in U,$$
является голоморфной функцией в U. Естественно возникает вопрос о полной характеристике функций, голоморфных в U, допускающих такое представление. В случае классических пространств Харди аналогичная задача была поставлена У. Рудиным в [6] и решена в [15]. Более подробную историю вопроса можно найти в обзоре [9] и в работе [15]. Здесь мы получаем решение аналогичной задачи в пространствах $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$. Для формулировки основного результата этого параграфа введем обозначения. Пусть $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$, $\vec{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_n)$,
$$\tilde{\omega}_p(t)=\omega_n(t)\prod_{j=1}^{n-1}(\omega_j(t)t^2)^{\frac{p_n}{p_j}},\quad t\in(0,1].$$

Через $H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)$ обозначим пространство голоморфных в U функций f, для которых

$$\|f\|_{H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)} = \left\{ \int\limits_U |f(z)|^{p_n} \tilde{\omega}_p(1-|z|) dm_2(z) \right\}^{\frac{1}{p_n}} < +\infty.$$

Теорема 5. *Пусть* $f \in H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, *где* $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$, $\omega_j \in S$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $0 < p_j < +\infty$, $j = \overline{1,n}$, *и* $D(f)(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z, \dots, z)$, $z \in U$. *Тогда* $D(f) \in H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)$, *при этом*

$$\|D(f)\|_{H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})}.$$

Обратно: пусть $f \in H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)$ *и* α *– достаточно большое положительное число. Тогда функция*

$$F(z_1, \dots, z_n) = \frac{\alpha n - 1}{\pi} \int\limits_U \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha n - 2} f(\zeta) dm_2(\zeta)}{(1-\overline{\zeta}_1 z_1)^\alpha \dots (1-\overline{\zeta}_n z_n)^\alpha}$$

принадлежит классу $H^{\vec{p}}(\vec{\omega})$, *при этом справедлива оценка:*

$$\|F\|_{H^{\vec{p}}(\vec{\omega})} \leqslant \text{const}\, \|f\|_{H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)},$$

т.е. $DH^{\vec{p}}(\vec{\omega}) = H^{p_n}(\tilde{\omega}_p)$.

Замечание. Отметим, что Теорема 5 при $p_j = p$, $j = \overline{1,n}$, была получена первым автором в [10].

Литература

1. A. Benedek, R. Panzone, *The spaces L^p with mixed norm.* — Duke Math. J. **28**, No. **3** (1961), 301–324.
2. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М, Наука, 1969.
3. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М, Наука, 1975.
4. Х. Трибель, *Теория функциональных пространств.* М, Мир, 1986.
5. P. L. Duren, *Theory of H^p spaces.* New York and London, Acad. Press, 1970.
6. У. Рудин, *Теория функций в поликруге.* М, Мир, 1974.
7. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* — Complex Anal. and spectral theory. Lect. Not. in Math. **844** (1981), 1–90.
8. A. Djrbashian, F. A. Shamoyan, *Topics in the theory of A^p_α spaces.* Teubner Texte zur Math.. vol. 105, Leipzig, 1988.

9. С. В. Шведенко, *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре.* — Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Математический анализ **23** (1985), 3–103.
10. Ф. А. Шамоян, *Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций.* — Сиб. мат. журнал **31, No. 2** (1990), 199–215.
11. A. L. Shields, D. L. Williams, *Bounded projections, duality and multipliers in space of analytic functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 287–302.
12. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции.* М, Наука, 1985.
13. М. М. Джрбашян, *К проблеме представимости аналитических функций.* — Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР Вып. 2, (1948), 3–30.
14. F. Forelly, W. Rudin, *Projection spaces of holomorphic functions in balls.* — Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 596–602.
15. A. Frezier, *The dual space of H^p of polydisc for* $0 < p < 1$. — Duke Math. Journ. **39** (1972), 369–379.
16. Ф. А. Шамоян, *Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$,* $0 < p < +\infty$. — Мат. сб. **107, No. 3** (1978), 446–466.

Shamoyan F. A., Yaroslavtseva O. V. Continuous projections, duality and the diagonal mapping in weighted spaces of holomorphic functions with mixed norm.

The content of the paper is reflected by the title.

Брянский государственный
педагогический институт

Поступило 1 апреля 1997 г.