В. Л. Олейник

МЕРЫ КАРЛЕСОНА И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Введение

Пусть $\mathbb{D}$ – открытый единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $G = \mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Пусть (t, z) – точка области G и m – плоская мера Лебега на $\mathbb{C}$.

Следуя Я. Петре [13], мы рассматриваем аналитические решения $u(t, z)$ уравнения теплопроводности (УТ) $2u_t = u_{zz}$ в области G из $\mathbb{C}^2$ с начальными данными $f(z) = u(0, z)$ из пространства Фока F целых функций на $\mathbb{C}$.

Пространство F является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_F := \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} f \bar{g} e^{-|z|^2} dm(z)$$

и с воспроизводящим ядром $e^{z\bar{\zeta}}$, т.е. для любой функции $f \in F$

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} f(z) e^{\bar{z}\zeta} dm(z).$$

Возьмем функцию $e^{z\bar{\zeta}}$ в качестве начальных данных УТ. Тогда соответствующее решение имеет вид $\exp\left(z\bar{\zeta} + \frac{1}{2}t\bar{\zeta}^2\right)$ и для прозвольной $f \in F$ функция

$$u(t, z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} f(\zeta) e^{z\bar{\zeta} + \frac{1}{2}t\bar{\zeta}^2 - |\zeta|^2} dm(\zeta) \tag{1}$$

будет решением УТ с начальными данными $f \in F$. Обозначим через T пространство всех таких решений (аналитические температуры [13]). В работе [13] дано подробное описание свойств функции ($|a| < 1$) $e_{ac} := \exp(\frac{1}{2}az^2 + cz)$.

Я. Петре [14] (см. также [15]) сформулировал следующий вопрос: описать все неотрицательные борелевские меры μ, для которых существует положительная постоянная C такая, что для всех $f \in F$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{C}} |u(t,z)|^2\, d\mu \leq C\|f\|_F^2. \tag{2}$$

Я. Петре назвал такие меры “тепловыми” мерами Карлесона (heat-Carleson measures) [15]. Приведем пример одной из таких мер. Прежде всего заметим [13], что

$$\|e_{ac}\|_F^2 = (1-|a|^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{\mathrm{Re}\ a\bar{c}^2 + |c|^2}{1-|a|^2}\right).$$

Тогда из (1) получаем оценку

$$|u(t,z)|^2 \leq \|f\|_F^2 (1-|t|^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{\mathrm{Re}\ t\bar{z}^2 + |z|^2}{1-|t|^2}\right).$$

Положим $\phi(t,z) := (\mathrm{Re}\ t\bar{z}^2 + |z|^2)/(1-|t|^2)$. Далее, прямым вычислением проверяется, что для всех f, $g \in F$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{C}} u(t,z)\bar{v}(t,z)(1-|t|^2)^{1/2} e^{-\phi(t,z)} dm(t) dm(z) = \frac{\pi^2}{2}(f,g)_F, \tag{3}$$

где $u(0,z) = f(z)$ и $v(0,z) = g(z)$. Последнее означает, что пространство решений T является подпространством весового пространства Бергмана B состоящего из аналитических в G функций. Точнее $T \subset B := L_a^2(\mathbb{D}\times\mathbb{C},\ \mu_0)$, где $\mu_0 := (1-|t|^2)^{1/2} e^{-\phi(t,z)} m(t) m(z)$, и для всех $f \in F$ мы имеем $\|u\|_B = (\pi/\sqrt{2})\|f\|_F$.

Таким образом мера μ_0 доставляет нам простейший пример “тепловой” меры Карлесона, и, в соответствии с (3), вопрос Я. Петре редуцируется к обычной задаче теории мер Карлесона: описать все неотрицательные борелевские меры λ, для которых существует положительная постоянная C_1 такая,что для всех $b \in B$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{D}\times\mathbb{C}} |b|^2 (1-|t|^2)^{1/2} e^{-\phi} d\lambda \leqslant C_1 \|b\|_B^2. \tag{4}$$

Одной из таких мер оказалась мера $\lambda_0 := m(t)m(z)$ и, как обычно, далее, нам необходимо указать класс множеств, на которых тестируемая мера λ должна быть подчинена мере Лебега λ_0.

В нашем случае это будет класс поликругов. Опишем их. Пусть $(t,z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Обозначим через Π множество всех поликругов вида:

$$\pi(t,z) := \\ = \{(\tau,\zeta) \in \mathbb{D}\times\mathbb{C} : 4|t-\tau| < (1-|t|)^{3/2}/(1+|z|),\ |z-\zeta| < (1-|t|)^{1/2}\}.$$

Сформулируем, наконец, основной результат статьи, полученный автором совместно с Д. Д. Степановым [16].

Теорема. *Пусть для неотрицательной меры λ выполнено следующее условие:*

$$\sup_{\pi\in\Pi} \lambda(\pi)/\lambda_0(\pi) < \infty. \tag{5}$$

Тогда существует постоянная C_1 такая, что неравенство (4) *справедливо для всех $b \in B$.*

Следствие. *При выполнении условий теоремы неравенство* (2) *выполняется для всех $f \in F$ с мерой $\mu = (1-|t|^2)^{1/2}e^{-\phi(t,z)}\lambda$ и постоянной $C = C_1\pi^2/2$.*

В следующем пункте приводятся примеры мер Карлесона для различных пространств Бергмана. Эти примеры последовательно проясняют суть вопроса. В последнем пункте подробно рассматривается один из примеров и даны краткие наметки доказательства теоремы.

Автор выражает искреннюю благодарность Я. Петре за постановку задачи. Данная работа частично поддержана грантами INTAS–93–1815 и Международной Соросовской Программой Образования в Области Точных Наук (ISSEP–d1208).

Меры Карлесона для пространств Бергмана

1. Теория мер Карлесона началась с классического результата [1] для пространства Харди H^2 аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$. Для $|z| < 1$ положим $s_1(z) := \{\zeta \in \overline{\mathbb{D}} : |\zeta - (z/|z|)| < 1-|z|\}$, если $z \neq 0$ и $s_1(0) := \overline{\mathbb{D}}$.

Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует постоянная C такая, что для всех $f \in H^2$

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |f|^2 d\mu \leqslant C \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta;$$

(2) $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \mu(s_1(z))/(1-|z|) < \infty$.

2. Пространство $A^2(\mathbb{D})$ аналитических функций в единичном круге $\mathbb{D}$ с нормой

$$\|f\|_2^2 := \int\limits_{\mathbb{D}} |f|^2 dm$$

дает нам простейший пример пространства Бергмана. В этом случае для описания мер Карлесона [10] необходимо рассмотреть круги $s_2(z) := \{\zeta \in \mathbb{D} : |\zeta - z| < (1-|z|)/2\}$.

Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует постоянная C такая, что для всех $f \in A^2(\mathbb{D})$

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu \leqslant C\|f\|_2^2;$$

(2) $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \mu(s_2(z))/(1-|z|)^2 < \infty$.

Замечание. Обозначим через λ_1 продолжение нулем меры $d\theta$ с границы $\partial\mathbb{D}$ внутрь круга $\mathbb{D}$ и положим $\lambda_2 := m$. Заметим, что как в примере 1 так и в примере 2 указыватся класс множеств $s_j(z)$, $j = 1, 2$, на которых мера μ подчинена мере Лебега λ_j (dim supp $\lambda_j = j$). Если в примере 1 supp $\mu \subset \partial\mathbb{D}$, то мера μ должна быть подчинена мере Лебега на окружности $d\theta$ на всех борелевских подмножествах $\partial\mathbb{D}$.

3. Рассмотрим теперь поликруг $\mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D} \ni (z_1, z_2) = z$ и пространство Бергмана $A^2(\mathbb{D}^2)$ аналитических функций в $\mathbb{D}^2$ с метрикой

$$\|f\|_3^2 := \int\limits_{\mathbb{D}^2} |f|^2 dm(z_1) dm(z_2).$$

Как обычно для произведения областей искомые множества являются произведением плоских подмножеств [2]. Поэтому положим $s_3(z) := s_2(z_1) \times s_2(z_2)$. Заметим, что при фиксированном z_1 и $|z_2|$ стремящемся к 1 поликруг $s_3(z)$ становится очень узким.

Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует постоянная C такая, что для всех $f \in A^2(\mathbb{D}^2)$

$$\int\limits_{\mathbb{D}^2} |f|^2 d\mu \leqslant C\|f\|_3^2;$$

(2) $\sup_{z\in\mathbb{D}^2} \mu(s_3(z))(1-|z_1|)^{-2}(1-|z_2|)^{-2} < \infty.$

Перейдем, наконец, к примерам пространств целых функций.

4. Пусть F^n - пространство Фока, т.е. пространство аналитических функций в $\mathbb{C}^n \ni (z_1, ..., z_n) = z$ с метрикой

$$\|f\|^2_{F^n} := \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{C}^n} |f|^2 e^{-|z|^2}\, dm_n(z).$$

Здесь m_n - мера Лебега на $\mathbb{C}^n$ и $|z|$ - евклидова метрика, причем $F^1 = F$ и $m_1 = m$. В качестве стандартных множеств в этом случае можно брать единичные поликруги (ср. с примером 3) либо единичные шары [5].

Следующие условия эквивалентны:

(1) Существует постоянная C такая, что для всех $f \in F^n$

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu(z) \leqslant C\|f\|^2_{F^n};$$

(2) $\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \mu(\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - z_j| < 1,\ j = 1, 2, ..., n\}) < \infty;$

(3) $\sup_{z\in\mathbb{C}^n} \mu(\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta - z| < 1\}) < \infty.$

5. Естественным обобщением предыдущего примера является весовое пространство Фока целых функций в $\mathbb{C}^n$ с весом $e^{-\varphi}$ вместо $e^{-|z|^2}$. Здесь мы предполагаем, что функция φ - положительная плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$. Пусть F_φ будет пространством целых функций в $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$\|f\|^2_\varphi := \int\limits_{\mathbb{C}} |f|^2 e^{-\varphi} dm_n < \infty.$$

Если, например, $\varphi(z) = \log(1 + |z|^2)$, то соответствующее пространство F_φ оказывается пустым. Поэтому мы должны наложить на весовую функцию дополнительные ограничения [5, 11]. Пусть Δ_j – оператор Лапласа по вещественной и мнимой частям переменной z_j. Рассмотрим случай $\varphi_0(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + ... + \varphi_n(z_n)$. Мы предполагаем,что $\varphi_j \in C^2(\mathbb{C})$ и $\Delta_j\varphi_j > 0,\ j = 1, 2, ..., n$. В этом случае радиусы стандартных поликругов определяются формулой: $r_j(z_j) := (\Delta_j\varphi_j(z_j))^{-1/2}$. Заметим, что если $\varphi_0 = |z|^2$ как в примере 4, то $r_j \equiv const$. Дополнительные ограничения на

φ_0 заключаются в следующем: существуют положительные постоянные c_1, $c_2 < 1$ и c_3 такие, что $|r_j(z_j) - r_j(\zeta_j)| \leqslant c_1|z_j - \zeta_j|$ для $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ и $r_j(\zeta_j) \leqslant r_j(z_j) + c_2|z_j - \zeta_j|$ для $|z_j - \zeta_j| \geqslant c_3 r_j(z_j)$, $j = 1, 2, ..., n$. Для $z \in \mathbb{C}^n$ и $a > 0$ положим $D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_j - z_j| \leqslant a r_j(z_j),\ j = 1, 2, ..., n\}$ и $r(z) := r_1(z_1) \cdot r_2(z_2) \cdots r_n(z_n)$.

При выполнении вышеперечисленных предположений мы можем указать постоянную a, зависящую только от c_k, $k = 1, 2, 3$, при которой эквивалентны следующие условия:

(1) Существует постоянная C такая, что для всех $f \in F_{\varphi_0}$

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^2 e^{-\varphi_0} d\mu \leqslant C\|f\|^2_{\varphi_0};$$

(2) $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \mu(D(z))/r(z)^2 < \infty$.

Замечание. Теория мер Карлесона в той или иной степени изложена во многих источниках. Мы упомянем здесь лишь достаточно подробную монографию K. Zhu [17].

Вполне естественно, что в теореме и во всех примерах мы можем рассматривать пространства $L^q(\mu)$ и L^p при $0 < p, q < \infty$. Обычно исследование случая $q < p$ представляет бо́льшие трудности, чем $p \leqslant q$. Наибольшие хлопоты вызывает доказательство необходимости при $q < p$ (см. [9, 3]).

По многим причинам представляет интерес изучение мер Карлесона для пространств Бергмана в произвольных областях. Например, в работе [4] отмечено, что описание мер Карлесона для ограниченной конечносвязной области $U \subset \mathbb{C}$ идентично описанию этих мер в единичном круге $\mathbb{D}$ (см. пример 2) в том и только в том случае, когда граница области ∂U не содержит изолированных точек. В частности, последнее означает, что для любой ограниченной конечносвязной области U без изолированных точек границы ∂U следующие условия эквивалентны:

(1) Оператор вложения I: $L^p_a(U, m_\beta) \to L^q(U, \mu)$ ограничен (компактен);

(2) $\mu(z)m_\beta(z)^{-1} \in L^{p/(p-q)}(U, m_\beta)$, если $q < p$, и
$\sup\limits_{z\in U} \mu(z)m_\beta(z)^{-q/p} < \infty$, если $p \leq q$
(I ограничен, если $q < p$, и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{z\in U, d(z)<\varepsilon} = 0$, если $p \leqslant q$).

Здесь L^p_a - подпространство аналитических функций, $d(z) := \operatorname{dist}(z, \partial U)$, $\beta > -1$, $m_\beta := d(z)^\beta m$, $\mu(z) := \mu(\{\zeta \in U : |\zeta - z| \leqslant d(z)/2\})$ (аналогично $m_\beta(z)$). Как следствие мы получаем, что для такой области U весовое пространство Бергмана $L^p_a(U, m_\beta)$ непусто для всех $\beta \in (-1, 0)$ даже в случае, когда $f \equiv 1 \notin L^1(U, m_\beta)$. Спектральные свойства оператора вложения I были исследованы в работе [6].

Схема доказательства теоремы

При доказательстве прежде всего существенно используется субгармоничность функции $\log|b(t,z)|$ по каждой переменной t и z. С другой стороны нам необходимо определить такие подмножества области G, на которых функция ϕ изменяется равномерно. Все основные шаги доказательства теоремы прослеживаются на примере 4 (ср. [5]).

Доказательство примера 4. Пусть сначала $n = 1$. В этом случае условия (2) и (3) совпадают. Выберем точки $z_{kl} := k + il$, $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ и рассмотрим круги $ad_{kl} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_{kl}| < a\}$, $d_{kl} := 1d_{kl}$. Для любой функции $f \in F$ и любого $z \in \mathbb{C}$ в силу субгармоничности $\log|f|$ выполняется неравенство

$$\log|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta - z| < 1} \log|f(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

С другой стороны,

$$-|z|^2 = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta - z| < 1} |\zeta|^2 dm(\zeta) + \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Складывая, получаем

$$\log(|f(z)|^2 e^{-|z|^2}) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta - z| < 1} \log(|f(\zeta)|^2 e^{-|\zeta|^2 + \frac{1}{2}}) dm(\zeta).$$

Применяя неравенство между арифметическим и геометрическим средними, приходим к оценке

$$|f(z)|^2 e^{-|z|^2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\pi} \int\limits_{|\zeta - z| < 1} |f(\zeta)|^2 e^{-|\zeta|^2} dm(\zeta).$$

Следовательно в каждом круге d_{kl} имеет место равномерная оценка

$$|f(z)|^2e^{-|z|^2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\pi} \int\limits_{2d_{kl}} |f(\zeta)|^2 e^{-|\zeta|^2} dm(\zeta), z \in d_{kl}. \tag{7}$$

И, наконец, интегрирование по мере μ и суммирование по всем (k,l) приводят нас к окончательному неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d\mu(z) \leqslant \frac{16\sqrt{e}}{\pi} (\sup_{k,l} \mu(d_{kl})) \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dm(z).$$

Мы показали, что из (2) следует (1). Число 16 обусловлено кратностью покрытия плоскости $\mathbb{C}$ набором кругов $\{2d_{kl}\}$.

Доказательство необходимости условия (2) для выполнения (1) в данном примере получается легким, поскольку мы знаем явный вид воспроизводящего ядра $e^{z\bar{\zeta}}$. Простые вычисления дают

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n} |e^{z\bar{\zeta}}|^2 e^{-|z|^2} d\mu(z) \geq e^{|\zeta|^2-1} \mu(\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < 1\}), \ \ \|e^{z\bar{\zeta}}\|_F^2 = \pi e^{|\zeta|^2}.$$

И мы с необходимостью имеем (2), если (1) выполнено.

Многомерный случай получается из случая $n = 1$ последовательным проведением рассуждений приведенных выше по каждой переменной. Здесь существенную роль играет тот факт, что весовая функция является произведением функций, каждая из которых зависит от одной координаты. Поэтому пробную функцию при доказательстве импликации (1) => (2) можно строить как призведение плоских.

В случае примера 5 ($n = 1$) импликация (2) => (1) получается после замены равенства (6) на неравенство

$$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) dm(\zeta) \leqslant \varphi(z) + M \tag{8}$$

с некоторой постоянной M, не зависящей от z и r (ср. [5]). В свою очередь, при сделанных предположениях на φ неравенство (8) является следствием классической интегральной формулы

$$\frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{|\zeta| < r} \varphi(\zeta) dm(\zeta) \leqslant \varphi(0) + \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_{|\zeta| < \rho} \log \frac{\rho}{|\zeta|} \Delta\varphi(\zeta) dm(\zeta).$$

Отсюда видно, что главную роль в правильном определении функции радиусов стандартных кружков играет оператор Лапласа функции φ.

При доказательстве теоремы следует иметь ввиду, что опраторы Лапласа функции ϕ по переменным t и z соответственно равны

$$\Delta_t\phi := 4\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial\bar{t}} = \frac{|z+t\bar{z}|^2}{(1-|t|^2)^3}, \quad \Delta_z\phi := 4\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{1}{1-|t|^2}.$$

Следовательно, для всех точек $(t,z)\in G$ и поликругов $\pi(t,z)\in\Pi$, применяя (8) последовательно по τ и ζ, получим неравенство

$$\frac{1}{\lambda_0(\pi(t,z))}\int\limits_{\pi(t,z)}\phi(\tau,\zeta)dm(\tau)dm(\zeta)\leqslant\phi(t,z)+M_1$$

с некоторой постоянной M_1.

Для получения ключевой оценки типа (7), равномерной в каждом поликруге $\pi(t,z)$, необходимо воспользоваться раздельной субгармоничностью $\log|b(t,z)|$, $b\in B$. При этом интегрирование будет проходить по "раздутым" поликругам $K\pi(t,z)$ для некоторой постоянной K.

Завершается доказательство теоремы проверкой конечнократности покрытия области G поликругами $\{K\pi_j\}$ для некоторого фиксированного конечнократного покрытия G поликругами $\{\pi_j\}\subset\Pi$. Подобная процедура проведена в работе [8] (см. также [7]), даже для поликругов, меняющих свою ориентацию в $\mathbb{C}^n$.

Литература

1. L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem.* — Ann. Math. **76** (1962), 547–559.
2. W. W. Hastings, *A Carleson measure theorem for Bergman spaces.* — Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 237–241.
3. V. N. Kudashov, V. L. Oleinik, *An embedding theorem of Bergman space into Lebesgue space.* University of Helsinki, Reports of the Department of Mathematics, Preprint 42, 1993, 1–9.
4. В. Н. Кудашов, В. Л. Олейник, *Теоремы вложения пространств Бергмана в пространства Лебега для областей с негладкой границей.* — Функц. анализ и его прил. **30** (1996), 67–70.
5. В. Л. Олейник, *Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **47** (1974), 120–137.

6. В. Л. Олейник, *Оценки поперечников компактных множеств аналитических функций в L^p с весом.* — Вестник ЛГУ, сер. мат. мех. **7** (1975), 47–51.
7. V. L. Oleinik, *A Carleson embedding theorem for Bergman spaces.* Institute Mittag-Leffler, Report N 4, Stockholm, 1979, 1–9.
8. В. Л. Олейник, *Теорема вложения Карлесона для пространства Бергмана.* — Проблемы математической физики вып. **10** (1982), 177–183.
9. В. Л. Олейник, *Одна теорема вложения для классов аналитических функций.* — Проблемы математической физики вып. **11** (1985), 164–167.
10. В. Л. Олейник, Б. С. Павлов, *Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **22** (1971), 94–102.
11. В. Л. Олейник, Г. С. Перельман, *Теорема вложения Карлесона для весового пространства Бергмана.* — Матем. зам. **47**, вып. **6** (1990), 74–79.
12. V. L. Oleinik, M. Vuorinen, *Embedding theorems for Bergman spaces in quasiconformal balls.* — Manuscripta Mathem. **72** (1991), 181–203.
13. J. Peetre, *Some calculations related to Fock space and the Shale–Weil representation.* — Integral equations and operator theory **12** (1989), 67–81.
14. J. Peetre, *Private communication.*
15. J. Peetre, *The Fock bundle.* — Lect. notes in pure and app. math. **122** (1990), 301–326.
16. Д. Д. Степанов, *Характеристика мер Карлесона для пространства решений комплексного уравнения теплопроводности с начальными данными из пространства Фока.* Дипломная работа, Санкт-Петербургский государственный университет, 1993.
17. K. Zhu, *Operator theory in function spaces.* Marcel Dekker Inc, New York and Basel, 1990.

Oleinik V. L. Carleson measures and the heat equation.

Let $G = \mathbb{D}\times\mathbb{C}$, where $\mathbb{D}$ is the open unit disk on the complex plane $\mathbb{C}$. In G we consider the analytic solutions $u(t,z)$ ($t\in\mathbb{D}$, $z\in\mathbb{C}$) of the heat equation $2u_t = u_{zz}$ with initial data $f(z) = u(0,z)$ belonging to the Fock space F, i.e., to the space of entire functions square summable with the weight $e^{-|z|^2}$. Conditions on a nonnegative measure μ on G are described under which for all $f\in F$ we have

$$\|u,\ L^2(G,\ \mu)\| \leqslant C\|f, L^2(\mathbb{C},\ e^{-|z|^2})\|.$$

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 27 декабря 1996 г.