А. Н. Петров

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ УСЛОВНЫХ БАЗИСОВ ИЗ СТЕПЕНЕЙ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§0. Введение

Основной целью этой заметки является описание одного способа построения условных степенных базисов в некоторых банаховых пространствах аналитических функций. Впервые конструкция таких базисов была приведена в работе А. Фига–Таламанки [1] и нашла свое дальнейшее развитие в заметке [2]. Различным аспектам задачи об описании базисных семейств в замыкании своей линейной оболочки в конкретном функциональном пространстве посвящена довольно обширная литература. Отметим, например, работы [3–5], некоторые результаты которых используются ниже.

Помимо обобщения достаточно прозрачного способа построения базисных семейств, предложенного в работах [1, 2], в настоящей заметке приведены и конкретные примеры функциональных банаховых пространств, где применима данная конструкция. Разумеется, нижеприводимые примеры пространств отнюдь не исчерпывают всех приложений этого весьма общего способа построения условных базисов в замыкании своей линейной оболочки. Подбор примеров функциональных пространств осуществлялся в первую очередь в соответствии с личными интересами автора. Функциональные пространства, рассматриваемые в заметке, являются алгебрами мультипликаторов некоторых банаховых пространств аналитических функций (необходимые определения даны в §1). Среди основных примеров отметим пространство мультипликаторов степенных рядов с последовательностью коэффициентов Тейлора из l^p и пространство мультипликаторов интегралов типа Коши. Обратим внимание на то,

Работа частично поддержана грантом 95–0–1.6–71 Госкомвуза России.

что сопоставив результаты С. А. Виноградова [6] и А. Б. Александрова [7], легко получается описание пространства коэффициентов некоторых безусловных базисов в пространстве мультипликаторов интегралов типа Коши (точные формулировки приведены в §3).

О структуре данной работы можно сказать следующее. В первом параграфе собраны основные обозначения, определения и предварительные сведения, используемые на протяжении всего изложения. Второй параграф работы заключает в себе общую конструкцию построения базисных семейств из степеней, обобщающую приведенную в работах [1, 2]. В третьем, последнем, параграфе даны приложения в виде конкретных примеров условных базисных семейств из степеней в некоторых пространствах мультипликаторов аналитических функций.

И в заключение, автор выражает свою искреннюю признательность С. А. Виноградову, под руководством которого была написана эта работа.

§1. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

1.1. $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\bar{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел, $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant 1\}$, $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1.2. $\mathbb{A}(\mathbb{D})$ – пространство всех функций, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$, со стандартной топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathbb{D}$.

$\mathcal{P}$ – множество всех тригонометрических полиномов, $\mathcal{P}_A$ – множество всех аналитических полиномов одной комплексной переменной.

$L^p(E, \mu)$ – стандартное L^p-пространство с мерой μ в E и соответствующей нормой $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$; $l^p(E) \stackrel{\text{def}}{=} L^p(E, \mu)$, если $\mu(\{n\}) = 1$ для любого $n \in E$.

m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$ $(m\mathbb{T} = 1)$, $L^p(\mathbb{T}) \stackrel{\text{def}}{=} L^p(\mathbb{T}, m)$.

$\hat{f}(n)$ – коэффициент Тейлора–Маклорена или Фурье (в зависимости от ситуации) с номером n функции f.

H^p – пространство Харди ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$):

$$H^p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0 \leqslant r < 1} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} < +\infty \right\},$$

где $f_r(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(rz)$, $z \in \bar{\mathbb{D}}$, $r \in [0,1)$.

Мы будем также рассматривать класс $H^p(\mathbb{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{F}(n) = 0,\ n = -1, -2, \dots\}$, где $\hat{F}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} F \cdot \bar{\zeta}^n\, dm$ – n-ый коэффициент Фурье F, $p \in [1, +\infty]$, отождествляя функцию $f \in H^p$ с функцией $F \in H^p(\mathbb{T})$, определенной равенством $F(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{r \to 1-0} f(r\zeta)$ при m – почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$.

C_A – диск-алгебра ($C_A \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos}_{H^\infty} \mathcal{P}_A$).

1.3. Если X – банахово пространство функций, аналитических в $\mathbb{D}$, $X \neq \{0\}$, $X \hookrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{D})$ (т.е. $X \subset \mathbb{A}(\mathbb{D})$ и это вложение непрерывно), то $\operatorname{mult} X$ (или mX) будет обозначать банахову алгебру всех мультипликаторов пространства X:

$$\operatorname{mult} X \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}) : f \cdot g \in X \quad (\forall g \in X)\}, \tag{1.1}$$

$$\|f\|_{mX} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\|f \cdot g\|_X : \|g\|_X \leqslant 1\} \quad f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}), \tag{1.2}$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма в пространстве X.

Из теоремы о замкнутом графике вытекает, что

$$(f \in \operatorname{mult} X) \Longleftrightarrow (f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}) \quad \text{и} \quad \|f\|_{mX} < +\infty).$$

Кроме того, легко показать, что $\operatorname{mult} X \subset H^\infty$ и $\|\cdot\|_{H^\infty} \leqslant \|\cdot\|_{mX}$.

1.4. Символ $S_n(f)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, в зависимости от ситуации будет обозначать либо n-ую симметричную частичную сумму ряда Фурье функции f (т.е. $S_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\zeta^k$, здесь $f \in L^1(\mathbb{T})$), либо n-ый многочлен Тейлора–Маклорена функции f (т.е. $S_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \hat{f}(k) z^k$, где $f \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$).

$*$ – знак свертки функций на единичной окружности $\mathbb{T}$ (т.е. $(f * g)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi\bar{\zeta}) g(\zeta) dm(\zeta)$, $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, $\zeta, \xi \in \mathbb{T}$).

1.5. Если A – числовое множество ($A \subset \mathbb{R}$), b – число ($b \in \mathbb{R}$), то сдвигом множества A на число b называется множество, обозначаемое $A+b$ и определяемое следующим образом

$$A + b \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \{a+b : a \in A\}, & \text{если} \quad A \neq \varnothing \\ \varnothing, & \text{если} \quad A = \varnothing. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Запись $A \prec B$ будет означать, что множество A расположено строго левее множества B, т.е. $\forall a \in A$, $\forall b \in B \Longrightarrow a < b$.

Пусть $s \in \mathbb{N}$; p, q – мультииндексы размерности s с натуральными координатами, т.е. $p, q \in \mathbb{N}^s$; $p = (p_1, \dots, p_s)$, $q = (q_1, \dots, q_s)$. Как обычно считаем, что $p = q \Longleftrightarrow p_i = q_i$, $i = 1, \dots, s$. Если $p \neq q$, то существует единственное число l, удовлетворяющее условию $l \overset{\text{def}}{=} \min\{i \in \mathbb{N} : 1 \leqslant i \leqslant s, p_i \neq q_i\}$. Полагаем $p < q \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} p_l < q_l$. Определенное таким образом отношение $<$ в $\mathbb{N}^s$ превращает множество всех мультииндексов в линейно упорядоченное множество (цепь) и называется отношением лексикографического порядка в $\mathbb{N}^s$.

Обозначения: $1^s \overset{\text{def}}{=} (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^s$; для $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{N}^s$ положим $2m - 1 \overset{\text{def}}{=} (2m_1 - 1, \dots, 2m_s - 1) \in \mathbb{N}^s$.

1.6. Пусть $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Функцию f будем называть Λ – спектральной, если $\hat{f}(n) = 0$ для всякого $n \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$.

Если $\mathcal{E}$ – банахово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{T}$, непрерывно вложенное в $L^1(\mathbb{T})$, и Λ – множество, $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, то будем обозначать

$$\mathcal{E}_\Lambda \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{E} : f - \Lambda\text{-спектральная функция}\}. \tag{1.4}$$

Отметим, что $\mathcal{E}_\Lambda$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{E}$ и, тем самым, $(\mathcal{E}_\Lambda, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$ – банахово пространство. Если $\Lambda = \mathbb{Z}_+$, то часто вместо $\mathcal{E}_\Lambda$ пишут $\mathcal{E}_A$ (по понятным причинам), однако, есть и общепринятые исключения, например, $L^p_A(\mathbb{T})$ используется реже, чем $H^p(\mathbb{T})$.

Пусть $\mathcal{E}, \Lambda$ – те же, что и выше, $f \in \mathcal{E}$. Определим формально P_Λ – проектор (на коэффициентах Фурье) на множество Λ, то есть $P_\Lambda(f) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{n \in \Lambda} \hat{f}(n)\zeta^n$. Слово "формально" подчеркивает, что в случае бесконечного множества Λ ряд $\sum\limits_{n \in \Lambda} \hat{f}(n)\zeta^n$ не является, вообще говоря, рядом Фурье никакой функции g даже из

$L^1(\mathbb{T})$. Однако, может представиться и более благоприятная ситуация. А именно, для любой функции f, $f \in \mathcal{E}$, ряд $\sum\limits_{n\in\Lambda} \hat{f}(n)\zeta^n$ является рядом Фурье некоторой функции g, $g \in \mathcal{E}$, которую в этом случае и обозначим (уже не формально) символом $P_\Lambda(f)$. Заметим, что тогда $P_\Lambda(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_\Lambda$, а P_Λ – линейный непрерывный оператор (проектор) в $\mathcal{E}$ (по теореме о замкнутом графике). При этом говорят, что проектор P_Λ непрерывно действует в $\mathcal{E}$. Если $\Lambda = \mathbb{Z}_+$, то проектор P_Λ часто обозначают P_+ и называют проектором М. Рисса. (Иногда вместо $P_+(f)$ мы будем писать дальше коротко $(f)_+$.) Хорошо известная теорема М. Рисса утверждает, что проектор P_+ непрерывно действует в пространстве $L^p(\mathbb{T})$ при $p \in (1, +\infty)$, а при $p = 1, +\infty$ проектор P_+ не действует.

Введем обозначение: если $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Lambda = \{0, 1, \dots, n\}$, то проектор P_Λ будем обозначать $P_+^{(n)}$.

1.7. Обозначим через Φ_n ядро Фейера, то есть функцию $\Phi_n(\zeta) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\zeta^k$, где $n \in \mathbb{Z}_+$, $\zeta \in \mathbb{T}$. Хорошо известно, что $\|\Phi_n\|_{L^1} = 1$. В дальнейшем рассматривается также ядро Валле–Пуссена $B_{n,k}$, определяемое формулой

$$B_{n,k} = \left(1 + \frac{n}{k+1}\right)\Phi_{n+k} - \frac{n}{k+1}\Phi_{n-1}, \qquad \text{где} \quad n, k \in \mathbb{Z}_+, \Phi_{-1} = 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что $B_{n,0} = (1+n)\Phi_n - n\Phi_{n-1} = D_n$ – ядро Дирихле, $D_n(\zeta) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \zeta^k, \zeta \in \mathbb{T}$; $B_{0,n} = \Phi_n$ – ядро Фейера; $B_{n,n-1} = 2\Phi_{2n-1} - \Phi_{n-1} = V_n$ – классическое ядро Валле–Пуссена, $n \geqslant 1$, $V_0 = 0$.

Легко убедиться, что для ядра $B_{n,k}$ справедливо следующее явное выражение

$$B_{n,k}(\zeta) = \sum_{\nu=-n}^{n} \zeta^\nu + \sum_{n+1\leqslant|\nu|\leqslant n+k+1} \left(1 - \frac{|\nu| - n}{k+1}\right)\zeta^\nu. \tag{1.6}$$

Отметим, наконец, оценку для L^1-нормы ядра $B_{n,k}$:

$$\|B_{n,k}\|_{L^1} \leqslant 1 + 2\frac{n}{k+1}. \tag{1.7}$$

Хотя оценка (1.7) и груба (как известно, эта норма имеет лишь логарифмический порядок роста), но для наших приложений она будет достаточна.

1.8. Все необходимые сведения о базисах в банаховых пространствах, которые используются ниже, можно почерпнуть из работы [5].

Если X – нормированное пространство, $A \subset X$, то $\vee(A;X)$ будет обозначать замыкание линейной оболочки множества A в пространстве X.

1.9. Пусть Y – множество, $y \in Y$. Запись $f(x,y) \lesssim g(x,y)$ $(x \in X)$ будет обозначать, что существует такая постоянная $C(y) \in (0,+\infty)$, что $\forall x \in X \Longrightarrow f(x,y) \leqslant C(y)g(x,y)$. Запись $f(x,y) \asymp g(x,y)$ $(x \in X)$ будет обозначать, что $f(x,y) \lesssim g(x,y)$ и $g(x,y) \lesssim f(x,y)$ $(x \in X)$. Часто эти же символы будут использоваться и для абсолютных констант $C(y)$.

§2. Одна общая конструкция построения базисных семейств из степеней

2.1. Пусть $(n_m)_{m\geqslant 1}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, т.е. $n_m \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m < n_{m+1} < \ldots$. Положим также (удобства ради) $n_0 = 0$.

Для всякого $s \in \mathbb{N}$ определим семейство множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^s}$. Определение дадим индукцией по s-размерности мультииндексов семейства.

Пусть $s = 1$; для $m \in \mathbb{N}$ положим $\Delta_m \stackrel{\text{def}}{=} (n_{m-1}, n_m]$. Тем самым первое семейство множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^1}$ определено.

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ и $(s-1)$-ое семейство множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^{s-1}}$ уже определено. Тогда для $m = (m_1,\ldots,m_{s-1},m_s) \stackrel{\text{def}}{=} (m^{(s-1)};m_s) \in \mathbb{N}^s$ положим

$$\Delta_m \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{m^{(s-1)}} \cap \left(\Delta_{m_s} + \sum_{j=1}^{s-1} n_{m_j-1}\right). \tag{2.1}$$

Таким образом, индуктивное определение семейств множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^s}$ закончено. Это определение имеет простой наглядный смысл: множество Δ_m получается из множества $\Delta_{m^{(s-1)}}$ вырезанием интервала Δ_{m_s}, сдвинутого к началу множества $\Delta_{m^{(s-1)}}$.

Используемые далее свойства семейств множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^s}$ собраны в следующей лемме.

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $m=(m_1,\dots,m_s)\in\mathbb{N}^s$, *то*

$$\Delta_m \subset \begin{cases} (n_{m_s-1}, n_{m_s}], & \text{при} \quad s=1 \\ (n_{m_s-1}, n_{m_s}] + \sum\limits_{j=1}^{s-1} n_{m_j-1}, & \text{при} \quad s\in\mathbb{N},\ s>1; \end{cases}$$

(2) *если* $m=(m_1,\dots,m_s)\in\mathbb{N}^s$, *то* $\Delta_m\subset(\sigma(m),+\infty)$, *где* $\sigma(m)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sum\limits_{j=1}^{s} n_{m_j-1}$, $s\in\mathbb{N}$;

(3) $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}^s}\Delta_m=\mathbb{R}_+\stackrel{\mathrm{def}}{=}(0,+\infty)$, *где* $s\in\mathbb{N}$;

(4) *если* $p,q\in\mathbb{N}^s$, $p\neq q$, *то* $\Delta_p\cap\Delta_q=\varnothing$, *где* $s\in\mathbb{N}$;

(5) *если* $m=(m^{(s-1)};m_s)\in\mathbb{N}^s$, $m_s>m_{s-1}$, *то* $\Delta_m=\varnothing$, *где* $s\in\mathbb{N}$, $s>1$;

(6) *если* $m=(m^{(s-1)};m_s)\in\mathbb{N}^s$, *то* $\Delta_{m^{(s-1)}}=\bigcup_{r\in\mathbb{N}}\Delta_{(m^{(s-1)};r)}=\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant m_{s-1}}\Delta_{(m^{(s-1)};r)}$, *где* $s\in\mathbb{N}$, $s>1$;

(7) *если* $m\in\mathbb{N}^s$, $\Delta_m\neq\varnothing$, *то* $\Delta_m=(\sigma(m),b_m]$, *где* $b_m\in\mathbb{N}$, $\sigma(m)<b_m$, $s\in\mathbb{N}$;

(8) *если* $p,q\in\mathbb{N}^s$, $\Delta_p\neq\varnothing$, $\Delta_q\neq\varnothing$, *то* $p<q\iff\Delta_p\prec\Delta_q$, *где* $s\in\mathbb{N}$.

Последовательное доказательство утверждений леммы не содержит неожиданностей, рассуждения носят индуктивный характер, используют равенство (2.1) и ввиду простоты опускаются. •

2.3. Используя семейства множеств $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{N}^s}$, определим последовательность множеств $(\Delta^{(s)})_{s\geqslant1}$. Для всякого $s\in\mathbb{N}$ положим

$$\Delta^{(s)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\bigcup_{m\in\mathbb{N}^s}\Delta_{2m-1}. \tag{2.2}$$

Можно сказать, что построение множеств $\Delta^{(s)}$ схоже с процессом последовательного построения обычного канторовского множества на прямой. Используя утверждения Леммы 2.2 и определяющее равенство (2.2) без труда получаются следующие свойства последовательности множеств $(\Delta^{(s)})_{s\geqslant1}$.

Лемма 2.4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, тогда:*

(1) $\Delta^{(s)} \subset \mathbb{R}_+$,

(2) $\Delta^{(s+1)} \subset \Delta^{(s)}$. •

В дальнейшем нам потребуются дискретные варианты вышеопределенных множеств. С этой целью введем следующие обозначения. Пусть $s \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^s$, положим

$$\Lambda_m \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_m \cap \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

$$\Lambda^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{(s)} \cap \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Отметим, что естественные аналоги Лемм 2.2, 2.4 справедливы для Λ-множеств. Далее приведем некоторые теоремы о проекторах (обозначения и терминологию см. в §1, 1.6). В дальнейшем будем предполагать, что определяющая последовательность $(n_m)_{m\geqslant 1}$ из 2.1 лакунарна по Адамару, т.е. $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{m\geqslant 1} \frac{n_m}{n_{m+1}} \in (0,1)$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{T}$, удовлетворяющее условиям:*

(1) $\mathcal{P}_A \subset \mathcal{E} \hookrightarrow H^1(\mathbb{T})$,

(2) *для любых $p \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{E}$ справедливо неравенство*

$$\|f * p\|_{\mathcal{E}} \leqslant \alpha_{\mathcal{E}} \|f\|_{\mathcal{E}} \|p\|_{L^1}, \tag{2.5}$$

где $\alpha_{\mathcal{E}}$ – положительная постоянная, зависящая только от $\mathcal{E}$.

Тогда семейства проекторов $\left(P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$, $(P_{\Lambda_{2m-1}})_{m\in\mathbb{N}}$ *равномерно ограничены в пространстве $\mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}}$, причем имеют место оценки для норм:*

$$\text{(А)} \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \left\| P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1}} \right\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}}} \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha_{\mathcal{E}},$$

$$\text{(Б)} \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \|P_{\Lambda_{2m-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}}} \leqslant 2\frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha_{\mathcal{E}}.$$

Доказательство. Возьмем произвольно функцию f, $f \in \mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}}$, и натуральное число m. Тогда будем иметь.

(А). $$P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N},j\leqslant m}\Lambda_{2j-1}}(f)=\sum_{j=0}^{n_{2m-1}}\hat{f}(j)\zeta^j$$
$$=\sum_{j=0}^{n_{2m-1}}\hat{f}(j)\hat{B}_{n_{2m-1},n_{2m}-n_{2m-1}}(j)\zeta^j=f*B_{n_{2m-1},n_{2m}-n_{2m-1}},$$

здесь учтено, что $f\in\mathcal{E}_{\Lambda^{(1)}}$, а также формула (1.6) для выражения $B_{n,k}$. Поэтому

$$\left\|P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N},j\leqslant m}\Lambda_{2j-1}}(f)\right\|_{\mathcal{E}}=\|f*B_{n_{2m-1},n_{2m}-n_{2m-1}}\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant\alpha_{\mathcal{E}}\|B_{n_{2m-1},n_{2m}-n_{2m-1}}\|_{L^1}\cdot\|f\|_{\mathcal{E}}\leqslant\alpha_{\mathcal{E}}\left(1+2\frac{n_{2m-1}}{n_{2m}-n_{2m-1}+1}\right)\|f\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant\alpha_{\mathcal{E}}\left(1+2\frac{1}{\frac{n_{2m}}{n_{2m-1}}-1}\right)\|f\|_{\mathcal{E}}\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

В этой выкладке использовали условие (2) теоремы и оценку (1.7).

(Б). Если $m=1$, то $\|P_{\Lambda_1}(f)\|_{\mathcal{E}}=\left\|P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N},j\leqslant 1}\Lambda_{2j-1}}(f)\right\|_{\mathcal{E}}\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\|f\|_{\mathcal{E}}$; если $m>1$, то

$$\|P_{\Lambda_{2m-1}}(f)\|_{\mathcal{E}}=\left\|P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N},j\leqslant m}\Lambda_{2j-1}}(f)-P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N},j\leqslant m-1}\Lambda_{2j-1}}(f)\right\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\|f\|_{\mathcal{E}}.\quad\bullet$$

Доказанная Теорема 2.5 является важным частным случаем более общей Теоремы 2.9; однако, доказательство Теоремы 2.5 прозрачнее и не загромождено техническими деталями. Доказательство Теоремы 2.9 нуждается в приготовлениях технического характера. К ним относятся Леммы 2.6–2.8.

Лемма 2.6. *Пусть $s\in\mathbb{N}$, $s>1$, $k\in\mathbb{N}^{s-1}$. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s,j^{(s-1)}\leqslant k}\Lambda_{2j-1}=\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}^{s-1},j\leqslant k}\Lambda_{2j-1}\right)\cap\Lambda^{(s)}.\qquad(2.6)$$

Лемма 2.7. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$, $p = (p^{(s-1)}; p_s) \in \mathbb{N}^s$. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}^s, j \leqslant p, j^{(s-1)} = p^{(s-1)}} \Lambda_{2j-1} = \bigcup_{1 \leqslant r \leqslant p_s} \Lambda_{(2p^{(s-1)}-1; 2r-1)} =$$
$$= \Lambda_{2p^{(s-1)}-1} \cap \left(\bigcup_{1 \leqslant r \leqslant p_s} \Lambda_{2r-1} + \sigma(2p^{(s-1)} - 1) \right). \quad (2.7)$$

Лемма 2.8. *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^s$, $k \in \mathbb{N}$, причем $\Lambda_{(p;k)} = \varnothing$. Тогда для всякого натурального числа i, $i \geqslant k$, имеем $\Lambda_{(p;i)} = \varnothing$.*

Доказательства Лемм 2.6–2.8 мгновенно вытекают из утверждений Леммы 2.2 и определяющей формулы (2.1), поэтому опускаются. •

Теорема 2.9. *Пусть s – натуральное число, $\mathcal{E}$ – банахово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{T}$, удовлетворяющее условиям* (1), (2) *Теоремы* 2.5.

Тогда семейства проекторов $\left(P_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^s, j \leqslant m} \Lambda_{2j-1}}\right)_{m \in \mathbb{N}^s}$, $(P_{\Lambda_{2m-1}})_{m \in \mathbb{N}^s}$ *равномерно ограничены в пространстве $\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}$, причем имеют место оценки для норм:*

$$\text{(A)} \sup_{m \in \mathbb{N}^s} \|P_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^s, j \leqslant m} \Lambda_{2j-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}} \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha \varepsilon \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha \varepsilon\right)^{s-1},$$

$$\text{(Б)} \sup_{m \in \mathbb{N}^s} \|P_{\Lambda_{2m-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}} \leqslant 2\frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha \varepsilon \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta} \alpha \varepsilon\right)^{s-1}.$$

Доказательство. Проведем его подробно, индукцией по s. База индукции ($s = 1$) в точности совпадает с уже доказанной Теоремой 2.5. Индукционный переход: пусть $s > 1$ и Теорема 2.9 для размерности мультииндексов $s - 1$ справедлива; докажем справедливость теоремы для размерности s. Возьмем произвольно функцию f, $f \in \mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}$, и мультииндекс m, $m \in \mathbb{N}^s$. Тогда будем иметь.

(А). Положим $J_m^{(s)} \overset{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}^s : j \leqslant m\}$, $A_m^{(s)} \overset{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}^s : j^{(s-1)} < m^{(s-1)}\}$, $B_m^{(s)} \overset{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}^s : j \leqslant m, j^{(s-1)} = m^{(s-1)}\}$. Имеем $J_m^{(s)} = A_m^{(s)} \cup B_m^{(s)}$, $A_m^{(s)} \cap B_m^{(s)} = \varnothing$.

Обратимся к множеству $A_m^{(s)}$. Возможны случаи: (а) $A_m^{(s)} \neq \varnothing$, (б) $A_m^{(s)} = \varnothing$, которые рассмотрим отдельно. Пусть имеет место случай (а). Тогда $A_m^{(s)}$ – непустая конечная цепь (с порядком, индуцированным из $\mathbb{N}^s$), а значит в ней существует единственный наибольший элемент, обозначаемый далее $\bar{m}$. Заметим, что $A_m^{(s)} = \{j \in \mathbb{N}^s : j^{(s-1)} \leqslant \bar{m}^{(s-1)}\}$. Применяя Лемму 2.6 с $k = \bar{m}^{(s-1)}$, получаем

$$\bigcup_{j \in A_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1} = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^{s-1}, j \leqslant \bar{m}^{(s-1)}} \Lambda_{2j-1} \right) \cap \Lambda^{(s)} \overset{\text{def}}{=} \theta \cap \Lambda^{(s)}.$$

Имеем

$$P_\theta(f) = P_{\theta \cap \Lambda^{(s)}}(f) + P_{\theta \setminus \Lambda^{(s)}}(f) = P_{\theta \cap \Lambda^{(s)}}(f),$$

т.к. $f \in \mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}$; $P_{\bigcup\limits_{j \in A_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) = P_{\theta \cap \Lambda^{(s)}}(f) = P_\theta(f)$. Лемма 2.4 дает $\Lambda^{(s)} \subset \Lambda^{(s-1)}$, а значит $\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}} \subset \mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}$. Поэтому,

$$\begin{aligned} \left\| P_{\bigcup\limits_{j \in A_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \right\|_{\mathcal{E}} &= \left\| P_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^{s-1}, j \leqslant \bar{m}^{(s-1)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}^{s-1}} \left\| P_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^{s-1}, j \leqslant k} \Lambda_{2j-1}} \right\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}} \cdot \|f\|_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае (а) доказана оценка:

$$\begin{aligned} &\left\| P_{\bigcup\limits_{j \in A_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \right\|_{\mathcal{E}} \\ &\qquad \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}^{s-1}} \left\| P_{\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^{s-1}, j \leqslant k} \Lambda_{2j-1}} \right\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}} \cdot \|f\|_{\mathcal{E}}. \qquad (2.8) \end{aligned}$$

Отметим, что оценка (2.8) остается справедливой и в случае (б), если принять, что $\bigcup\limits_{j \in \varnothing} \Lambda_{2j-1} = \varnothing$, $P_\varnothing(f) = 0$.

Обратимся к множеству $B_m^{(s)}$. Отметим, что $B_m^{(s)} \neq \varnothing$, ибо $m \in$

$B_m^{(s)}$. Применяя Лемму 2.7 с $p = m$, получаем

$$\bigcup_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1} = \bigcup_{1\leqslant r\leqslant m_s} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2r-1)}$$
$$= \Lambda_{2m^{(s-1)}-1} \cap \left(\bigcup_{1\leqslant r\leqslant m_s} \Lambda_{2r-1} + \sigma(2m^{(s-1)}-1)\right).$$

Возможны случаи: (а) $\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1} \neq \varnothing$, (б) $\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1} = \varnothing$, которые рассмотрим отдельно. Пусть имеет место случай (а). Тогда $\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant m_s} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2r-1)} \neq \varnothing$, а значит существует единственное число $l \stackrel{\text{def}}{=} \max\{r \in \mathbb{N} : 1 \leqslant r \leqslant m_s, \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2r-1)} \neq \varnothing\}$. Из определения l имеем следующие равенства:

$$\bigcup_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1} = \bigcup_{1\leqslant r\leqslant l} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2r-1)}$$
$$= \Lambda_{2m^{(s-1)}-1} \cap \left(\bigcup_{1\leqslant r\leqslant l} \Lambda_{2r-1} + \sigma(2m^{(s-1)}-1)\right). \quad (2.9)$$

Возможны два варианта: (а1) $\Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2l)} = \varnothing$,
(а2) $\Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2l)} \neq \varnothing$, которые рассмотрим отдельно. Пусть имеет место вариант (а1). Тогда

$$\Lambda_{2m^{(s-1)}-1} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;r)}$$
$$= \bigcup_{r\in\mathbb{N}, r\leqslant 2l-1} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;r)} \cup \bigcup_{r\in\mathbb{N}, r\geqslant 2l} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;r)}$$
$$= \bigcup_{r\in\mathbb{N}, r\leqslant 2l-1} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;r)}.$$

В этой цепочке равенств использовались Леммы 2.2(б) и 2.8. Значит,

$$\Lambda^{(s)} \cap \Lambda_{2m^{(s-1)}-1} = \Lambda^{(s)} \cap \left(\bigcup_{r\in\mathbb{N}, r\leqslant 2l-1} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;r)}\right)$$
$$= \bigcup_{1\leqslant r\leqslant l} \Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2r-1)} = \bigcup_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1},$$

где последнее равенство получается из (2.9). Имеем

$$P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}}(f)=P_{\Lambda^{(s)}\cap\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}}(f)=P_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}}(f),$$

т.к. $f\in\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}$. Поэтому,

$$\Bigg\|P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}}(f)\Bigg\|_{\mathcal{E}}\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}}\|P_{\Lambda_{2k-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}\to\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}}\cdot\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Таким образом, в случае (а) для варианта (а1) доказана оценка:

$$\Bigg\|P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}}(f)\Bigg\|_{\mathcal{E}}\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}}\|P_{\Lambda_{2k-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}\to\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}}\cdot\|f\|_{\mathcal{E}}.\qquad(2.10)$$

Пусть имеет место вариант (а2). Тогда положим, краткости ради, $a\overset{\text{def}}{=}\sigma(2m^{(s-1)}-1)\in\mathbb{Z}_+$, $\Pi\overset{\text{def}}{=}\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant l}\Lambda_{2r-1}+a$, $g\overset{\text{def}}{=}P_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}}(f)$. Равенство (2.9) запишем в виде

$$\bigcup_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}=\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}\cap\Pi.$$

Имеем

$$P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}}(f)=P_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}\cap\Pi}(f)=P_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}\cap\Pi}(g)$$
$$=P_\Pi(g)=\sum_{j=a}^{a+n_{2l-1}}\hat g(j)\zeta^j=\sum_{j=a}^{a+n_{2l-1}}\hat g(j)\cdot\widehat{\zeta^aB}_{n_{2l-1},n_{2l}-n_{2l-1}}(j)\zeta^j$$
$$=g*\zeta^aB_{n_{2l-1},n_{2l}-n_{2l-1}},$$

здесь учтено, что $g\in\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}\cap\mathcal{E}_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}}$ и $\Lambda_{(2m^{(s-1)}-1;2l)}\neq\varnothing$. Значит,

$$\Bigg\|P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}}\Lambda_{2j-1}}(f)\Bigg\|_{\mathcal{E}}=\|g*\zeta^aB_{n_{2l-1},n_{2l}-n_{2l-1}}\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant\alpha_{\mathcal{E}}\|g\|_{\mathcal{E}}\cdot\|\zeta^aB_{n_{2l-1},n_{2l}-n_{2l-1}}\|_{L^1}\leqslant\alpha_{\mathcal{E}}\left(1+2\frac{n_{2l-1}}{n_{2l}-n_{2l-1}+1}\right)\|g\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\|g\|_{\mathcal{E}}=\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\|P_{\Lambda_{2m^{(s-1)}-1}}(f)\|_{\mathcal{E}}$$
$$\leqslant\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\cdot\sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}}\|P_{\Lambda_{2k-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}\to\mathcal{E}_{\Lambda^{(s-1)}}}\cdot\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Таким образом, в случае (а) для варианта (а2) доказана оценка:

$$\Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \Big\|_{\mathcal{E}} \leqslant \frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}} \|P_{\Lambda_{2k-1}}\|_{\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}\to\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}} \cdot \|f\|_{\mathcal{E}}. \quad (2.11)$$

Заметим, что $\alpha_{\mathcal{E}} \geqslant 1$ (положить в условии (2) Теоремы 2.5 $p = f \equiv 1$), значит $\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \geqslant \frac{1+\delta}{1-\delta} > 1$. Поэтому, сопоставляя оценки (2.10), (2.11), заключаем, что оценка (2.11) справедлива в обоих вариантах случая (а). Отметим, что она же остается справедливой и в случае (б). Собирая вместе оценки (2.8), (2.11) и учитывая индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned}
\Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1}}(f) \Big\|_{\mathcal{E}} &\leqslant \Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in A_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \Big\|_{\mathcal{E}} + \Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in B_m^{(s)}} \Lambda_{2j-1}}(f) \Big\|_{\mathcal{E}} \\
&\leqslant \Bigg(\sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}} \Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}^{s-1}, j\leqslant k} \Lambda_{2j-1}} \Big\|_{\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}\to\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}} \\
&\quad + \frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}^{s-1}} \big\| P_{\Lambda_{2k-1}} \big\|_{\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}\to\mathcal{E}_{\Lambda(s-1)}} \Bigg) \cdot \|f\|_{\mathcal{E}} \\
&\leqslant \Bigg(\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \cdot \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\right)^{s-2} \\
&\quad + \frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \cdot 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\right)^{s-2} \Bigg) \cdot \|f\|_{\mathcal{E}} \\
&= \frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\right)^{s-1} \|f\|_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Тем самым, оценка (А) доказана.

(Б). Если $m = 1^s$, то

$$\|P_{\Lambda_{2\cdot 1^s - 1}}(f)\|_{\mathcal{E}} = \|P_{\Lambda_{1^s}}(f)\|_{\mathcal{E}} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}^s} \Big\| P_{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant k} \Lambda_{2j-1}} \Big\|_{\mathcal{E}_{\Lambda(s)}\to\mathcal{E}_{\Lambda(s)}} \cdot \|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Если $m > 1^s$, то

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1} = \Lambda_{2m-1} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j<m} \Lambda_{2j-1}.$$

Имеем $I_m^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}^s : j < m\}$ – непустая ($1^s \in I_m^{(s)}$) конечная цепь, значит в ней существует единственный наибольший элемент, обозначаемый далее $\bar{m}$. Заметим, что $I_m^{(s)} = \{j \in \mathbb{N}^s : j \leqslant \bar{m}\}$, $\bar{m} < m$ и поэтому $\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1} = \Lambda_{2m-1} \cup \bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant \bar{m}} \Lambda_{2j-1}$, $P_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant m} \Lambda_{2j-1}}(f) = P_{\Lambda_{2m-1}}(f) + P_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant \bar{m}} \Lambda_{2j-1}}(f)$,

$$\begin{aligned}\|P_{\Lambda_{2m-1}}(f)\|_{\mathcal{E}} &\leqslant 2 \sup_{k\in\mathbb{N}^s} \Big\| P_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}^s, j\leqslant k} \Lambda_{2j-1}} \Big\|_{\mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}} \to \mathcal{E}_{\Lambda^{(s)}}} \cdot \|f\|_{\mathcal{E}} \\ &\leqslant 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}} \left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\right)^{s-1} \|f\|_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Тем самым, оценка (Б) доказана, индукционный переход завершен, теорема доказана полностью. •

В качестве простого следствия получаем следующую теорему.

Теорема 2.10. *Пусть s – натуральное число, $\mathcal{E}$ – банахово пространство комплекснозначных функций на $\mathbb{T}$, удовлетворяющее условиям* (1), (2) *Теоремы* 2.5, *Λ – множество, удовлетворяющее условиям:*

(3) $\Lambda \subset \Lambda^{(s)}$

(4) $C_\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}^s} \operatorname{Card}(\Lambda \cap \Lambda_{2m-1}) < +\infty$.

Тогда для любых функции f, $f \in \mathcal{E}_\Lambda$, и числа n, $n \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство

$$\|S_n(f)\|_{\mathcal{E}} \leqslant \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\left(1 + 2\frac{1+\delta}{1-\delta}\alpha_{\mathcal{E}}\right)^{s-1} + C_\Lambda\right)\alpha_{\mathcal{E}}\|f\|_{\mathcal{E}}.$$

Доказательство естественным образом вытекает из предыдущей теоремы и ничего поучительного не содержит. •

Наконец, в заключение этого параграфа,

Теорема 2.11. *Пусть s – натуральное число, X – банахово пространство функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющее условиям:*

(1) $\mathcal{P}_A \subset X \hookrightarrow H^1$,

(2) *для любых* $p \in \mathcal{P}$, $f \in X$ *справедливо неравенство*

$$\|f * p\|_X \leqslant \alpha_X \|f\|_X \cdot \|p\|_{L^1},$$

где α_X *– положительная постоянная, зависящая только от* X, Λ *– множество, удовлетворяющее условиям* (3), (4) *Теоремы* 2.10.

Тогда семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda}$ *образует базис, вообще говоря, условный, в замыкании своей линейной оболочки в пространстве* X.

Доказательство. Со всякой функцией f, $f \in X$, мы свяжем функцию F на окружности $\mathbb{T}$, которую определим равенством $F(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{r\to 1-0} f(r\zeta)$ для m-п.в. $\zeta \in \mathbb{T}$ (все корректно, т.к. $X \hookrightarrow H^1$). Совокупность всех таких функций F на окружности становится банаховым пространством $\mathcal{E}$ с нормой $\|F\|_{\mathcal{E}} \overset{\text{def}}{=} \|f\|_X$. Для этого пространства функций $\mathcal{E}$ выполнены условия (1), (2) Теоремы 2.5 (отметим, что условие (2) теоремы следует понимать именно в смысле условия (2) Теоремы 2.5). Таким образом, по Теореме 2.10 семейство проекторов $(P_+^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ равномерно ограничено в пространстве $\vee((z^n)_{n\in\Lambda}; X)$, где $\vee((z^n)_{n\in\Lambda}; X)$ – замыкание линейной оболочки множества $(z^n)_{n\in\Lambda}$ в пространстве X. Отметим, что имеет место сходимость (по норме пространства X) на плотном множестве $\vee((z^n)_{n\in\Lambda}; X)$, а именно $\lim\limits_{n\to+\infty} P_+^{(n)}(f) = f$ для всякой функции f из линейной оболочки множества $(z^n)_{n\in\Lambda}$. По теореме Банаха–Штейнгауза о сходимости имеем: $\lim\limits_{n\to+\infty} P_+^{(n)}(f) = f$ для всякой функции f, $f \in \vee((z^n)_{n\in\Lambda}; X)$, что является равносильным условием базисности семейства степеней $(z^n)_{n\in\Lambda}$ в пространстве $\vee((z^n)_{n\in\Lambda}; X)$. •

§3. Некоторые приложения и конкретные примеры

3.1. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые конкретные примеры банаховых пространств X аналитических функций в круге $\mathbb{D}$, к которым применима Теорема 2.11. Разумеется, возможности применения этой теоремы не исчерпываются нижеприводимыми примерами. Однако, конкретизация пространства функций, с одной стороны, и явная (причем, довольно простая) конструкция множества Λ, с другой, позволят установить тип (условный или безусловный) базиса, доставляемого Теоремой 2.11, а также извлечь дополнительную информацию о пространстве коэффициентов этого базиса.

Отмечу, что пространства, рассматриваемые ниже, – алгебры мультипликаторов некоторых банаховых пространств аналитических функций. Что касается множества Λ, то оно имеет наиболее простое содержательное строение, которое дается общей конструкцией §2. Множества такого вида рассматривались и ранее в связи с аналогичными задачами (см. [1, 2]).

3.2. Построим множества $(\Lambda^{+s})_{s\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие условиям (3), (4) Теоремы 2.10 при фиксированном натуральном s и имеющие наиболее простую структуру. Именно эти множества будут использоваться при рассмотрении примеров.

Будем предполагать, что лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{n_m}{n_{m+1}} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Для построения множеств (Λ^{+s}) нам потребуется одно вспомогательное утверждение, к которому и приступаем.

Лемма 3.3. *Пусть выполнено условие* (3.1), $s\in\mathbb{N}$, $m=(m_1,\dots,m_s)\in\mathbb{N}^s$, $m_1>\dots>m_s\geqslant 1$. *Тогда:*

(1) $\Delta_m=(\sigma(m),\sigma(m^{(s-1)})+n_{m_s}]$, *где* $\sigma(m^{(0)})=0$,

(2) $\Lambda_{2m-1}\neq\varnothing$, $r_{2m-1}\overset{\text{def}}{=}\min\Lambda_{2m-1}=\sigma(2m-1)+1=n_{2m_1-2}+\dots+n_{2m_s-2}+1$.

Доказательство. (1) проверяется индукцией по s, (2) вытекает из (1). $\bullet$

3.4. Теперь все готово, чтобы дать определение множеств $(\Lambda^{+s})_{s\in\mathbb{N}}$. Для натурального числа s положим

$$\Lambda^{+s} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{m=(m_1,\dots m_s)\in\mathbb{N}^s\\ m_1>m_2>\dots>m_s\geqslant 1}} r_{2m-1}.$$

Обратим внимание на свойства множеств $(\Lambda^{+s})_{s\in\mathbb{N}}$, которые собраны в следующей лемме.

Лемма 3.5. *Пусть выполнено условие* (3.1), $s \in \mathbb{N}$, *тогда*

(1) $\Lambda^{+s} \subset \Lambda^{(s)}$, $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}^s} \operatorname{Card}(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1}) = 1$.

Если $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant s$, *то*

(2) $\operatorname{Card}(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1}) = C_{m-1}^{s-1}$, $\max(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1}) = r_{(2m-1, 2(m-1)-1, \ldots, 2(m-(s-1))-1)}$.

Если l, $m \in \mathbb{N}$, $s \leqslant l \leqslant m$, *то*

(3) $\operatorname{Card}\left(\Lambda^{+s} \cap \left(\bigcup\limits_{l \leqslant j \leqslant m} \Lambda_{2j-1}\right)\right) = C_m^s - C_{l-1}^s$, *где* $C_{s-1}^s = 0$, $C_m^s = \frac{m!}{s!(m-s)!}$; $\max\left(\Lambda^{+s} \cap \left(\bigcup\limits_{l \leqslant j \leqslant m} \Lambda_{2j-1}\right)\right) = \max(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1})$.

Доказательство легко провести, используя определение Λ^{+s} и утверждение Леммы 2.2. $\bullet$

3.6. В примерах, рассматриваемых ниже, будет предполагаться, что лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию (3.1), растет не быстрее чем геометрическая прогрессия, т.е. выполнено следующее условие

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{n_m}{n_{m+1}} > 0. \tag{3.2}$$

Используя условия (3.1), (3.2), легко получить следующую простую лемму.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия* (3.1), (3.2), $s, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant s$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\max(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1}) \leqslant C(n_1, \gamma) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2m-2}, \tag{3.3}$$

где в качестве $C(n_1, \gamma)$ *можно взять, например,* $C(n_1, \gamma) = \max\left\{1, \frac{7}{3} n_1 \gamma\right\}$.

Доказательство. Если $m = 1$, то $s = 1$ и $\max(\Lambda^{+1} \cap \Lambda_1) = 1$, и неравенство (3.3) выполнено. Если $m > 1$, то по Лемме 3.5 имеем

$$\begin{aligned}
&\max(\Lambda^{+s} \cap \Lambda_{2m-1}) \\
&= r_{(2m-1,2(m-1)-1,\dots,2(m-(s-1))-1)} = n_{2(m-1)} + n_{2(m-2)} + \dots + n_{2(m-s)} + 1 \\
&= 1 + n_{2(m-1)} \left(1 + \frac{n_{2(m-2)}}{n_{2(m-1)}} + \dots + \frac{n_{2(m-s)}}{n_{2(m-1)}}\right) \\
&\leqslant 1 + n_{2(m-1)}(1 + \delta^2 + \dots + \delta^{2(s-1)}) \\
&< 1 + \frac{1}{1-\delta^2} n_{2(m-1)} \leqslant 1 + \frac{4}{3} n_{2(m-1)} < \frac{7}{3} n_{2(m-1)} \\
&\leqslant \frac{7}{3} n_1 \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2m-3} = \frac{7}{3} n_1 \gamma \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2m-2}. \quad \bullet
\end{aligned}$$

3.8. Оставшаяся часть параграфа посвящена примерам. Здесь будет исследована базисность семейства степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$, $s \in \mathbb{N}$ в пространстве $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; \operatorname{mult} X)$, где $\operatorname{mult} X$ – алгебра мультипликаторов некоторого банахова пространства аналитических функций X.

Пример 1. Пространство Харди H^∞.

Отметим, что семейство проекторов $(P_+^{(n)})_{n\geqslant 0}$ не ограничено в пространстве H^∞ (теорема М. Рисса). Однако, условия (1), (2) Теоремы 2.5 для пространства Харди H^∞ очевидно выполнены ($\alpha_{H^\infty} = 1$). По Лемме 3.5 (1) имеем: для любого натурального числа s множество Λ^{+s} удовлетворяет условиям (3), (4) Теоремы 2.10. Значит, по Теореме 2.11, при любом натуральном s семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует базис (вообще говоря, условный) в замыкании своей линейной оболочки в пространстве H^∞. Следующая теорема уточняет этот результат и дает информацию о пространстве коэффициентов этого базиса.

Теорема 3.9. (1) *Если $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ – лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел, то семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}$ образует безусловный симметричный базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}; H^\infty)$, пространство коэффициентов которого совпадает с $l^1(\Lambda^{+1})$.*

(2) *Если $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ и лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2), то семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует условный, но не*

безусловный, базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; H^\infty)$, *пространство коэффициентов которого не содержится в* $l^r(\Lambda^{+s})$ *при* $r \in \left[1, \frac{2s}{s+1}\right)$.

Доказательство. (1). Имеем $\Lambda^{+1} = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \min \Lambda_{2m-1} = (n_{2m-2} + 1)_{m\in\mathbb{N}}$. Значит, множество Λ^{+1} – лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел (так как,

$$\frac{n_{2m-2}+1}{n_{2m}+1} \leqslant \frac{\delta^2 n_{2m}+1}{n_{2m}+1} = \delta^2 + \frac{1-\delta^2}{n_{2m}+1} \leqslant \delta^2 + \frac{1-\delta^2}{3} = \frac{2\delta^2+1}{3} < 1,$$

где $m \in \mathbb{N}$). Тем самым, множество Λ^{+1} является множеством Сидона (подробности см., например, в [8]); поэтому, для всякого Λ^{+1} – спектрального полинома p справедливы неравенства: очевидное $\|p\|_{H^\infty} \leqslant \|\hat{p}\|_{l^1(\Lambda^{+1})}$ и $\|\hat{p}\|_{l^1(\Lambda^{+1})} \leqslant B_{\Lambda^{+1}}\|p\|_{H^\infty}$, где $B_{\Lambda^{+1}}$ – положительная константа, зависящая только от Λ^{+1} (постоянная Сидона для Λ^{+1}). Таким образом, имеем $\|p\|_{H^\infty} \asymp \|\hat{p}\|_{l^1(\Lambda^{+1})}$. А тогда (см., например, [3] или [5, с. 26]), семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}$ образует безусловный симметричный базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}; H^\infty)$, пространство коэффициентов которого совпадает с $l^1(\Lambda^{+1})$.

(2). По Теореме 2.11 семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует условный базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; H^\infty)$. Покажем, что этот базис не является безусловным. От противного. Если предположить, что $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ – безусловный базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; H^\infty)$, то (см., например, [3] или [5, с. 29]), для всякого Λ^{+s} – спектрального полинома p имели бы

$$\|p\|_{H^\infty} \asymp \|\hat{p}\|_{l^1(\Lambda^{+s})}. \tag{3.4}$$

С целью опровержения (3.4) воспользуемся хорошо известным результатом Литтлвуда, Салема, Зигмунда, Кахана о равномерной оценке случайных тригонометрических полиномов (см., например, [9]). Из него вытекает утверждение: для всякого натурального числа m, $m \geqslant s$, существует набор комплексных чисел (знаков) $(\varepsilon_j^{(m)})_{j\in\Lambda^{+s}\cap\left(\bigcup\limits_{s\leqslant k\leqslant m}\Lambda_{2k-1}\right)}$, $|\varepsilon_j^{(m)}| = 1$ такой, что для полинома

$$p_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\in\Lambda^{+s}\cap\left(\bigcup\limits_{s\leqslant k\leqslant m}\Lambda_{2k-1}\right)} \varepsilon_j^{(m)} z^j$$

справедлива следующая оценка сверху H^∞-нормы

$$\begin{aligned} \|p_m\|_{H^\infty} \leqslant A \cdot &\sqrt{\log\max\left(\Lambda^{+s} \cap \left(\bigcup_{s\leqslant k\leqslant m} \Lambda_{2k-1}\right)\right)} \\ &\times \sqrt{\operatorname{Card}\left(\Lambda^{+s} \cap \left(\bigcup_{s\leqslant k\leqslant m} \Lambda_{2k-1}\right)\right)}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где A – абсолютная положительная постоянная.
Учитывая Леммы 3.5, 3.7, имеем

$$\|p_m\|_{H^\infty} \leqslant A\sqrt{\log C(n_1,\gamma) + (2m-2)\cdot\log\frac{1}{\gamma}} \cdot \sqrt{C_m^s},$$
$$\|\hat{p}_m\|_{l^1(\Lambda^{+s})} = C_m^s;$$

значит,

$$\begin{aligned} \frac{\|p_m\|_{H^\infty}}{\|\hat{p}_m\|_{l^1(\Lambda^{+s})}} &\leqslant A\sqrt{\frac{\log C(n_1,\gamma) + (2m-2)\cdot\log\frac{1}{\gamma}}{C_m^s}} \\ &\leqslant A\sqrt{\frac{\log C(n_1,\gamma) + (2m-2)\log\frac{1}{\gamma}}{(m-s+1)^s}\cdot s!} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

т.к. $s > 1$, но это противоречит (3.4). Таким образом, семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует условный, но не безусловный, базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; H^\infty)$. Пусть, наконец, $r \in \left[1, \frac{2s}{s+1}\right)$, тогда аналогичные выкладки дают

$$\frac{\|p_m\|_{H^\infty}}{|\hat{p}_m\|_{l^r(\Lambda^{+s})}} \leqslant A \cdot \sqrt{\frac{\log C(n_1,\gamma) + (2m-2)\log\frac{1}{\gamma}}{(m-s+1)^{s\left(\frac{2}{r}-1\right)}}\cdot (s!)^{\frac{2}{r}-1}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т.к. $r \in \left[1, \frac{2s}{s+1}\right)$. Значит, пространство коэффициентов условного базиса $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ не содержится в $l^r(\Lambda^{+s})$ при $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ и $r \in \left[1, \frac{2s}{s+1}\right)$. •

Отметим, что доказанная Теорема 3.9 имеет большое сходство с результатами [1, 2].

Пример 2. Пространство мультипликаторов степенных рядов с последовательностью коэффициентов из l^p – $\operatorname{mult} l^p_A$, $1 < p < 2$.

Напомним, что

$$l^p_A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}) : \|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{n \geqslant 0} |\hat{f}(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}, \ p \in [1, +\infty];$$

пространство $\operatorname{mult} l^p_A$ определяется стандартно (см. §1, 1.3), его свойства даны, например, в [10]. Неограниченность проекторов $(P_+^{(n)})_{n \geqslant 0}$ в пространстве $\operatorname{mult} l^p_A$, $1 < p < +\infty$, доказана в [10, с. 154]. Что касается условия (2) Теоремы 2.5, то рассуждения работы [10] носят общий характер и мы ограничимся лишь формулировкой следующей теоремы (доказательство которой см. в [10, с. 151]).

Теорема 3.10. *Пусть $X \neq \{0\}$ – банахово пространство функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, непрерывно вложенное в $A(\mathbb{D})$ и удовлетворяющее, кроме этого, следующим двум условиям:*

(1) для любых $\zeta \in \mathbb{T}$, $f \in X$ имеем $f_\zeta \in X$, $\|f_\zeta\|_X = \|f\|_X$, где $f_\zeta(\cdot) = f(\bar{\zeta} \cdot)$ (инвариантность относительно вращений окружности пространства X и $\|\cdot\|_X$),

(2) для любой функции $f \in X$ отображение $\zeta \mapsto f_\zeta$ непрерывно действует из $\mathbb{T}$ в X (непрерывность вращений в X).

Тогда для любых функций $f \in \operatorname{mult} X$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ имеем $f * g \in \operatorname{mult} X$, причем справедливо неравенство $\|f * g\|_{mX} \leqslant \|f\|_{mX} \cdot \|g\|_{L^1}$. •

Нам потребуется еще одна простая теорема, доказательство которой очевидным образом вытекает из определений (см. [5, с. 25]).

Теорема 3.11. *Пусть $X \neq \{0\}$ – банахово пространство функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, непрерывно вложенное в $A(\mathbb{D})$ и удовлетворяющее следующему условию:*

если $f \in X$, то $z \cdot f \in X$, причем $\|z \cdot f\|_X \leqslant \|f\|_X$ (т.е. оператор правого сдвига является сжатием в пространстве X).

Пусть также E – непустое подмножество целых неотрицательных чисел.

Тогда, если семейство степеней $(z^n)_{n \in E}$ образует безусловный базис в $\vee((z^n)_{n \in E}; \operatorname{mult} X)$, то пространство коэффициентов этого *базиса совпадает с* $l^1(E)$, *т.е.* $\|p\|_{mX} \asymp \|\hat{p}\|_{l^1(E)}$ *на множестве всех* E-*спектральных полиномов* p. $\bullet$

Таким образом по Теореме 2.11 получаем, что при любом s, $s \in \mathbb{N}$, семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует базис (вообще говоря, условный) в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; \operatorname{mult} l^p_A)$, $1 < p < 2$. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.12. (1) *Если* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ – *лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел, то семейство степеней* $(z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}$ *образует безусловный симметричный базис в* $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}; \operatorname{mult}^p_A)$, *пространство коэффициентов которого совпадает с* $l^1(\Lambda^{+1})$.

(2) *Если* $1 < p < 2$, $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$ *и лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условиям* (3.1), (3.2), *то семейство степеней* $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ *образует условный, но не безусловный, базис в* $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; \operatorname{mult}^p_A)$, *пространство коэффициентов которого не содержится в* $l^r(\Lambda^{+s})$ *при* $r \in \left[1, \frac{ps}{s+p-1}\right)$.

Доказательство практически копируется из Примера 1. Поэтому укажем лишь отличие, которое заключается в оценке нормы $\|p_m\|_{ml^p_A}$. Это можно сделать, например, с помощью интерполяционной теоремы Рисса–Торина (см. [11, с. 144]), примененной к оператору Теплица с символом p_m и пространствам l^1_A, l^2_A. Имеем

$$\|p_m\|_{ml^p_A} \leqslant \|p_m\|^{\frac{2}{p}-1}_{ml^1_A} \cdot \|p_m\|^{2-\frac{2}{p}}_{ml^2_A} = \|\hat{p}_m\|^{\frac{2}{p}-1}_{l^1(\Lambda^{+s})} \cdot \|p_m\|^{2-\frac{2}{p}}_{H^\infty}.$$

Дальнейшее ясно (см. Теорему 3.9). $\bullet$

В заключение отмечу, что случаи $p = 1, +\infty$ малоинтересны, ибо $\operatorname{mult} l^1_A = l^1_A$; $p = 2$ составляет содержание Примера 1, т.к. $\operatorname{mult} l^2_A = H^\infty$, а при $2 < p < +\infty$ для получения результата нужно использовать равенство $\operatorname{mult} l^p_A = \operatorname{mult} l^{p'}_A$ (с равенством норм), $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (см. [10]).

Пример 3. Пространство мультипликаторов интегралов типа Коши $\operatorname{mult} K$.

Напомним некоторые определения и обозначения. $M(\mathbb{T})$ – банахово пространство всех конечных комплексных борелевских мер на окружности $\mathbb{T}$ с обычной нормой ($\|\mu\|_{M(\mathbb{T})}$ – полная вариация меры μ). Преобразованием Коши меры μ, $\mu \in M(\mathbb{T})$, называется функция $\mathcal{K}\mu \in \mathbb{A}(\mathbb{D})$, определяемая равенством $(\mathcal{K}\mu)(z) \stackrel{\text{def}}{=}$

$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}$, $z \in \mathbb{D}$. Банахово пространство $K \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathbb{A}(\mathbb{D}) : \exists \mu \in M(\mathbb{T}), f = \mathcal{K}\mu\}$ с естественной нормой $\|f\|_K \overset{\text{def}}{=} \inf\{\|\mu\|_{M(\mathbb{T})} : \mu \in M(\mathbb{T}), f = \mathcal{K}\mu\}$ называется пространством интегралов типа Коши. Пространство $\operatorname{mult} K$ определяется как обычно. Все свойства пространства $\operatorname{mult} K$, используемые далее, могут быть найдены в работе [6].

Сначала установим неограниченность проекторов $(P_+^{(n)})_{n \geqslant 0}$ в пространстве $\operatorname{mult} K$.

Теорема 3.13. *Последовательность* $(P_+^{(n)})_{n \geqslant 0}$ *не ограничена в пространстве линейных непрерывных операторов из* $\operatorname{mult} K$ *в* $\operatorname{mult} K$, *точнее* $\|P_+^{(n)}\|_{mK \to mK} \asymp \log(n+2)$, $n \geqslant 0$.

Доказательство. Нас интересует величина

$$\|P_+^{(n)}\|_{mK \to mK} \overset{\text{def}}{=} \sup_{f \in mK, f \not\equiv 0} \frac{\|P_+^{(n)} f\|_{mK}}{\|f\|_{mK}}.$$

Нужная оценка для нее сверху немедленно вытекает из [6, с. 14, 15]), т.к.

$$\|P_+^{(n)}\|_{mK \to mK} \leqslant \sup_{f \in mK, f \not\equiv 0} \frac{\|P_+^{(n)} f\|_\infty (3 + \log(n+1))}{\|f\|_{mK}}$$

$$= (3 + \log(n+1)) \cdot \sup_{f \in mK, f \not\equiv 0} \frac{\|P_+^{(n)} f\|_\infty}{\|f\|_{mK}} = 3 + \log(n+1) \lesssim \log(n+2).$$

Дальнейшее посвящено доказательству оценки снизу

$$\|P_+^{(n)}\|_{mK \to mK} \gtrsim \log(n+2).$$

Положим

$$Q_n(z) = z^{n+1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{z^{-k} - z^k}{k}, \quad n \geqslant 0.$$

Тогда $\|Q_n\|_\infty \leqslant C_0$, $C_0 \in (0, +\infty)$ – абсолютная постоянная и, значит, $\|Q_n\|_\infty \lesssim 1$. Поэтому для нормы $\|Q_n\|_{mK}$ справедливы оценки

$$\|Q_n\|_{mK} \leqslant \|Q_n\|_\infty (3 + \log(2n+2)) \lesssim \log(n+2);$$

$$\|Q_n\|_{mK} \gtrsim |\hat{Q}_n(n+2)| \cdot \log(n+2) = \log(n+2)$$

(см., [6, с. 17]).

Таким образом, $\|Q_n\|_{mK} \asymp \log(n+2)$.

Положим

$$Q_n^+(z) \overset{\text{def}}{=} (P_+^{(n)}(Q_n))(z) = z^{n+1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{z^{-k}}{k}.$$

Имеем

$$\|Q_n^+\|_\infty = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \log(n+1),$$

$$\|Q_n^+\|_{mK} \leqslant \|Q_n^+\|_\infty (3 + \log(n+1)) \lesssim \log^2(n+2).$$

Остается доказать оценку $\|Q_n^+\|_{mK} \gtrsim \log^2(n+2)$.

Напомним некоторые обозначения и результаты работы [6]. Пусть $f \in A(\mathbb{D})$. Следуя [6, с. 11, 15], введем обозначения

$$S_k(f) \overset{\text{def}}{=} \sum_{0 \leqslant j \leqslant k} \hat{f}(j), \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\alpha_2(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{h \in \mathbb{A}(\bar{\mathbb{D}}), \|h\|_\infty \leqslant 1} \left\| \sum_{k \geqslant 1} \hat{f}(k) S_{k-1}(h) z^k \right\|_\infty .$$

Тогда (см. [6, с. 13]) для каждой функции f, $f \in \operatorname{mult} K$, справедливо неравенство

$$|\alpha_2(f) - \|f\|_{mK}| \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3.6}$$

Откуда,

$$\|f\|_{mK} \geqslant \alpha_2(f) - \|f\|_\infty. \tag{3.7}$$

Используя (3.7), мы получим оценку снизу для $\|Q_n^+\|_{mK}$. Имеем

$$\|Q_n^+\|_\infty = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \log(n+1);$$

если $n \geqslant 1$, то

$$\alpha_2(Q_n^+) = \sup_{h \in \mathbb{A}(\bar{\mathbb{D}}), \|h\|_\infty \leqslant 1} \left\| \sum_{k \geqslant 1} \widehat{Q_n^+}(k) S_{k-1}(h) z^k \right\|_\infty$$

$$= \sup_{h \in \mathbb{A}(\bar{\mathbb{D}}), \|h\|_\infty \leqslant 1} \left\| \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{n+1-k} S_{k-1}(h) z^k \right\|_\infty .$$

Отметим, что если $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$S_{k-1}\left(\frac{Q_{n-1}}{C_0}\right) = \frac{1}{C_0}\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}\frac{1}{n-j}$$
$$= \frac{1}{C_0}\sum_{j=n-k+1}^{n}\frac{1}{j} > \frac{1}{C_0}\log\frac{n+1}{n+1-k}.$$

Поэтому, полагая $h = \frac{Q_{n-1}}{C_0}$, $z = 1$, имеем оценку для $\alpha_2(Q_n^+)$:

$$\alpha_2(Q_n^+) > \frac{1}{C_0}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{n+1-k}\cdot\log\frac{n+1}{n+1-k}$$
$$\geqslant \frac{1}{C_0}\sum_{k=n+1-[\sqrt{n+1}]}^{n}\frac{1}{n+1-k}\cdot\log\frac{n+1}{n+1-k}$$
$$\geqslant \frac{1}{C_0}\log\frac{n+1}{[\sqrt{n+1}]}\cdot\sum_{k=n+1-[\sqrt{n+1}]}^{n}\frac{1}{n+1-k}$$
$$\geqslant \frac{1}{C_0}\log\sqrt{n+1}\cdot\sum_{j=1}^{[\sqrt{n+1}]}\frac{1}{j} > \frac{1}{C_0}\log\sqrt{n+1}$$
$$\times\log\left([\sqrt{n+1}]+1\right) > \frac{1}{C_0}\log^2\sqrt{n+1} = \frac{1}{4C_0}\log^2(n+1),$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. Поэтому

$$\|Q_n^+\|_{mK} \geqslant \frac{1}{4C_0}\log^2(n+1) - \log(n+1) - 1 \gtrsim \log^2(n+2).$$

Таким образом,

$$\|P_+^{(n)}\|_{mK\to mK} \geqslant \frac{\|Q_n^+\|_{mK}}{\|Q_n\|_{mK}} \gtrsim \log(n+2).$$

Теорема доказана полностью. $\bullet$

Теорема 3.14. *Если $s \in \mathbb{N}$, $s > 3$, лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2), то семейство степеней $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ образует условный, но не безусловный, базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}};\operatorname{mult} K)$, пространство коэффициентов которого не содержится в $l^r(\Lambda^{+s})$ при $r \in \left[1, \frac{2s}{s+3}\right)$.*

Доказательство проведем кратко. Из результатов работы [6] вытекает, что пространство коэффициентов безусловного базиса в пространстве $\operatorname{mult} K$ содержит $l^1(\log n)$ и содержится в l^1. Поэтому базисы, о которых говорится в утверждении теоремы, условные. Оценка нормы полинома $\|p_m\|_{mK}$ сверху получается следующим образом

$$\|p_m\|_{mK} \leqslant \|p_m\|_\infty \left(3 + \log\max\left(\Lambda^{+s} \cap \left(\bigcup_{s\leqslant k\leqslant m} \Lambda_{2k-1}\right)\right)\right).$$

Остальное как и в предыдущих примерах. $\bullet$

Отметим описание пространств коэффициентов некоторых безусловных базисов в пространстве $\operatorname{mult} K$. Это описание получается простой комбинацией результатов С. А. Виноградова [6] и А. Б. Александрова [7].

Теорема 3.15. *Пусть Λ – лакунарное подмножество натуральных чисел. Тогда для всякой Λ-спектральной функции f, $f \in \operatorname{mult} K$, имеем*

$$\|f\|_{mK} \asymp \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k\in[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}})\cap\Lambda} |\hat f(k)|^2 \log^2 k\right)^{1/2}.$$

Доказательство получается сопоставлением двух результатов из работ [6, с. 16] и [7, с. 73]. $\bullet$

Следствие 3.16. *Пусть Λ – сверхлакунарное подмножество натуральных чисел, т.е.*

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{\frac{\log k}{\log n} : k, n \in \Lambda, k < n\right\} < 1.$$

Тогда для всякой Λ-спектральной функции f, $f \in \operatorname{mult} K$, имеем

$$\|f\|_{mK} \asymp \sum_{n\in\Lambda} |\hat f(n)| \cdot \log n. \quad \bullet$$

Пример 4. Пространство мультипликаторов степенных рядов с равномерно ограниченными частичными суммами ($\operatorname{mult} U_A^\infty$).

Напомним определение

$$U_A^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in H^\infty : \|f\|_{U_A^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\geqslant 0} \|S_n f\|_\infty < +\infty\}.$$

Пространство $\operatorname{mult} U_A^\infty$ определяется стандартным образом и его свойства можно найти в [12].

Сначала отметим, что проекторы $P_+^{(n)}$ ограничены в пространстве $\operatorname{mult} U_A^\infty$.

Теорема 3.17. *Последовательность проекторов* $(P_+^{(n)})_{n\geqslant 0}$ *ограничена в пространстве линейных непрерывных операторов из* $\operatorname{mult} U_A^\infty$ *в* $\operatorname{mult} U_A^\infty$.

Доказательство. Пусть заданы число $n \in \mathbb{Z}_+$ и функция $f \in \operatorname{mult} U_A^\infty$. В работе [12, с. 205] показано, что $f \in \operatorname{mult} U_A^\infty$ тогда и только тогда, когда оператор Теплица с символом $\bar{f}$, обозначаемый далее $T_{\bar{f}}$, непрерывно действует из U_A^∞ в U_A^∞. Последнее равносильно тому, что $T_{\bar{f}}$ непрерывно действует из U_A^∞ в H^∞. В одну сторону это утверждение очевидно. В другую вытекает из равенства

$$((\bar{f}g)_+\bar{\zeta}^n)_+ = (\bar{f}(g\bar{\zeta}^n)_+)_+,$$

где $g \in U_A^\infty$.

Поэтому, ограниченность проекторов $(P_+^{(n)})_{n\geqslant 0}$ в пространстве $\operatorname{mult} U_A^\infty$ равносильна ограниченности операторов Теплица $T_{(f\bar{\zeta}^n)_-}$, действующих из U_A^∞ в H^∞. Проверим последнее. Для функций $g \in U_A^\infty$, $h \in L^1(\mathbb{T})$, $\|g\|_{U_A^\infty} \leqslant 1$, $\|h\|_{L^1} \leqslant 1$ имеем

$$\int_{\mathbb{T}} ((f\bar{\zeta}^n)_- g)_+ h dm = \int_{\mathbb{T}} (f\bar{\zeta}^n g - (f\bar{\zeta}^n)_+ g)_+ \times h\, dm = \int_{\mathbb{T}} ((fg)\bar{\zeta}^n)_+ h\, dm - \int_{\mathbb{T}} (f\bar{\zeta}^n)_+ gh\, dm.$$

Осталось заметить, что $fg \in U_A^\infty$, $(f\bar{\zeta}^n)_+ g \in H^\infty$ и перейти в неравенстве

$$\left|\int_{\mathbb{T}} ((f\bar{\zeta}^n)_- g)_+ h\, dm\right| \leqslant \left|\int_{\mathbb{T}} ((fg)\bar{\zeta}^n)_+ h\, dm\right| + \left|\int_{\mathbb{T}} (f\bar{\zeta}^n)_+ gh\, dm\right|$$

к supremum'у по g и h. $\bullet$

Приведем один из результатов работы [12], который, правда, там не выделен явно.

Теорема 3.18. *Имеет место непрерывное вложение* $\operatorname{mult} K \hookrightarrow \operatorname{mult} U_A^\infty$, *причем справедлива оценка для норм* $\|\cdot\|_{mU_A^\infty} \leqslant \|\cdot\|_{mK}$.

Доказательство получается легко из рассуждений, приведенных в работе [12, с. 206, 207]. •

Теорема 3.19. (1) *Если* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *– лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел, то семейство степеней* $(z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}$ *образует безусловный симметричный базис в* $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+1}}; \operatorname{mult} U_A^\infty)$, *пространство коэффициентов которого совпадает с* $l^1(\Lambda^{+1})$.

(2) *Если* $s \in \mathbb{N}$, $s > 3$ *и лакунарная по Адамару последовательность натуральных чисел* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условиям* (3.1), (3.2), *то семейство степеней* $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ *образует условный, но не безусловный, базис в пространстве* $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; \operatorname{mult} U_A^\infty)$, *пространство коэффициентов которого не содержится в* $l^r(\Lambda^{+s})$ *при* $r \in \left[1, \frac{2s}{s+3}\right)$.

Доказательство проводится по обычной схеме. Отметим лишь, что для оценки нормы $\|p_m\|_{mU_A^\infty}$ сверху используется Теорема 3.18. •

Замечания 3.20. (1) Из Теоремы 3.17 непосредственно (без ссылки на Теорему 2.11) вытекает, что $(z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}$ – условный базис в $\vee((z^n)_{n\in\Lambda^{+s}}; \operatorname{mult} U_A^\infty)$. Поэтому наиболее важная часть Теоремы 3.19 касается заключения о пространстве коэффициентов этого условного базиса.

(2) Аналогичные построения условных базисных семейств можно провести также в пространствах мультипликаторов аналитических классов Бесова с нулевой гладкостью, в пространствах мультипликаторов аналитических функций с конечным интегралом типа Дирихле и других.

Литература

1. A. Figà-Talamanca, *An example in the theory of lacunary Fourier series.* — Boll. della Unione Mat. Ital. **3**, No. **3** (1970), 375–378.
2. О. Г. Сусликова, *О тригонометрических рядах Фурье с лакунами.* — Вестник МГУ No. 6 (1973), 46–55.
3. В. Ф. Гапошкин, *О безусловных базисах в пространствах* $L^p(p \geqslant 1)$. — Успехи Матем. Наук, XIII **4(82)** (1958), 179–184.
4. В. И. Гурарий, В. И. Мацаев, *Лакунарные степенные последовательности в пространствах* C *и* L^p. — Изв. Акад. Наук СССР, сер. матем. **30**, **No. 1** (1966), 3–14.

5. С. А. Виноградов, *Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L^p-нормой.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **65** (1976), 17–68.
6. S. A. Vinogradov, *Properties of multipliers of Cauchy–Stieltjes integrals and some factorization problems for analytic functions.* — Am. Math. Soc. (transl. (2) **115** (1980), 1–32.
7. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* — Lect. Notes Math. **864** (1981), 1–89, Springer-Verlag.
8. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* т. 1, М, Мир, 1965.
9. Ж.-П. Кахан, *Случайные функциональные ряды.* М, Мир, 1973.
10. Н. К. Никольский, *О пространствах и алгебрах теплицевых матриц, действующих в l^p.* — Сиб. Мат. Журнал, VII No. 1 (1966), 146–158.
11. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* т. 2, М, Мир, 1965.
12. S. V. Hruščev, S. A. Vinogradov, *Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series.* — Lect. Notes Math. **864** (1981), 171–214, Springer-Verlag.

Petrov A. N. On a method of constructing conditional bases of exponentials in some Banach spaces of analytic functions.

In this note a method of constructing conditional exponential bases in some Banach spaces of analytic functions is presented. The method of constructing basic families due to A. Figà-Talamanca is generalized. Concrete applications and examples of conditional basic families in the space of multipliers of power series with the sequence of Taylor coefficients from l^p, in the space of multipliers of Cauchy type integrals, and in other spaces are given.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 31 января 1997 г.