В. А. Слоущ

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР В ЛАКУНАХ СПЕКТРА САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ПРИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1. Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, спектр которого содержит лакуну (α, β), возможно полуограниченную. Пусть $B = B^* = A + V$ – возмущенный оператор; возмущение, вообще говоря, – неограниченное. Мы рассматриваем несколько возрастающих по сложности вопросов. Именно, ищутся достаточные условия, при которых спектр B в (α, β) 1) дискретен 2) не накапливается к одному из концов лакуны 3) конечен. В последнем случае указывается также оценка для числа собственных значений (с учетом их кратности) оператора B в (α, β). Дискретность спектра обеспечивается классической теоремой Вейля о компактных возмущениях или ее обобщениями (см., например [2]). Этого, однако, не всегда достаточно для применений. Мы имеем в виду прежде всего задачи, в которых A – эллиптический дифференциальных оператор, а V – дифференциальный оператор более высокого порядка. К сожалению, по недостатку места мы ограничиваемся здесь материалом абстрактного характера.

Автор благодарит проф. М. Ш. Бирмана за постановку задачи и помощь при выполнении работы.

Ниже через $B(H)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов в H, а через $S_\infty(H)$ – пространство всех компактных операторов в H. Для линейного плотно определенного оператора M через $D(M)$, M^*, $\rho(M)$ и $\sigma(M)$ обозначаются соответственно его область определения, сопряженный оператор, резольвентное множество и спектр. Для самосопряженного оператора T и борелевского множества на оси δ через $E_T(\delta)$ обозначается спектральный проектор оператора T, а через $\pi_T(\delta)$ – размерность подпространства $E_T(\delta)H$. Если оператор T полуограничен снизу, то его точная нижняя грань обозначается m_T. Мы будем использовать следующее определение подчинености, принятое в теории рассеяния (см. [1], а также [3]).

Будем говорить, что самосопряженный оператор A подчинен самосопряженному оператору B, если существуют непрерывные функции f и g такие, что $f(x) \geqslant 1$, $g(x) \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$; $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \infty$; $D(g(B)) \subset D(f(A))$.

2. В этом пункте мы сформулируем результаты, аналогичные теореме Вейля о сохранении существенного спектра $\sigma_e(\,.\,)$. Эти результаты удобно использовать для возмущений, не являющихся относительно компактными. Ниже A, B – самосопряженные операторы в H.

Теорема 1. *Пусть A подчинен B и для любого $a > 0$*

$$E_B(-a,a)(B-A)\,E_A(-a,a) \in S_\infty(H). \tag{1}$$

Тогда $\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A)$.

Замечание. Пусть $a > 0$, $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Тогда включение (1) эквивалентно соотношению

$$E_B(-a,a)\left((B-zI)^{-1} - (A-zI)^{-1}\right)\,E_A(-a,a) \in S_\infty(H).$$

Теорема 2. *Пусть A подчинен B, $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$, и для любого $a > 0$*

$$\left((B-zI)^{-1} - (A-zI)^{-1}\right)\,E_A(-a,a) \in S_\infty(H).$$

Тогда $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$.

Следствие. *Пусть A подчинен B и для любого $a > 0$*

$$E_A(-a,a)\,H \subset D(B); \quad (B-A)\,E_A(-a,a) \in S_\infty(H).$$

Тогда $\sigma_e(B) = \sigma_e(A)$.

Теорема 3. *Пусть A, B полуограничены, $B > A$ (в смысле квадратичных форм) и $0 < m_A < \alpha$. Предположим, что*

$$(B^{-1} - A^{-1})\,E_A[m_A, \alpha] \in S_\infty(H).$$

Тогда $\sigma_e(B) \cap (\alpha,\beta) = \emptyset$, и при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено $(\beta-\varepsilon,\beta) \in \rho(B)$.

3. Во всем дальнейшем оператор A положительно определен ($m_A > 0$) и возмущение неотрицательно. Более точно, пусть a – полуторалинейная форма оператора A, и $d[a] = D(A^{1/2})$ – ее область определения. Пусть $D_0 \subset d\,[a]$ – плотный в H линеал, и W_0 – замыкаемый линейный оператор, $D(W_0) = D_0$. Обозначим через W замыкание W_0. Введем форму

$$b_0(t)\,[u, v] = a\,[u, v] + t\,(W_0 u,\, W_0 v), \quad u, v \in D_0, \quad t > 0.$$

Форма $b_0\,(t)$ допускает замыкание $b(t)$, причем $d\,[b(t)]$ не зависит от $t > 0$,

$$\widehat{d} := d\,[b(t)] \subset d\,[a] \cap D(W),$$

$$b(t)\,[u, v] = a\,[u, v] + t\,(Wu,\, Wv), \quad u, v \in \widehat{d}, \quad t > 0.$$

Через $B(t)$ обозначим самосопряженный в H оператор, порожденный формой $b(t)$. Предположим теперь, что $0 < m_A < \alpha$ и выполнены условия

$$E_A\,[m_A,\, \alpha]\, H \subset \widehat{d}, \tag{2}$$

$$W\, E_A\,[m_A,\, \alpha] \in S_\infty(H). \tag{3}$$

Теорема 4. *При условиях* (2), (3) *выполнены условия теоремы* 3 *для пары операторов* A, $B(t)$, *а потому* $\sigma_e(B(t)) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$, *и при некотором* $\varepsilon := \varepsilon(t) > 0$ *выполнено* $(\beta - \varepsilon, \beta) \subset \rho(B(t))$.

Обозначим теперь для краткости $E_1 = E_A\,[m_A,\, \alpha]$, $E_2 = E_A\,[\beta,\, +\infty)$, $H_k = E_k\, H$, $k = 1, 2$. Предположим, далее, что

$$W\, E_1 \in B(H) \tag{4}$$

и введем обозначения

$$A_1 = A\big|_{H_1}, \quad Q_1 = (W\, E_1)^*(W\, E_1)\big|_{H_1},$$

$$\chi(\lambda) = -W\, E_1 (A_1 - \lambda\, I_1)^{-1} (W\, E_1)^*, \quad \lambda > \alpha. \tag{5}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2), (3). *Тогда*

$$\pi_{B(t)}(\alpha, \beta) \leqslant \pi_{A_1 + t\, Q_1}(\alpha, +\infty), \quad t > 0. \tag{6}$$

Оператор-функция (5) – невозрастающая. Предположим, что она имеет компактную мажоранту:

$$\chi(\lambda) \leqslant \chi_0 \in S_\infty(H), \quad \lambda > \alpha. \tag{7}$$

Объединяя оценку (6) с принципом Бирмана–Швингера, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и* (7). *Тогда при любом* $t > 0$ *правая часть в* (6) *конечна, а следовательно, спектр* $B(t)$ *в лакуне* (α, β) *конечен.*

4. Пусть спектр оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) дискретен при любом $t > 0$, и λ – фиксированная внутренняя точка лакуны. Обозначим через $N(A, \lambda, \tau)$ число собственных значений оператора $B(t)$, прошедших через точку λ при увеличении t от 0 до τ:

$$N(A, \lambda, \tau) = \sum_{t \in (0,\tau]} \dim \operatorname{Ker}(B(t) - \lambda I), \quad \tau > 0.$$

Далее, обозначим через $b_2(t)$, $t > 0$, сужение формы $b(t)$ на $d[b_2] := \widehat{d} \cap H_2$. При условии (2) форма $b_2(t)$ положительно определена, плотно задана и замкнута в H_2. Через $B_2(t)$ обозначим соответствующий самосопряженный оператор в H_2. Ясно, что $m_{B_2(t)} \geqslant \beta$, а потому $(-\infty, \beta) \subset \rho(B_2(t))$, $t > 0$. Корректно определена неотрицательная оператор-функция

$$F(t, \lambda) := t^2 (W E_1)^* \Big(W (B_2 - \lambda I_2)^{-1/2} E_2 \Big) \times$$

$$\times \Big(W (B_2 - \lambda I_2)^{-1/2} E_2 \Big)^* (W E_1), \quad t > 0, \quad \lambda < \beta,$$

причем $F(t, \lambda) H_2 = 0$ и $\operatorname{Ran} F(t, \lambda) \subset H_1$. Наконец, при условиях (2), (3) $F(t, \lambda) \in S_\infty(H)$. Введем обозначения

$$F_1(t, \lambda) = F(t, \lambda)\big|_{H_1}, \quad A_1 + t Q_1 - F_1(t, \lambda) = \Gamma(\lambda, t).$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (2), (3) *и* $\lambda \in (\alpha, \beta)$. *Тогда*

$$\# \{ t \in (0, \tau] : \lambda \in \sigma(B(t)) \} < +\infty,$$

$$N(A, \lambda, \tau) = \pi_{\Gamma(\lambda,\tau)} [\lambda, +\infty), \quad \tau > 0. \tag{8}$$

Равенство (8) сразу приводит к оценке, достаточно удобной для примений. Именно, справедливо

Следствие. *В условиях теоремы* 7 *справедлива оценка*

$$N(A, \lambda, \tau) \leqslant \pi_{A_1 + \tau Q_1} [\lambda, +\infty), \quad \tau > 0.$$

Литература

1. М. Ш. Бирман, *Локальный критерий существования волновых операторов.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **32** (1968), 914–942.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* изд-во ЛГУ, Ленинград (1980).
3. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния.* Изд. С.-Петербургского университета (1994).

Sloushch V. A. Discrete spectrum in the spectral gaps of a selfadjoint operator for unbounded perturbations.

Let A be a selfadjoint operator, (α, β) a gap in the spectrum of A, $B = A+V$, where, in general, the perturbation operator V is unbounded. We establish some abstract conditions under which the spectrum of B on (α, β) is discrete; does not accumulate to β; is finite. An estimate of the number of the eigenvalues of B on (α, β) is obtained.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 марта 1997 г.