Л. И. Ронкин

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

При исследовании нулевых множеств голоморфных почти периодических функций (п.п.ф.) многих переменных естественным и весьма плодотворным оказалось обращение к методам теории обобщенных функций и потоков (см. [1–3, 4, 5]). В развитие этого подхода в данной статье вводятся и изучаются почти периодические обобщенные функции (п.п.о.ф.) на трубчатых множествах $T_S = \mathbb{R}^n \times S$ и $T_G = \mathbb{R}^n \times G$, где, как и всюду далее, S – компакт в $\mathbb{R}^n$, а G – область в $\mathbb{R}^n$. В случае $S = \{0\}$, то есть в случае $T_S = \mathbb{R}^n$, наше определение п.п.о.ф. эквивалентно определению, данному много ранее Л. Шварцем [6]. В статье показано (§1 и §2), что основные свойства обычных п.п.ф., то есть п.п.ф. Бора,*) распространяются на п.п.о.ф. в T_G и на T_S. При этом для упомянутого случая $T_S = \mathbb{R}^n$ установлен ряд фактов, не содержащихся в [6]. Далее (§3) результаты из §1 и §2 применяются для изучения голоморных п.п.ф. в T_G. В частности, введено понятие почти периодического дивизора и доказано существование его плотности. Получено новое доказательство классической теоремы Иессена о нулях голоморфной п.п.ф. в полосе (см., например, [8], Б. Я. Левин [9]) и ее многомерного аналога (см. [1]).

§1. Почти периодические обобщенные функции в T_G

1. Почти периодические функции Бора на $\mathbf{T_S}$ и в $\mathbf{T_G}$. Всюду далее полагаем:

$$z = x + iy, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|x\| = \max\{|x_j| : 1 \leqslant j \leqslant n\}, \quad \|f(x)\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\Pi_\xi(x^0) = \{x : \|x - x^0\| < \xi\}, \quad x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad \xi > 0,$$

$$\Pi_\xi(x^0, \Gamma) = \{z : x \in \Pi_\xi(x^0),\, y \in \Gamma\}, \quad \Gamma \subset \mathbb{R}^n.$$

*) Изложение теории п.п.ф. Бора и некоторых ее обобщений содержится в монографиях Г. Бора [7] и Б. М. Левитана [8].

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется относительно плотным в $\mathbb{R}^n$, если существует такое число L, что $E \cap \Pi_L(x^0) \neq \varnothing$, $\forall\ x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим

$$T_\Gamma = \{z : x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \Gamma\}.$$

Если G – область в $\mathbb{R}^n$, то T_G – область в $\mathbb{C}^n$, называемая трубчатой областью. Как уже было отмечено, на протяжении всей статьи через G обозначается область в $\mathbb{R}^n$, а через S – компакт.

Пусть функция $f(z)$ определена на множестве T_S. Положим

$$\|f\|_S = \sup\{|f(z)| : z \in T_S\}$$

и

$$E_\varepsilon(f, S) = \{\tau \in \mathbb{R}^n : \|f(z+\tau) - f(z)\|_S < \varepsilon\}.$$

Определение 1.1. *Функция $f \in C(T_S)$ называется п.п.ф. Бора (на T_S), если для любого $\varepsilon > 0$ множество $E_\varepsilon(f, S)$ относительно плотно.*

Почти периодичность в области T_G определяется следующим образом.

Определение 1.2. *Функция $f \in C(T_G)$ называется п.п.ф. Бора (в T_G), если для любого компакта $S \subset G$ она является п.п.ф. Бора на T_S.*

П.п.ф. Бора на T_S и T_G обладают свойствами, которые, как по формулировке, так и по доказательству, вполне аналогичны соответствующим свойствам п.п.ф. Бора на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$.

Прежде всего заметим, что определению 1.1 эквивалентно

Определение 1.3. *Функция $f \in C(T_S)$ называется п.п.ф. Бора на T_S, если семейство функций $\{f(z+h) : h \in \mathbb{R}^n\}$ является компактным подмножеством пространства $C(T_S)$ с топологией, задаваемой нормой $\|\ :\|_S$.*

П.п.ф. Бора в T_G и на T_S как и обычные п.п.ф. имеют средние значения.

Теорема 1.1. *Пусть f – п.п.ф. Бора на T_S. Тогда существует предел*

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(0)} f(z)\, dx := M(y; f), \quad y \in S,$$

и, более того,

$$\lim_{\xi\to\infty} \sup_{\substack{x^0\in\mathbb{R}^n\\ y\in S}} \left| \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(x^0)} f(z)\,dx - M(y;f) \right| = 0. \tag{1.1}$$

Функция $M(y;f)$ непрерывна на S.

Условимся в случае $T_S = \mathbb{R}^n$, т.е. при $S = \{0\}$ вместо $M(0;f)$ писать $M(f)$. Это согласуется с соответствующим обозначением, принятым для п.п.ф. Бора на оси. Из теоремы 1.1 как следствие вытекает

Теорема 1.2. *Пусть f – п.п.ф. Бора в области T_G. Тогда для любой области $G' \Subset G$ существует предел*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(0,G')} f(z)\,dxdy := M_{G'}(f)$$

и более того,

$$\lim_{\xi\to\infty} \sup_{x^0\in\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(x^0,G')} f(z)\,dx\,dy - M_{G'}(f) \right| = 0.$$

Обозначим

$$f_\lambda(z) = e^{-i\langle\lambda,z\rangle} f(z),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\langle\lambda, z\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j$.

Теорема 1.3. *Пусть f – п.п.ф. Бора в T_G или на T_S. Тогда множество Λ_f тех точек λ, для которых $M(y; f_\Lambda) \not\equiv 0$, не более чем счетно.*

Фигурирующее в этой теореме множество Λ_f называется спектром функции f.

Теорема 1.4. *Пусть f – п.п.ф. Бора на T_S. Тогда имеет место равенство Парсеваля, а именно*

$$M(y;|f|^2) = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} e^{-2\langle\lambda,y\rangle} \big|M(y;f_\lambda)\big|^2. \tag{1.2}$$

Очевидным образом для рассматриваемых функций вводится и понятие ряда Фурье.

Определение 1.4. *Пусть f – п.п.ф. Бора в T_G или на T_S. Ее рядом Фурье называется формальный ряд*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} a_{\lambda,f}(y)e^{i\langle\lambda,z\rangle},$$

где

$$a_{\lambda,f}(y) = M(y; f_\lambda).$$

Для п.п.ф. в T_G или на T_S справедливы также теоремы единственности и аппроксимации.

Теорема 1.5. *Пусть f и g – п.п.ф. Бора в T_G или на T_S. Если $a_{\lambda,f} = a_{\lambda,g}$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}^n$, то $f = g$.*

Теорема 1.6. *Пусть Λ не более чем счетное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует такая, зависящая лишь от Λ, последовательность функций $\mu_j : \Lambda\to\mathbb{R}_+$, $j = 1, 2, \ldots$, что $\#\{\lambda\in\Lambda : \mu_j(\lambda)\neq 0\} < \infty$, $\forall\, j$, и для любой п.п.ф. Бора $f(z)$ в T_G (или на T_S) со спектром $\Lambda_f\subset\Lambda$ экспоненциальные суммы*

$$P_j(z) = \sum_{\lambda\in\Lambda_f} \mu_j(\lambda)a_{\lambda,f}(y)e^{i\langle\lambda,z\rangle}$$

при $j\to\infty$ сходятся к $f(z)$ по любой норме $\|:\|_{G'}$, $G'\Subset G$ (или, соответственно, по норме $\|:\|_S$).

Замечание 1.1. Изложенное выше очевидным образом переформулируется на формально более общий случай $T_G = \mathbb{R}^n\times G$, $T_S = \mathbb{R}^n\times S$, где $G\subset\mathbb{R}^m$, $S\subset\mathbb{R}^m$.

2. Определение почти периодической обобщенной функции в $\mathbf{T_G}$. Пусть Ω – область в $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$). Обозначим

$$\mathcal{D}_p(\Omega) = \{\varphi\in C^p(\mathbb{C}^n) : \operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\},$$

$$\mathcal{D}_p[\Omega] = \{\varphi\in C^p(\mathbb{C}^n) : \operatorname{supp}\varphi\subset\overline{\Omega}\},\quad \mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}_\infty(\Omega).$$

Если $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $m\in\mathbb{Z}_+^n$, то полагаем $\|k\| = k_1+\ldots+k_n$ и

$$\frac{\partial^{\|k\|+\|m\|}}{\partial z^k\partial\overline{z}^m} = \frac{\partial^{\|k\|+\|m\|}}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}\partial\overline{z}_1^{m_1}\ldots\partial\overline{z}_n^{m_n}}.$$

Положим также

$$\|\varphi\|_p = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{\|k\|+\|m\|}}{\partial z^k \partial \overline{z}^m}\varphi(z)\right| : \|k\|+\|m\| \leqslant p, \quad z \in \mathbb{C}^n\right\},$$

если $\varphi \in C^p(\mathbb{C}^n)$ и

$$\|\varphi\|_p = \sup\left\{\left|\frac{\partial^{\|k\|}}{\partial x^k}\varphi(x)\right| : \|k\| \leqslant p, \ x \in \mathbb{R}^n\right\}, \quad \text{если} \quad \varphi \in C^p(\mathbb{R}^n).$$

Напомним, что последовательность функций $\varphi_j \in \mathcal{D}_p(\Omega)$ называется сходящейся в $\mathcal{D}_p(\Omega)$, если она сходится по норме $\| : \|_p$ и носители функций φ_j содержатся в каком-либо общем для всех φ_j компактном подмножестве области Ω. Пространства, сопряженные пространствам $\mathcal{D}_p(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}_p[\Omega]$ обозначаются, соответственно, через $\mathcal{D}'_p(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'_p[\Omega]$. Напомним, что обобщенная функция f, т.е. функция из $\mathcal{D}(\Omega)$, имеет конечный порядок, если при некотором $p < \infty$

$$\|f\|_{p,\Omega_0} := \sup\left\{\frac{|(f,\varphi)|}{\|\varphi\|_p} : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_0)\right\} < \infty, \quad \forall\, \Omega_0 \Subset \Omega.$$

Такую обобщенную функцию можно, очевидно, рассматривать как элемент пространства $\mathcal{D}'_p(\Omega)$. Ее порядком называется наименьшее из чисел p, обладающих свойством: $\|f\|_{p,\Omega_0} < \infty$, $\forall\, \Omega_0 \Subset \Omega$.

Пусть $f \in \mathcal{D}'_p(T_G)$. Обозначим через A_f оператор, действующий в $\mathcal{D}_p(T_G)$ по правилу

$$A_f\varphi = \big(f(z), \varphi(z-t)\big) = \big(f(z+t), \varphi(z)\big), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Оператор сдвига на вектор $t \in \mathbb{R}^n$ обозначим через B_t. Таким образом $B_t\varphi = \varphi(z+t)$ и $A_f\varphi = (B_t f, \varphi) = (f, B_{-t}\varphi)$.

Определение 1.5. *Обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(T_G)$ называется п.п.о.ф. (порядка p) в T_G, если она имеет в T_G конечный порядок p и для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_p(T_G)$ функция $A_f\varphi$ является п.п.ф. Бора в $\mathbb{R}^n$.*

Очевидно, что любая п.п.ф. Бора в T_G является п.п.о.ф. в T_G порядка $p = 0$.

Одним из простейших свойств п.п.ф. Бора является ее ограниченность на оси (или на $\mathbb{R}^n$). Чтобы сформулировать некоторый аналог этого свойства для п.п.о.ф., положим

$$\|f\|^{(\xi)}_{p,G} = \sup\left\{\|f\|_{p,\Pi_\xi(x^0,G)} : x^0 \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Теорема 1.7. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка p. Тогда $\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0} < \infty$, $\forall\, \xi > 0$, $G^0 \Subset G$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{f(z+t) : t \in \mathbb{R}^n\}$ как семейство линейный непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_p[\Pi_\xi(0, G^0)]$. Так как $(f(z+t), \varphi(z))$ – п.п.ф. Бора для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_p(T_G)$, то это семейство ограничено на каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}_p[\Pi_\xi(0, G^0)]$. Пространство $\mathcal{D}_p[\Pi_\xi(0, G^0)]$ – банахово. Поэтому применима теорема Банаха–Штейнгауза, из которой следует, что

$$\sup\left\{\left|(f(z+t), \varphi(z))\right| : \varphi \in \mathcal{K},\, t \in \mathbb{R}^n\right\} < \infty$$

для любого ограниченного множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}_p[\Pi_\xi(0, G^0)]$. Отсюда, поскольку

$$\sup\left\{\left|(f(z+t), \varphi(z))\right| : \|\varphi\|_p \leqslant 1,\ \varphi \in \mathcal{D}_p[\Pi_\xi(0, G^0)]\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|(f(z), \varphi(z))\right| : \|\varphi\|_p \leqslant 1,\ \varphi \in \mathcal{D}_p[\Pi_\xi(t, G^0)]\right\} = \|f\|_{p, \Pi_\xi(t, G^0)}$$

заключаем, что $\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0} < \infty$, $\forall\, \xi > 0$, $G^0 \Subset G$. Теорема доказана.

Как и для обычных п.п.ф. почти периодичность обобщенной функции можно охарактеризовать в терминах компактности семейства ее сдвигов.

Теорема 1.8. *Для того, чтобы обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'_p(T_G)$ была почти периодической, необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности $\{h_j\} \subset \mathbb{R}^n$ можно было выбрать такую подпоследовательность $\{h_{j'}\}$, что $f(z + h_{j'})$ при $j' \to \infty$ сходится в $\mathcal{D}'_p(T_G)$ равномерно на каждом множестве*

$$\Gamma_{\mathcal{K}} = \{\varphi(z+t) : t \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in \mathcal{K}\},$$

где $\mathcal{K}$ – компактное подмножество пространства $\mathcal{D}_p(T_G)$.

Доказательство. Достаточность является очевидным следствием определений 1.2, 1.3 и 1.5. Более того, очевидно, что в части достаточности утверждение теоремы справедливо и в случае, когда вместо множеств $\Gamma_{\mathcal{K}}$ берутся множества $\{\varphi(z+t) : t \in \mathbb{R}^n\}$, т.е. при условии сходимости функций $(f(z+h_j), \varphi(z-t))$ по норме $\| : \|_p$ и для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(T_G)$ (или $\varphi \in \mathcal{D}_p(T_G)$).

Докажем необходимость. Пусть $f \in \mathcal{D}'_p(T_G)$ и пусть $\{\varphi_j\}$ – счетное семейство функций из $\mathcal{D}_p(T_G)$, плотное в $\mathcal{D}_p(T_G)$. Согласно определениям 1.5, 1.2 и 1.3 из произвольно заданной последовательности $\{h_j\}\subset\mathbb{R}^n$ можно выбрать подпоследовательность $\{h_j^{(1)}\}$ так, что для некоторой п.п.ф. Бора F_1 (на $\mathbb{R}^n$)

$$\lim_{j\to\infty}\|B_{h_j^{(1)}}A_f\varphi-F_1\|=0.$$

Применяя диагональный процесс получим далее последовательность точек $\widetilde{h}_j=h_j^{(j)}$ и последовательность п.п.ф. Бора F_j такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\|B_{\widetilde{h}_j}A_f\varphi_m-F_m\|=0,\quad\forall\, m. \tag{1.3}$$

Заметим, что если

$$\varphi\in\mathcal{D}_p\bigl[\Pi_\xi(x^0,G^0)\bigr],\quad\psi\in\mathcal{D}_p\bigl[\Pi_\xi(x^0,G^0)\bigr],\quad G^0\Subset G,$$

то

$$\|A_f\varphi-A_f\psi\|\leqslant\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\cdot\|\varphi-\psi\|_p. \tag{1.4}$$

Отсюда, ввиду плотности в $\mathcal{D}_p(T_G)$ семейства $\{\varphi_m\}$ следует, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}_p(T_G)$ на $\mathbb{R}^n$ найдется такая п.п.ф. Бора F_φ, что

$$\lim_{j\to\infty}\|B_{\widetilde{h}_j}A_f\varphi-F_\varphi\|=0. \tag{1.5}$$

При этом, как следует из (1.4),

$$\|F_\varphi\|\leqslant\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\cdot\|\varphi\|_p,$$

где $\xi>0$ и $G^0\Subset G$ таковы, что при некотором $x^0\in\mathbb{R}^n$ $\operatorname{supp}\varphi\subset\Pi_\xi(x^0,G^0)$. Отметим также, что $F_{\varphi_j}=F_j$ и $F_{\varphi+\psi}=F_\varphi+F_\psi$. Таким образом оператор $F:\varphi\to F_\varphi$ является линейным ограниченным оператором на каждом пространстве $\mathcal{D}_p[\Pi_\xi(x^0,G^0)]$. Заметим еще, что

$$\|B_{\widetilde{h}_j}A_f\varphi\|\leqslant\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\cdot\|\varphi\|_p,\ \forall\,\varphi\in\mathcal{D}_p[\Pi_\xi(x^0,G^0)]$$

и значит

$$\|(B_{\widetilde{h}_j}A_f-F)\varphi\|\leqslant 2\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\cdot\|\varphi\|_p.$$

Отсюда, поскольку объединение носителей функций φ, принадлежащих компактному в $\mathcal{D}_p(T_G)$ множеству $\mathcal{K}$, содержится при некоторых $\xi>0$ и $G^0\Subset G$ в $\Pi_\xi(0,G^0)$, заключаем, что предельный переход в (1.5) равномерен относительно $\varphi\in\mathcal{K}$.

Теорема доказана.

3. Среднее значение п.п.о.ф. П.п.о.ф. в T_G как и обычные п.п.ф. Бора имеют среднее значение.

Теорема 1.9. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка p. Тогда существует обобщенная функция $c_f \in \mathcal{D}'_p(G)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_p(T_G)$*

$$M(A_g\varphi) = (c_f, \psi_\varphi), \tag{1.6}$$

где

$$\psi_\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+iy)\,dx.$$

Если f – п.п.ф. Бора в T_G, то

$$c_f = M(y; f). \tag{1.7}$$

Доказательство. Зададим функционал $a_f \in \mathcal{D}'_p(T_G)$ посредством равенства

$$(a_f, \varphi) = M(A_f\varphi).$$

Линейность этого функционала очевидна. Докажем его непрерывность. Если $\operatorname{supp}\varphi \subset \Pi_\xi(x^0, G^0)$, то

$$\left|\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(0)} A_f\varphi\,dt\right| \leqslant \frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(0)} \|\varphi\|_p \cdot \|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\,dt \leqslant \|\varphi\|_p \cdot \|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}$$

и, значит

$$|(a_f, \varphi)| \leqslant \|\varphi\|_p \cdot \|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}. \tag{1.8}$$

Следовательно, $a_f \in \mathcal{D}'_p(T_G)$. Заметим далее, что, как следует из свойств среднего значения п.п.ф. Бора

$$(a_f, \varphi) = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(0)} A_f\varphi\,dt = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(x^0)} A_f\varphi\,dt =$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(0)} (A_f\varphi)(t+x^0)\,dt = M(A_f B_{-x^0}\varphi) = (a_f, B_{-x^0}\varphi),\ \forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому $a_f = c_f \otimes m_n$, где m_n – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, а $c_f \in \mathcal{D}'_p(G)$. Таким образом

$$M(A_f\varphi) = (c_f \otimes m_n, \varphi) = (c_f, \psi_\varphi)$$

и значит справедливо утверждение (1.7) доказываемой теоремы.

Пусть теперь f – п.п.ф. Бора в T_G. Тогда

$$\begin{aligned}(c_f, \psi_\varphi) &= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(2s)^n} \int\limits_{\Pi_s(0)} A_f \varphi\, dt = \\ &= \lim_{s\to\infty} \int\limits_{T_G} \varphi(z)\, dx\, dy \frac{1}{(2s)^n} \int\limits_{\Pi_s(0)} f(z+t)\, dt.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Согласно теореме 1.1

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{(2s)^n} \int\limits_{\Pi_s(0)} f(z+t)\, dt = M(y; f),$$

причем предельный переход здесь равномерный относительно $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in G' \Subset G$. Поэтому в (1.9) возможен предельный переход под знаком интеграла, в результате которого получаем

$$(c_f, \psi_\varphi) = \int\limits_{T_G} \varphi(z) M(y; f)\, dx dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} M(y; f) \psi_\varphi(y) dy.$$

Следовательно, $c_f = M(y; f)$.

Теорема доказана.

Замечание 1.2. Из (1.1) следует, что

$$(c_f, \psi_\varphi) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{(2s)^n} \int\limits_{\Pi_s(x^0)} A_f \varphi\, dx\, dt$$

и при этом предел справа равномерный относительно $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорему 1.9 естественно трактовать как теорему о существовании “слабого” среднего значения п.п.о.ф. В случае, когда п.п.о.ф. имеет порядок $p = 0$, т.е. является мерой, можно ставить вопрос о существовании “сильного” среднего значения.

Теорема 1.10. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка $p = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_0(G)$*

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(x^0,G)} f(x+iy)\varphi(y)\,dx\,dy=(c_f,\varphi),^{*)}$$

причем предел здесь равномерный относительно $x^0\in\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\sup_{\substack{s>1,\\ x^0\in\mathbb{R}^n}}\left|\frac{1}{(2s)^n}\int\limits_{\Pi_s(x^0,G^0)} f(x+iy)\varphi(y)\,dx\,dy\right|=M_\varphi<\infty,\ \forall\,\varphi\in\mathcal{D}_0(G).$$

Действительно, если $\operatorname{supp}\varphi\subset G'\Subset G$, то

$$\frac{1}{(2s)^n}\left|\int\limits_{\Pi_s(x^0,G)} f(x+iy)\varphi(y)\,dx\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|\cdot\|f\|^{(1)}_{0,G'}\cdot\frac{(2(s+1))^n}{(2s)^n}\leqslant\|f\|^{(1)}_{0,G'}\cdot\|\varphi\|\cdot 2^{n+1}=M_\varphi<\infty.$$

Поэтому для любой последовательности точек $x^{(j)}\in\mathbb{R}^n$ и любой последовательности чисел ξ_j можно выбрать такую последовательность индексов j', что

$$\exists\lim_{j'\to\infty}\frac{1}{(2\xi_{j'})^n}\int\limits_{\Pi_{\xi_{j'}}(x^{(j')},G)} f(x+iy)\varphi(y)\,dx\,dy:=U_\varphi.$$

Для удобства далее вместо j' будем писать j. Покажем, что для указанных последовательностей ξ_j и $x^{(j)}$ при любом $h\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\xi_j\to\infty}\frac{1}{(2\xi_j)^n}\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)},G)} f(x+iy+h)\varphi(y)\,dx\,dy=U_\varphi,\tag{1.10}$$

и что стремление к пределу здесь равномерное на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$. Для этого рассмотрим разность

$$Q(h,\xi_j,x^{(j)})=$$

$$=\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)},G)} f(x+iy+h)\varphi(y)\,dx\,dy-\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)},G)} f(x+iy)\varphi(y)\,dx\,dy.$$

*) Интеграл, фигурирующий в этом равенстве, понимается как интеграл по мере.

Используя теорему 1.1 получаем, что если $\operatorname{supp}\varphi \subset G' \Subset G$, то

$$\left|Q(h,\xi_j,x^{(j)})\right| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|f\|^{(1)}_{0,G'} \cdot V(\xi_j,h),$$

где $V(\xi,h)$ – число "кубиков" вида $k+\Pi_1(0)$, $k\in\mathbb{Z}^n_+$, имеющих непустое пересечение с замыканием множества

$$\left\{\Pi_\xi(h)\setminus\Pi_\xi(0)\right\}\cup\left\{\Pi_\xi(0)\setminus\Pi_\xi(h)\right\}.$$

Очевидно тогда, что $(2\xi_j)^{-n}Q(h,\xi_j,x^{(j)})\to 0$ при $j\to\infty$, притом равномерно относительно h из любого ограниченного множества. Отсюда заключаем о выполнении соотношения (1.10).

Покажем теперь, что U_φ не зависит от выбора последовательностей $\{x^{(j)}\}$ и $\{\xi_j\}$. Действительно, из (1.10) следует, что

$$\lim_{\xi_j\to\infty}\frac{1}{(2\xi_j)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)},G)}\varphi(y)f(x+iy+t)\,dt\,dy=$$

$$=U_\varphi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx,\quad \forall\,\varphi\in\mathcal{D}_0(G),\quad \psi\in\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n).$$

С другой стороны, согласно замечанию 1.2

$$\lim_{\xi_j\to\infty}\frac{1}{(2\xi_j)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)},G)}\varphi(y)f(x+iy+t)\,dt\,dy=$$

$$\lim_{\xi_j\to\infty}\frac{1}{(2\xi_j)^n}\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)})}dt\int\limits_{T_G}\psi(x)\varphi(y)f(x+iy+t)\,dx\,dy=$$

$$\lim_{\xi_j\to\infty}\frac{1}{(2\xi_j)^n}\int\limits_{\Pi_{\xi_j}(x^{(j)})}A_f(\varphi\psi)dt=M(A_f(\varphi\psi))=(c_f,\varphi)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx.$$

Следовательно, $U_\varphi=(c_f,\varphi)$. Таким образом U_φ не зависит от выбора последовательностей $\{\xi_j\}$ и $\{x^{(j)}\}$ и значит, равномерно относительно $x^0\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(x^0,G)}f(x+iy)\varphi(y)\,dxdy=(c_f,\varphi),\quad\forall\,\varphi\in\mathcal{D}(G).$$

Теорема доказана.

Следующая теорема может рассматриваться как некоторый вариант теоремы о "сильном" среднем значении п.п.о.ф.

Теорема 1.11. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка $p = 0$. Тогда обобщенные функции $f^{(\xi)}(z) := f(\xi x + iy)$, $\xi > 0$, сходятся при $\xi \to \infty$ как элементы пространства $\mathcal{D}'_0(T_G)$ к обобщенной функции (мере) $c_f \otimes m_n$.**)

Доказательство. Заметим, что конечными линейными комбинациями функций вида $\varphi(y)\chi_{h,\eta}(x)$, где $\chi_{h,\eta}(x)$ – характеристическая функция куба $\Pi_\eta(h)$, можно по норме $\|\cdot\|$ с произвольной точностью приблизить любую функцию $\psi \in \mathcal{D}_0(T_G)$. При этом носители аппроксимирующих функций можно считать содержащимися в какой-либо фиксированной области $\Omega' \Subset T_G$, содержащей $\operatorname{supp}\psi$. Кроме того отметим, что

$$\|f^{(\xi)}\|^{(1)}_{0,G'} \leqslant \frac{1}{(2\xi)^n}\|f\|^{(\xi)}_{0,G'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\xi)^n}\|f\|^{(1)}_{0,G'}(\xi+1)^n \leqslant \mathrm{const}\ \ \|f\|^{(1)}_{0,G'}, \quad G' \Subset G,$$

и, следовательно, семейство мер $f^{(\xi)}(z)$ равномерно ограничено по вариации на каждом множестве $\Pi_\xi(0, G')$, $\xi > 0$, $G' \Subset G$. Поэтому для доказательства сходимости обобщенных функций $f^{(\xi)}(z)$ в $\mathcal{D}'_0(T_G)$ при $\xi \to \infty$ достаточно установить наличие такой сходимости на “ступеньках”, т.е. на функциях вида $\psi(z) = \varphi(y)\chi_{h,\eta}(x)$.

Имеем

$$\big(f^{(\xi)}(z), \psi(z)\big) =$$

$$= \big(f(\xi x + iy), \varphi(y))\chi_{h,\eta}(x)\big) = \frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_{\xi\eta}(\xi h, G)} f(z)\varphi(y)\,dxdy.$$

Отсюда, используя теорему 1.10, заключаем, что

$$\exists \lim_{\xi\to\infty} \big(f^{(\xi)}(z), \psi(z)\big) = (c_f, \varphi)\cdot(2\eta)^n.$$

Теорема доказана.

*) В частном случае функций $\ln|F(z)|$, где $F(z)$ – голоморфная п.п.ф., это утверждение было доказано ранее в [1].

Следствие 1.1. *Пусть f – п.п. положительная о.ф. в T_G, область $C' \Subset G$, и пусть $c_f(\partial G') = 0$, где мера c_f та же, что и в теореме 1.9. Тогда*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(0,G')} f(z)\,dxdy = c_f(G').$$

Это утверждение очевидным образом вытекает из теоремы 1.11 и известных свойств слабо сходящихся семейств положительных мер.

Следствие 1.2. *Если ограниченная сверху (снизу) локально суммируемая функция $f(z)$, $z \in T_G$, является п.п.о.ф. и, если соответствующая обобщенная функция c_f регулярна,*) то для любой области $G' \Subset G$*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(0,G')} f(z)\,dxdy = \int\limits_{G'} c_f(y)\,dy.$$

Это утверждение является очевидным следствием предыдущего.

4. Ряд Фурье почти периодической обобщенной функции в $\mathbf{T_G}$. Наличие среднего значения п.п.о.ф. позволяет ввести понятие ее спектра и ряда Фурье.

Теорема 1.12. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка p и пусть*

$$f_\lambda = e^{-i\langle\lambda,z\rangle} f.$$

Тогда множество

$$\Lambda_f := \{\lambda \in \mathbb{R}^n : c_{f_\lambda} \neq 0\},$$

называемое спектром f, не более чем счетно.

Доказательство. Покажем вначале, что существует такое не более чем счетное множество $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^n$, что

$$M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f\varphi\big) = 0, \quad \forall\,\lambda \notin \Lambda^*, \quad \varphi \in \mathcal{D}(T_G). \tag{1.11}$$

*) т.е. задается локально суммируемой функцией.

Возьмем для этого какое-либо счетное множество $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_p(T_G)$, плотное в $\mathcal{D}_p(T_G)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathcal{E}$ существует такое не более чем счетное множество $\Lambda_{f,\varphi} \subset \mathbb{R}^n$, что

$$M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f \varphi\big) = 0, \quad \forall\ \lambda \notin \Lambda_{f,\varphi}.$$

Обозначим

$$\Lambda^* = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}} \Lambda_{f,\varphi}.$$

Пусть φ – произвольная функция из $\mathcal{D}_p(T_G)$ и пусть последовательность функций $\varphi_j \in \mathcal{D}_p(T_G)$, $j = 1, 2, \ldots$, такова, что $\varphi_j \to \varphi$ в $\mathcal{D}_p(T_G)$ при $j \to \infty$. Так как при $\operatorname{supp}\varphi \subset \Pi_\xi(x^0, G^0)$

$$\big|M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f(\varphi - \varphi_j)\big)\big| \leqslant \|\varphi - \varphi_j\|_p \cdot \|f\|^{(\xi)}_{p,G^0},$$

(см. (1.8)), то при $\lambda \notin \Lambda^*$, для всех j начиная с некоторого

$$\big|M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f(\varphi - \varphi_j)\big)\big| = \big|M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f\varphi\big)\big| < \varepsilon.$$

Следовательно, выполнено соотношение (1.11). Далее имеем

$$\begin{aligned} M(A_{f_\lambda}\varphi) &= M\big((e^{-i\langle\lambda,z\rangle} f(z), \varphi(z-t))\big) = \\ &= M\big((f(z), e^{-i\langle\lambda,z\rangle}\varphi(z-t))\big) = \qquad (1.12)\\ &= M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle}(f(z), e^{-i\langle\lambda,z-t\rangle}\varphi(z-t))\big) = \\ &= M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f(e^{-i\langle\lambda,z\rangle}\varphi(z))\big) = M\big(e^{-i\langle\lambda,t\rangle} A_f\psi\big), \\ &\text{где}\quad \psi(z) = \varphi_\lambda = e^{-i\langle\lambda,z\rangle}\varphi(z). \end{aligned}$$

Последний член в (1.12) согласно (1.11) равен нулю, когда $\lambda \notin \Lambda^*$. Отсюда, учитывая равенство $M(A_{f_\lambda}\varphi) = (c_{f_\lambda}, \psi_\varphi)$ и произвольность выбора функции φ, заключаем, что $c_{f_\lambda} = 0$, $\forall\,\lambda \notin \Lambda^*$. Поэтому $\Lambda_f \subset \Lambda^*$, а согласно построению множество Λ^* не более чем счетно.

Теорема доказана.

Определение 1.6. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка p. Ее рядом Фурье называется ряд*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} e^{i\langle\lambda,z\rangle} c_{f_\lambda}.$$

Непосредственно проверяется, что коэффициенты Фурье c_{f_λ} обобщенной функции f связаны с коэффициентами Фурье $\widetilde{c}_{\lambda,f,\varphi}$ соответствующих п.п.ф. Бора $A_f\varphi$ посредством равенств

$$\widetilde{c}_{\lambda,f,\varphi} = (\sqrt{2\pi})^n \big(c_{f_\lambda}, \widehat{\varphi}(y;-\lambda)\big), \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(T_G), \tag{1.13}$$

где

$$\widehat{\varphi}(y;\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\varphi(x+iy)\,dx. \tag{1.14}$$

Ясно также, что когда f – п.п.ф. Бора, то c_{f_λ} совпадает с $a_{\lambda,f}(y)$, т.е. с обычными коэффициентами Фурье рассматриваемых функций.

Как и для п.п.ф. Бора для п.п.о.ф. в T_G справедливы теоремы единственности и аппроксимации.

Теорема 1.13. *Если п.п.о.ф. f и g имеют один и тот же ряд Фурье, т.е. $c_{f_\lambda} = c_{g_\lambda}$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n$, то $f = g$.*

Эта теорема является очевидным следствием соотношения (1.13) и теоремы единственности для п.п.ф. Бора.

Теорема 1.14. *Пусть f – п.п.о.ф. в T_G порядка p и пусть*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} e^{i\langle\lambda,z\rangle} a_\lambda, \quad a_\lambda \in \mathcal{D}'_p(G)$$

– ее ряд Фурье. Тогда существуют такие функции $\mu_j : \Lambda \to \mathbb{R}_+$, $j = 1,2,$ что

$$\#\big\{\lambda \in \Lambda : \mu_j(\Lambda) \neq 0\big\} < \infty, \quad \forall\, j,$$

и

$$\left\| \left(f(z) - \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu_j(\lambda) e^{i\langle\lambda,z\rangle} a_\lambda,\ \varphi(z-t) \right) \right\| \to 0$$

при $j \to \infty$ равномерно относительно $\varphi \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – произвольное компактное множество в $\mathcal{D}_p(T_G)$.

Доказательство. Каждая боровская п.п.ф. $A_f\varphi$ имеет спектр, вложенный в спектр Λ обобщенной функции f. Поэтому функции μ_j, с помощью которых для функции $A_f\varphi$ согласно теореме 1.6 строятся аппроксимирующие ее полиномы P_j, можно считать не зависящими от выбора $\varphi \in \mathcal{D}_p(T_G)$. Положим

$$\widetilde{P}_j = \sum_{\lambda\in\Lambda} e^{i\langle\lambda,z\rangle} \mu_j(\lambda) a_\lambda.$$

Тогда согласно теореме 1.6

$$\|(f-\widetilde{P}_j,\varphi(z-t))\| = \Big\|A_f\varphi - \sum_{\lambda\in\Lambda}\mu_j(\lambda)\widetilde{c}_{\lambda,f,\varphi}e^{i\langle\lambda,t\rangle}\Big\| \to 0 \qquad (1.15)$$

при $j\to\infty$. Чтобы показать равномерность фигурирующего здесь предела (относительно $\varphi\in\mathcal{K}$) заметим, что, как следует из общих свойств п.п.ф. Бора (см. [7, 8]), функция $(\widetilde{P}_j(z),\ \varphi(z-t))$ может быть представлена в виде

$$\big(\widetilde{P}_j(z),\varphi(z-t)\big) = M\big(\mathcal{K}_j(t')(A_f\varphi)(t+t')\big),$$

где $\{\mathcal{K}_j(t')\}$ – некоторое, строящееся по Λ_f семейство ядер, называемых составными ядрами Фейера–Бохнера, и обладающих следующими двумя свойствами: $\mathcal{K}_j(t')\geqslant 0$, $M(\mathcal{K}_j(t'))=1$. Поэтому при $\operatorname{supp}\varphi\Subset\Pi_\xi(x^0,G^0)$

$$\big\|\big(\widetilde{P}_j(z),\varphi(z-t)\big)\big\| = \big\|M\big(\mathcal{K}_j(t')(A_f\varphi)(t+t')\big)\big\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A_f\varphi\|\cdot M(\mathcal{K}_j) = \|A_f\varphi\| \leqslant \|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\|\varphi\|_p,$$

и значит

$$\big\|\big(\widetilde{P}_j(z)-f(z),\varphi(z-t)\big)\big\| \leqslant 2\|f\|^{(\xi)}_{p,G^0}\|\varphi\|_p.$$

Отсюда, ввиду предполагаемой компактности множества $\mathcal{K}$, очевидным образом следует равномерность (относительно $\varphi\in\mathcal{K}$) предельного перехода в (1.15).

Теорема доказана.

Замечание 1.3. Как и для п.п.ф. Бора на T_S и T_G (см. замечание 1.1), приведенные выше определения и утверждения, по существу без изменений, распространяются на случай обобщенных функций в областях $T_G=\mathbb{R}^n\times G$, где $G\subset\mathbb{R}^m$.

§2. Почти периодические обобщенные функции на T_S

Наряду с п.п.о.ф. в T_G при изучении некоторых функций, порождаемых голоморфными п.п.ф. многих переменных, возникают п.п.о.ф. на $\mathbb{R}^n_{(x)}$, зависящие от параметра $y\in S$, где, как и прежде, S – компакт в $\mathbb{R}^n$. Для краткости такие функции в $\mathbb{R}^n$, условимся называть п.п.о.ф. на T_S. Точнее, дадим следующее

Определение 2.1. *Пусть $f(x;y)$ – обобщенная функция порядка p на $\mathbb{R}^n_{(x)}$, зависящая от параметра $y \in S$. Назовем ее п.п.о.ф. (порядка p) на T_S, если для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$ функция $\widetilde{A}_f\varphi = (\widetilde{A}_f\varphi)(t,y) := (f(x;y), \varphi(x-t))$ является п.п.ф. Бора на T_S.*

Очевидно, что функция $f(x;y)$, являющаяся п.п.о.ф. на каждом множестве $T_S \subset T_G$, является в то же время п.п.о.ф. в T_G.

Проводя рассуждения, подобные использованным в §1, и следя при этом за равномерностью по $y \in S$ соответствующих оценок, легко убедиться в справедливости аналогов теорем из §1.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x;y)$ – п.п.о.ф. на T_S порядка p. Тогда*

$$\sup_{y \in S} \|f(x;y)\|_p^{(\xi)} < \infty,$$

где

$$\|f(x;y)\|_p^{(\xi)} = \sup\left\{\frac{|(f(x;y),\varphi(x))|}{\|\varphi\|_p} : \varphi \in \mathcal{D}_p[\Pi_\xi(h)],\ h \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Теорема 2.2. *Для того, чтобы обобщенная (в $\mathbb{R}^n_{(x)}$) функция $f(x;y)$, $y \in S$, была п.п.о.ф. на T_S порядка p, необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности $\{h_j\} \subset \mathbb{R}^n$ можно было выбрать такую подпоследовательность $\{h_{j'}\}$, что последовательность функций $(f(x+h_{j'};y), \varphi(x-t))$ при $j' \to \infty$ сходится, притом равномерно относительно $y \in S$, $t \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – произвольное компактное подмножество в пространстве $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$.*[*)]

Теорема 2.3. *Пусть $f(x;y)$ – п.п.о.ф. на T_S. Тогда существует такая непрерывная на S функция $c_f(y)$, что*

$$\lim_{\xi\to\infty}\sup_{y\in S}\left|\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0)} \widetilde{A}_f\varphi dx - c_f(y)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx\right| = 0,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.4. *Пусть $f(x;y)$ – п.п.о.ф. на T_S. Тогда существует такое не более чем счетное множество $\Lambda_f \subset \mathbb{R}^n$, что*

$$c_{f_\lambda}(y) \equiv 0,\ \forall\,\lambda \notin \Lambda_f, \quad \text{где} \quad f_\lambda = e^{-i\langle\lambda,x\rangle} f(x;y).$$

[*)] Как и в теореме 1.8 в части достаточности здесь можно ограничиться множествами $\mathcal{K}$, состоящими из одной функции.

Теорема 2.5. *Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ – п.п.о.ф. на T_S и если $c_{f_\lambda}(y) = c_{g_\lambda}(y)$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}^n$, то $f(x;y) = g(x;y)$.*

Теорема 2.6. *Пусть f – п.п.о.ф. на T_S порядка p и пусть $\sum_\mu c_\mu(y)e^{i\langle\lambda_\mu,y\rangle}$ – ее ряд Фурье. Тогда существуют такие числа $m_{\mu,\nu}$, $\mu = 1,\dots,N_\nu$, $\nu = 1,2,\dots$, что равномерно относительно $\varphi \in \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – произвольное компактное множество в $\mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n)$, при $\nu \to \infty$*

$$\Big\|\Big(f(x;y) - \sum_{\mu=1}^{N_\nu} m_{\mu,\nu}c_\mu(y)e^{i\langle\lambda_\mu,x\rangle}, \varphi(x-t)\Big)\Big\|_S \to 0.$$

Теорема 2.7. *Пусть f – п.п.о.ф. на T_S порядка $p = 0$. Тогда*

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(x^0)} f(x;y)\,dx = c_f(y),$$

причем предел здесь равномерный относительно $y \in S$ и $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2.8. *Пусть f – п.п.о.ф. на T_S порядка $p = 0$. Тогда функции $(f(\xi x;y),\varphi(x))$, $\varphi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, при $\xi \to \infty$ сходятся равномерно относительно $y \in S$ к функции $c_f(y)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx$.*

В заключение этого параграфа проведем некоторую оценку коэффициентов Фурье п.п.о.ф.

Если f – п.п.о.ф. на T_S порядка p, то, как легко видеть, ее коэффициенты Фурье $c_{f_\lambda}(y)$ связаны с коэффициентами Фурье $\widetilde{c}_{\lambda,f,\varphi}(y)$ функции $\widetilde{A}_f\varphi$ соотношениями

$$\widetilde{c}_{\lambda,f,\varphi} = (\sqrt{2\pi})^n c_{f_\lambda}(y)\widehat{\varphi}(-\lambda), \quad \varphi \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

где

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\lambda,x\rangle}\varphi(x)\,dx.$$

Из этих соотношений и равенства Парсеваля для п.п.ф. Бора на T_S следует, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} \big|c_{\lambda,f}(y)\big|^2\big|\widehat{\varphi}(\lambda)\big|^2 < \infty, \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R}^n), \quad y \in S. \tag{2.2}$$

Возьмем в качестве функции φ функцию $\varphi(x) = \varphi_0(x_1)\ldots\varphi_0(x_n)$, где $\varphi_0(s) = e^s\psi(s)$, а $\psi(s)$ – $(p+2)$-кратная свертка функций

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & |s| > 1 \\ 1/2, & |s| \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $\varphi_0(s)$, очевидно, принадлежит $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, а ее преобразование Фурье

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) = (\widehat{\eta}(\xi+i))^{p+2} = \left(\frac{\sin(\xi+i)}{\xi+i}\right)^{p+2}.$$

Заметим, что $|\sin(\xi+i)|^2 = \mathrm{Sh}^2 1 + \sin^2\xi$. Следовательно

$$\widehat{\varphi}(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \widehat{\varphi}_0(\lambda_1)\ldots\widehat{\varphi}_0(\lambda_n) \geqslant \frac{(\mathrm{Sh}\,1)^{\frac{n}{2}(p+2)}}{((1+\lambda_1^2)\ldots(1+\lambda_n^2))^{p/2+1}}.$$

Отсюда и из 2.2 заключаем, что

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_f} \frac{|c_{\lambda,f}(y)|^2}{(1+\lambda_1^2)^{p/2+1}\ldots(1+\lambda_n^2)^{p/2+1}} < \infty, \quad \forall\, y \in S.$$

§3. Голоморфные почти периодические функции в T_G. Распределение корней

Возможность применения теории п.п.о.ф. к изучению голоморфных п.п.ф. основывается на следующем утверждении.

Теорема 3.1. *Пусть $f(z)$ – голоморфная почти периодическая функция (Бора) в T_G. Тогда функция $\ln|f(z)|$ является п.п.о.ф. порядка $p = 0$ в T_G, а также на каждом множестве T_S, $S \Subset G$.*

Доказательство. Вначале докажем лемму.

Лемма 3.1. *Если последовательность функций $F_j(z)$, $j = 1, 2, \ldots$, голоморфных в области $\Pi_\xi(0, G)$, равномерно на каждом подмножестве этой области сходится к функции $F(z)$, то для любого $\xi' < \xi$*

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Pi_{\xi'}(0)} |\ln|F_j(x+iy)| - \ln|F(x+iy)||\,dx = 0, \tag{3.1}$$

причем сходимость здесь равномерная относительно $y \in S$, $S \Subset G$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что равномерная сходимость в (3.1) является следствием сходимости при каждом

$y \in G$. Действительно, если равномерной сходимости в (3.1) нет, то существует такая последовательность точек $y^{(j)} \in G$, $j = 1, 2, \dots$, сходящаяся к некоторой точке $\widetilde{y} \in G$, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Pi_{\xi'}(0)} |\ln|F_j(x+iy^{(j)})| - \ln|F(x+i\widetilde{y})|| \, dx > 0.$$

Но это противоречит равенству

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\Pi_{\xi'}(0)} |\ln|F_j(x+iy^{(j)})| - \ln|F(x+i\widetilde{y})|| \, dx = 0,$$

полученному применением (3.1) к последовательности функций $F_j(z+iy^{(j)})$, равномерно сходящейся к функции $F(z+i\widetilde{y})$.

Заметим далее, что утверждение о наличии равенства (3.1) имеет локальный характер, т.е. для его доказательства достаточно показать наличие равенства

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{|x|<r} |\ln|F_j(x)| - \ln|F(x)|| \, dx = 0, \quad r < 1 \tag{3.2}$$

для любой последовательности голоморфных в шаре $|z| \leqslant r_1$, $r_1 > 1$, функций $F_j(z)$, равномерно сходящихся в этом шаре к функции $F(z)$.

Рассмотрим вначале случай $n = 1$. Не нарушая общности, можно считать, что $F(0) \neq 0$ и $|F(z)| \neq 0$ при $|z| = 1$. В этой ситуации для всех j, начиная с некоторого, число корней функции $F_j(z)$ в круге $|z| < 1$ совпадает с числом корней функции $F(z)$. Обозначим эти корни, соответственно, через $a_{1,j}, \dots, a_{N,j}$ и $a_1, \dots, a_N$ (нумерация производится с учетом кратности). Положим $F_j = \Psi_j \Phi_j$, $F = \Psi\Phi$, где

$$\Phi_j = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - a_{k,j}}{1 - \overline{a}_{k,j} z}, \quad \Phi(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}.$$

Из равномерной сходимости функций $F_j(z)$ к $F(z)$ следует, что $\Psi_j(z) \rightrightarrows \Psi(z)$, $|z| \leqslant 1$, и при надлежащей нумерации корней $a_{k,j}$ и a_k $\lim\limits_{j\to\infty} a_{k,j} = a_k$, $k = 1, \dots, N$. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} |\ln|\Psi_j(x)| - \ln|\Psi(x)|| \, dx = 0, \quad r < 1 \tag{3.3}$$

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{-r}^{r} |\ln|\Phi_j(x)| - \ln|\Phi(x)|| \, dx = 0, \quad r < 1 \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) следует (3.1) для $n = 1$. Для доказательства равенства (3.1) в случае произвольного n оценим в рассмотренной выше ситуации $n = 1$ интеграл $\int_{-r}^{r} \ln|F(x)|dx$. Обозначим $M_F(R) = \max\{|F(z)| : |z| = R\}$. Используя неравенство Каратеодори (см., например, [9]) получаем, что при $|z| = R < 1$

$$|\ln|\Psi(z)|| < \frac{2R}{1-R}\left\{\ln M_F(1) - \ln|F(0)| + \ln\left|\prod_{k=1}^{N} a_k\right|\right\}.$$

Следовательно

$$\int\limits_{-r}^{r} |\ln|\Psi(x)|| \, dx \leqslant \frac{4r^2}{1-r}\{\ln M_F(1) - \ln|F(0)|\}. \tag{3.5}$$

Далее, как показывает непосредственное вычисление

$$\int\limits_{-r}^{r} \ln\left|\frac{x-a}{1-\overline{a}x}\right| dx \geqslant -2 - 2\ln 2 \geqslant -4.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-r}^{r} |\ln|\Phi(x)|| \, dx \leqslant 4N \leqslant \frac{4}{\ln r_1}\{\ln M_F(r_1) - \ln|F(0)|\}. \tag{3.6}$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$\int\limits_{-r}^{r} |\ln|F(x)|| \, dx \leqslant c(r_1)\ln M_F(r_1) + c_1(r_1, r)|\ln|F(0)||, \tag{3.7}$$

где константы $c(r_1)$ и $c_1(r_1, r)$ не зависят от выбора функции F. В случае $n > 1$ для функции $F(z)$, голоморфной в шаре $|z| < r_1$, $r_1 > 1$, используя оценку (3.7), имеем

$$\int\limits_{0}^{r} |\ln|F(\xi x)||\xi^{n-1} d\xi \leqslant c(r_1)\ln M_F(r_1) + c_1(r_1, r)|\ln|F(0)||.$$

Отсюда следует, что в правой части равенства

$$\int\limits_{|x|<r} |\ln|F_j(x)| - \ln|F(x)||dx =$$

$$= \int\limits_{|x|=1} d\sigma(x) \int\limits_0^r |\ln|F_j(\xi x)| - \ln|F(\xi x)||\xi^{n-1}\,d\xi$$

возможен предельный переход под знаком интеграла по единичной сфере. Но, как следует из доказанного выше (случай $n = 1$)

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_0^r |\ln|F_j(\xi x)| - \ln|F(\xi x)||\xi^{n-1}\,d\xi = 0.$$

Следовательно

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{|x|<r} |\ln|F_j(x)| - \ln|F(x)||dx = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $F(z)$ – голоморфная п.п.ф. в T_G. Согласно определениям 1.2 и 1.3 из каждой последовательности $\{h_j\} \subset \mathbb{R}^n$ можно выбрать подпоследовательность $\{h_{j'}\}$ так, что последовательность $F(z+h_{j'})$ сходится к некоторой функции $\widetilde{F}(z)$ по норме $\|\cdot\|_S$ для любого $S \Subset G$. Для удобства далее будем писать j вместо j'. Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{y\in S} \Big\| \int\limits_{\Pi_\xi(t)} |\ln|F(z+h_j)| - \ln|\widetilde{F}(z)|\,|dx \Big\| = 0. \tag{3.8}$$

Предположим противное, т.е. что при некотором $\varepsilon > 0$ и некоторых $t^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ и $y^{(j)} \in S$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{\Pi_\xi(t^{(j)})} |\ln|\,F(x+iy^{(j)}+h_j)\,| - \ln|\,\widetilde{F}(x+iy^{(j)})\,|\,|\,dx > \varepsilon. \tag{3.9}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $y^{(j)} \to \widetilde{y} \in S$. Выберем из последовательности $t^{(j)}$ подпоследовательность $t^{(j_k)}$ так, чтобы функции $\widetilde{F}(z+t^{(j_k)})$ при $k \to \infty$ равномерно на каждом множестве T_S, $S \Subset G$, сходились к некоторой функции $\widehat{F}(z)$. Это возможно, поскольку функция $\widetilde{F}(z)$, будучи равномерным пределом голоморфных п.п.ф., сама является таковой. Заметим, что при указанном выборе последовательностей h_j и $t^{(j_k)}$ функции $F(z+t^{(j_k)}+h_{j_k}+iy^{(j_k)})$ сходятся к функции $\widehat{F}(z+i\widetilde{y})$. Учитывая тогда (3.9) получаем

$$0<\varepsilon \leqslant \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Pi_\xi(t^{(j_k)})} |\ln|F(x+h_{j_k}+iy^{(j_k)})|-\ln|\widetilde{F}(x+iy^{(j_k)})||\,dx=$$

$$=\underline{\lim}_{k\to\infty} \int\limits_{\Pi_\xi(0)} |\ln|F(x+t^{(j_k)}+h_{j_k}+iy^{(j_k)})|-\ln|\widetilde{F}(x+t^{(j_k)}+iy^{(j_k)})||\,dx\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Pi_\xi(0)} |\ln|F(x+t^{(j_k)}+h_{j_k}+iy^{(j_k)})|-\ln|\widehat{F}(x+i\widetilde{y})||\,dx+$$

$$+\overline{\lim_{k\to\infty}} \int\limits_{\Pi_\xi(0)} |\ln|\widetilde{F}(x+t^{(j_k)}+iy^{(j_k)})|-\ln|\widehat{F}(x+i\widetilde{y})||\,dx=I_1+I_2.$$

Но согласно лемме 3.1, $I_1=0$ и $I_2=0$. Следовательно, сделанное допущение невозможно и тем самым соотношение (3.8) доказано. Используя его, при том же выборе последовательности h_j и при $\varphi\in\mathcal{D}_0(\Pi_\xi(0))$ получаем

$$\lim_{j\to\infty}\left\|(\ln|F_j(z+h_j)|,\varphi(x-t))-(\ln|\widetilde{F}(z)|,\varphi(x-t))\right\|_S\leqslant$$

$$\leqslant\|\varphi\|\cdot\lim_{j\to\infty}\Big\|\int\limits_{\Pi_\xi(t)}|\ln|F(z+h_j)|-\ln|F(z)||\,dx\Big\|_S=0.$$

Таким образом функция $\widetilde{A}_{\ln|F|}\varphi$ является п.п.ф. Бора на T_S, $\forall S\Subset G$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, $\ln|F(z)|$ – п.п.о.ф. порядка $p=0$ на T_S, $\forall S\Subset G$, а значит и в области T_G.

Теорема доказана.

Пусть $F(z)$ – функция из теоремы 3.1. Ввиду доказанной в этой теореме почти периодичности функции $\ln|F(z)|$ и согласно теореме 2.7 и следствию 1.2 существуют пределы

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0)}\ln|F(z)|\,dx:=\widetilde{c}_F(y),\quad y\in G \tag{3.10}$$

и

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0,G')}\ln\mid F(z)\mid dxdy=\int\limits_{G'}\widetilde{c}_F(y)dy,\quad G'\Subset G. \tag{3.11}$$

При этом сходимость в (3.10) равномерная по $y\in G'\Subset G$, и функция $\widetilde{c}_F(y)$ непрерывна в G. Поскольку

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0)}\ln\mid F(z)\mid dx=$$

$$=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(h)}\ln\mid F(z)\mid dx,\quad \forall\, h\in\mathbb{R}^n,$$

то

$$\widetilde{c}_F(y)=\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0)}\ln\mid F(t+z)\mid dt.$$

Таким образом непрерывная функция $\widetilde{c}_F(y)$ является пределом ограниченного сверху (на компактных подмножествах области T_G) семейства плюрисубгармонических функций. Следовательно она сама является плюрисубгармонической в T_G. Отсюда, поскольку $\widetilde{c}_F(y)$ не зависит от x, следует, что $\widetilde{c}_F(y)$ – выпуклая функция.

Рассмотрим теперь обобщенную функцию $\Phi(z)=\theta_{2n}\Delta\ln|F(z)|$, где $\Delta=\Delta_{x,y}$ – оператор Лапласа по переменным x и y, а θ_{2n} – некоторая нормирующая постоянная. Из определения п.п.о.ф. в T_G и почти периодичности в T_G обобщенной функции $\ln|F(z)|$ следует, что $\Phi(z)$ – п.п.о.ф. в T_G порядка $p\leqslant 2$. Но поскольку $\Delta\ln|F(z)|$ – положительная обобщенная функция, то $\Phi(z)$ – п.п.о.ф. в T_G порядка $p=0$, т.е. $\Phi(z)$ – п.п. мера. Следовательно, если c_Φ – мера в G, отвечающая функции Φ согласно теоремам 1.9 и 1.10, и если область $G'\Subset G$ такова, что $c_\Phi(\partial G')=0$, то (см. следствие 1.1)

$$\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{(2\xi)^n}\int\limits_{\Pi_\xi(0,G')}\Phi(z)\,dxdy=c_\Phi(G'). \tag{3.12}$$

Найдем связь между c_Φ и $\widetilde{c}_F$. Согласно теореме 1.11

$$c_\Phi=\lim_{\xi\to\infty}\Phi(\xi x+iy)$$

и

$$m_n \otimes \widetilde{c}_F = \lim_{\xi\to\infty} \ln|F(\xi x+iy)|,$$

где оба предела берутся в пространстве $\mathcal{D}'_0(T_G)$. Но

$$\lim_{\xi\to\infty} \Phi(\xi x+iy) = \theta_{2n} \lim_{\xi\to\infty} \left(\Delta_{t,y} \ln|F(t+iy)|\right)_{t=\xi x} =$$

$$= \theta_{2n} \lim_{\xi\to\infty} \left\{ \frac{1}{\xi^2}\Delta_x \ln|F(\xi x+iy)| + \Delta_y \ln|F(\xi x+iy)| \right\} =$$

$$= \theta_{2n}\Delta_y \widetilde{c}_F(y) = \frac{\theta_{2n}}{\theta_n}\mu_F,$$

где μ_F – мера, ассоциированная по Риссу выпуклой, а значит и субгармонической, функции $\widetilde{c}_F(y)$.

Обобщенная функция $\Phi(z)$, как следует из ее определения, является мерой, ассоциированной по Риссу функции $\ln|F(z)|$. Поэтому, как известно, см., например, [11], эта функция (мера) связана с объемом $V_F(\Omega)$ дивизора*) Z_F функции $F(z)$ в области $\Omega \Subset T_G$ соотношением

$$V_F(\Omega) := \int\limits_{|Z_F|^*\cap\Omega} \gamma_F(z)\,dV = \int\limits_{\Omega} \Phi(z)dz. \qquad (3.13)$$

Здесь dV – элемент объема на многообразии $|Z_F|^*$.

В связи с (3.13) фигурирующий в (3.12) предел есть не что иное, как умноженная на θ_{2n}/θ_n плотность дивизора функции F в области T_G.

Подытоживая сказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть $F(z)$ – голоморфная п.п.ф. в T_G. Тогда*

а) *существует предел*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} \int\limits_{\Pi_\xi(0)} \ln|F(x+iy)|dx := \widetilde{c}_F(y)$$

---

*) Напомним, что дивизором Z в области $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ называют пару $(|Z|,\gamma_Z)$, где $|Z|$ – аналитическое множество (носитель дивизора) в Ω чистой размерности $n-1$, а γ_Z – целочисленная функция (кратность дивизора) на $|Z|$, постоянная на каждой связной компоненте множества $|Z|^*$ регулярных точек множества $|Z|$. Дивизором голоморфной функции $f(z)$ называется дивизор Z_f, носитель которого $|Z_f| = \{z : f(z) = 0\}$, а кратность $\gamma_f(z)$ совпадает с кратностью корня функции $f(z)$ в точке $z \in |Z_f|$.

б) функция $\widetilde{c}_F(y)$ – выпуклая,

в) если область $G' \Subset G$ такова, что $\mu_F(\partial G') = 0$, где μ_F – мера, ассоциированная по Риссу функции $\widetilde{c}_F(y)$, то

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} V_F\bigl(\Pi_\xi(0, G')\bigr) = \frac{\theta_{2n}}{\theta_n}\mu_F(G').$$

В случае $n = 1$ это известная теорема Иессена [12] (см. также [9, 8]). В случае произвольного n теорема 3.2 была ранее доказана автором в [1] методом, имеющим некоторые общие черты с использованным здесь, но носящим более специальный характер.

Утверждение в) теоремы 3.2 о плотности дивизора верно и в более общей ситуации дивизоров, которые мы назовем почти периодическими, хотя, вообще говоря, они не являются дивизорами почти периодических функций.

Пусть Z – дивизор в T_G. Такой дивизор, как известно, является дивизором некоторой голоморфной в T_G функции $F(z)$. Этой функции отвечает обобщенная функция $\Phi_F(z) = \theta_{2n}\Delta_{x,y}\ln|F(x,y)|$, которая положительна и значит является мерой. Очевидно, что $\Phi_F(z)$ не зависит от выбора функции $F(z)$, задающей дивизор Z. Поэтому естественно писать Φ_Z вместо Φ_F.

Определение 3.1. *Дивизор $Z \subset T_G$ называется почти периодическим, если отвечающая ему функция Φ_Z является п.п.о.ф. в T_G.*

Фигурирующая в этом определении функция (мера) Φ_Z есть след потока интегрирования по дивизору Z. Ввиду этого почти периодичность дивизоров можно определить с помощью потоков, предварительно введя понятие почти периодического потока. Мы не касаемся здесь этого понятия, предполагая посвятить ему отдельную заметку.

Из следствия 1.1 и отмеченной выше трактовки Φ_Z как $(2n-2)$-мерного объема дивизора Z непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть Z – почти периодический дивизор в T_G. Тогда в G существует такая положительная мера μ_Z, что для каждой области $G' \Subset G$, удовлетворяющей условию $\mu_Z\,(\partial G') = 0$, выполняется равенство*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{1}{(2\xi)^n} V_Z\bigl(\Pi_\xi(0, G')\bigr) = \mu_Z(G'),$$

где

$$V_Z(\Omega) = \int\limits_{|Z|^* \cap \Omega} \gamma_Z(z)\, dV.$$

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить С. Ю. Фаворова, прочитавшего рукопись этой статьи и сделавшего ряд ценных замечаний.

Литература

1. Л. И. Ронкин, *Теоремы Иессена для голоморфных почти периодических функций в трубчатых областях.* — Сиб. мат. ж. **28, No. 8** (1987), 199–204.
2. Л. И. Ронкин, *Теорема Иессена для голоморфных почти периодических отображений.* — Укр. мат. ж. **42, No. 8** (1990), 1094–1107.
3. L. I. Ronkin, *Functions of completely growth.* Kluwer Academic Publischers, Dordrecht (Boston) London (1992), 392 p.
4. А. Ю. Рашковский, *Потоки, ассоциированные с голоморфными почти периодическими отображениями.* — Мат. физика, анализ, геометрия **2**, вып. **2** (1995).
5. A. Rashkovskii, *Monge-Ampère type currents associated to holomorphic almost periodic mappings.* to appear in "Computes rendus Acad. Sci." Paris.
6. L. Schwartz, *Theorie des distributions I.* Hermann, Paris, (1950) 350 p.
7. Г. Бор, *Почти периодические функции.* ОГИЗ, М.-Л., (1934) 128 с.
8. Б. М. Левитан, *Почти периодические функции.* ГИТТЛ, Москва, (1953) 396 с.
9. Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* ГИТТЛ, Москва, (1956) 632 с.
10. Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных.* Наука, Москва, (1971) 430 с.
11. П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных.* Мир, Москва. (1989) 350 с.
12. B. Jessen, *Über die Nullstellen einer analytischen fastperiodischen function. Eine verallgemeinerung der Jensenchen formel.* — Math. Ann. **108** (1933), 485–516.

Ronkin L. I. Almost periodic distributions in a tube domain.

A notion of an almost periodic (a.p.) distribution in a tube domain T_G in C^n is introduced. Properties of such distributions are investigated, some of them are similar to the properties of ordinary a.p. functions on the axis. In these terms the notion of an a.p. divisor in T_G is introduced, and conditions for the existence of density of such a divisor in $T_{G'}$, $G' \Subset G$, are found.

ФТИНТ НАН
Харьков, Украина

Поступило 2 декабря 1996 г.