О. Г. Парфенов, М. В. Слупко

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО БЕРНШТЕЙНУ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Пусть $T : X \to Y$ линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Напомним определение поперечников по Бернштейну (см. [1], гл. 1):

$$b_n(T) = \sup_{L_{n+1}} \inf_{x \in BX \cap L_{n+1}} \|Tx\|_Y, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где BX – единичная сфера пространства X, L_{n+1} – произвольное $(n+1)$-мерное подпространство X.

В данной заметке рассматриваются операторы вложения вида:

$$\mathrm{I}_{p,q} : L^p\,(K, \mu) \longrightarrow L^q\,(K, \mu), \tag{2}$$

где (K, μ) – измеримое пространство с конечной борелевской мерой. Будем считать, что $\mu(X) = 1$. Операторы вида (2) рассматривались при изучении поперечников в случае дискретной меры μ. Для непрерывных мер и большинства поперечников (линейных, колмогоровских, гельфандовских) рассмотрение таких операторов, по-видимому, мало интересно, так как $\mathrm{I}_{p,q}$ некомпактны.

Бернштейновские поперечники интересны и для некомпактных операторов. Сформулируем результаты работы.

Теорема 1. *Пусть $p = \infty$, $q = 2$ и μ не является чисто атомической мерой. Тогда*

$$b_n(\mathrm{I}_{\infty,2}) = (n+1)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{3}$$

Замечание 1. Теорема 1 является обобщением результата [2], относящегося к случаю $K = \mathbb{T}$ – единичная окружность и μ – мера Лебега на $\mathbb{T}$.

Замечание 2. Если μ является чисто атомической, то результат принципиально меняется. В этом случае бернштейновские поперечники вычислены Э. М. Галеевым [3].

Теорема 2. *Пусть $p = \infty$, $2 \leqslant q < \infty$ и μ не является чисто атомической мерой. Тогда*

$$b_n(\mathrm{I}_{\infty,q}) = (n+1)^{-1/q}, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{4}$$

Замечание 3. При $1 \leqslant q < 2$ остается в силе оценка:

$$b_n(\mathrm{I}_{\infty,q}) \geqslant (n+1)^{-1/q}, \qquad n = 0, 1, \dots .$$

При $p < \infty$ результаты меняются.

Теорема 3. *Пусть $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ и μ не является чисто атомической мерой. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$, такая, что при всех n:*

$$b_n(\mathrm{I}_{p,q}) \geqslant C_0, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{5}$$

Замечание 4. Например, если $K = \mathbb{T}$ и μ – мера Лебега на $\mathbb{T}$, имеем

$$b_n(\mathrm{I}_{2,1}) \geqslant 2^{-1/2}, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{6}$$

$$b_n(\mathrm{I}_{4,1}) \geqslant 2^{-3/4}, \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{7}$$

2. Доказательство теоремы 1. Оценка сверху в теореме 1 вытекает из результатов [2].

Для доказательства оценки снизу воспользуемся следующим известным результатом: если мера μ не содержит атомов, то существует ортонормированная система функций $\{e_n(t)\}_0^\infty$ в $L_2(\mu)$, такая, что для всех n

$$| e_n(t) | = c \quad \mu - \text{почти всюду}, \qquad c = (\mu(X))^{-1/2}.$$

(см. [5], стр. 27–30). Такие системы будем называть унимодулярными.

По условию теоремы 1 существует подмножество $e_0 \subset X$, такое, что $\mu(e_0) > 0$ и сужение меры μ на e_0 не содержит атомов. Построим ортонормированную унимодулярную систему $\{e_n(t)\}_0^\infty$ на $L_2(e_0, \mu)$ и для любого n рассмотрим подпространство L_n, натянутое на систему $\{e_k(t)\}_0^n$. Остается применить оценку снизу из работы [2], дающую требуемый результат.

3. Доказательство теоремы 2. Начнем с оценки снизу. По теореме 1 существует подпространство $L_n^0 \subset L^\infty$, $\dim L_n^0 = n+1$, такое, что для любой $f \in L_n^0$:

$$\|f \mid L^\infty\| \leqslant (n+1)^{1/2} \|f \mid L^2(\mu)\|. \tag{8}$$

Далее используем очевидное неравенство:

$$\|f \mid L^\infty\| \leqslant \|f \mid L^\infty(\mu)\|. \tag{9}$$

Из неравенств (8), (9) и теоремы Рисса–Торина о выпуклости получим требуемую оценку нормы обратного оператора на L_n^0, а следовательно требуемую оценку поперечников.

Докажем оценку сверху. По теореме 1 для любого подпространства $L_n \subset L^\infty$, $\dim L_n = n+1$ существует функция $f^* \in L_n$, такая, что

$$\|f^* \mid L^\infty\| = 1 \quad \text{и} \quad \|f^* \mid L^2(\mu)\| \leqslant (n+1)^{-1/2}.$$

Оценим норму $\|f^* \mid L^q(\mu)\|$ при $2 \leqslant q < \infty$:

$$\|f^* \mid L^q(\mu)\|^q = \int\limits_X \mid f^*(t) \mid^q \, d\mu \leqslant \int\limits_X \mid f^*(t) \mid^2 \, d\mu \leqslant (n+1)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

4. Доказательство теоремы 3. Неравенства (6), (7) следуют из одной теоремы Гротендика (см. [4], стр. 133–135). Именно, в [4] построено бесконечномерное подпространство P_E в L^4, такое, что для всех $f \in P_E$ выполнены неравенства

$$\|f \mid L^4(\mu)\| \leqslant 2^{1/2} \|f \mid L^2(\mu)\| \tag{10}$$

$$\|f \mid L^4(\mu)\| \leqslant 2^{3/4} \|f \mid L^1(\mu)\|. \tag{11}$$

Из неравенств (10), (11) следуют оценки (6), (7). Более того, конструкция, приведенная в [4], легко обобщается. Мы опустим соответствующие несложные вычисления, приведем сразу окончательную оценку: в пространстве $L^{2n}(\mathbb{T})$ существует бесконечномерное подпространство P_E, такое, что для всех $f \in P_E$

$$\|f \mid L^{2n}(\mathbb{T})\| \leqslant (n!)^{\frac{2n-1}{(n-1)2n}} \|f \mid L^1(\mathbb{T})\|. \tag{12}$$

Из оценки (12) немедленно получим:

$$b_k(\mathrm{I}_{2n,1}) \geqslant (n!)^{-\frac{2n-1}{(n-1)2n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Наконец в общем случае возьмем натуральное n: $2n \geqslant p$ и факторизуем оператор $\mathrm{I}_{2n,1}$:

$$\mathrm{I}_{2n,1} = \mathrm{I}_{q,1} \circ \mathrm{I}_{q,p} \circ \mathrm{I}_{2n,p}. \tag{14}$$

Из (13), (14) следует теорема 3.

Литература

1. A. Pinkus, *N-widths in approximation theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
2. О. Г. Парфенов, *Поперечники по Бернштейну некоторых классов аналитических функций*. — Мат. заметки **56** (1994), 123–131.
3. Э. М. Галеев, *Поперечники по Бернштейну бесконечномерных эллипсоидов*. — В кн.: Комплексный анализ. Дифференциальные и интегральные уравнения. Калмыцк. гос. ун-т, Элиста, 1990, с. 14–20.
4. У. Рудин, *Функциональный анализ*. Мир, М., 1975, 443 с.
5. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*. Наука, М., 1984, 496 с.

Parfenov O. G., Slupko M. V. Bernstein widths of embedding operators of Lebesgue spaces.

Let (K, μ) be a measurable space, and let $\mu(K) = 1$. Let

$$\mathrm{I}_{p,q} : L^p\,(K, \mu) \longrightarrow L^q\,(K, \mu)$$

be the embedding operator. The Bernstein widths of $\mathrm{I}_{p,q}$ are considered.

Псковский государственный педагогический институт

Поступило 28 февраля 1997 г.