Л. Г. Лабскер

ТЕСТОВЫЕ ЗАМЫКАНИЯ МНОЖЕСТВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

1. Введение

В 1953 г. П. П. Коровкин [1, 2] доказал ныне широко известную теорему “о трех функциях,” гласящую, что равномерная сходимость любой последовательности линейных положительных операторов на всем пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций к тождественному оператору следует из ее сходимости на трех функциях тогда и только тогда, когда последние образуют систему Чебышева.

Частный случай, когда операторы последовательности являются сумматорными, а три функции, о которых идет речь в теореме Коровкина, являются функциями $x_i(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$, был рассмотрен в 1952 г. Г. Боманом [3].

Доказательство теоремы о трех функциях существенно опирается на доказанную П. П. Коровкиным аналогичную теорему для функционалов ([2], п. 5), в которой линейные положительные операторы заменены на линейные положительные функционалы, сильная сходимость операторов – на слабую сходимость функционалов и предельный тождественный оператор – на дельта-функцию произвольной фиксированной точки отрезка $[a, b]$.

Теоремы Коровкина вызвали к жизни большое количество исследований, посвященных распространению и обобщению этих теорем на различные пространства, на последовательности операторов и функционалов различных классов, на различные виды сходимости. Совокупность известных к настоящему времени задач, принципов, методов, качественных и количественных результатов по этой тематике представляет собой вполне сложившуюся область анализа – теорию приближения коровкинского типа. Информацию об имеющихся публикациях в этой области за период с 1952 г. по 1987 г. можно получить из библиографии Ф. Альтомаре и М. Кампити [4], снабженной детальной и, как нам кажется, весьма удачной тематической классификацией, и из их фундаментальной монографии [5].

Основные понятия теории приближения коровкинского типа – тестовые и коровкинские множества – в общем банаховом пространстве для случая функционалов могут быть определены следующим образом.

Пусть E – банахово пространство, E^* – сопряженное с ним пространство, X, $Y \subset E$ и F, $\Phi \subset E^*$ – произвольные непустые множества.

Определение 1.1. *Множество X назовем (F, Φ)-тестовым для множества Y, если для любой последовательности функционалов $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$ с ограниченными в совокупности нормами и любого функционала $\varphi \in \Phi$ из справедливости предельного равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ для каждого элемента $x \in X$ следует его справедливость для каждого элемента $y \in Y$.*

Определение 1.2. *Если в определении 1.1 опустить требование ограниченности в совокупности норм $(\|f_n\|)_{n=1}^{\infty}$, то определяемое в таком случае множество X назовем (F, Φ)-коровкинским для множества Y.*

Определение 1.3. *Если множество X является (F, Φ)-тестовым $((F, \Phi)$-коровкинским$)$ для Y, то каждый элемент множества Y естественно назвать точкой (F, Φ)-тестового $((F, \Phi)$-коровкинского$)$ прикосновения множества X.*

(F, Φ)-тестовое $((F, \Phi)$-коровкинское$)$ множество для множества Y, совпадающего со всем пространством E, называется [6] *просто (F, Φ)-тестовым $((F, \Phi)$-коровкинским$)$.*

Класс коровкинских множеств является, вообще говоря, собственным подклассом класса тестовых множеств, ибо (F, Φ)-коровкинское множество для множества Y является, как это непосредственно усматривается из определений 1.1 и 1.2, (F, Φ)-тестовым, а обратное не верно. Приведем подтверждающий пример.

Пусть $E = C[-\pi, \pi]$, Y – подпространство функций $y \in C[-\pi, \pi]$, принимающих на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ равные значения: $y(-\pi) = y(\pi)$;

$$X = \{x_1(t) \equiv 1, \quad x_2(t) = \cos t, \quad x_3(t) = \sin t\}, \tag{1.1}$$

$F = K^* \cup (d_n)_{n=1}^{\infty}$, где K^* – множество линейных положительных функционалов на $C[-\pi,\pi]$, а

$$d_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\frac{\sin((2n+1)/2)t}{2\sin(t/2)}dt, \quad x \in C[-\pi,\pi], \quad n = 1,2,3,\dots,$$

– n-й функционал Дирихле, Φ – множество, состоящее из единичного функционала – дельта-функции δ_0 точки $t = 0$.

В силу очевидной линейной изометрии, пространство Y можно трактовать как пространство $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Тогда ([2], с. 16) множество (1.1) является $(K^*, \{\delta_0\})$-коровкинским для Y и, следовательно, – $(K^*, \{\delta_0\})$-тестовым для Y.

Известно, что значение n-го функционала Дирихле $d_n(x)$ на тригонометрическом полиноме порядка $\leqslant n$ совпадает со значением этого полинома в точке $t = 0$. В частности $d_n(x) = x(0)$ для каждой функции x из множества (1.1), т.е. $d_n(x) = \delta_0(x)$, $x \in X$. Но тем не менее $\|d_n\| \to \infty$, при $n \to \infty$, поскольку (см., например, [2], с. 166)

$$\|d_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin((2n+1)/2)t}{2\sin(t/2)}\right|dt = \frac{4}{\pi^2}\cdot\ln n + c_n, \quad |c_n| < c,$$

и потому последовательность функционалов Дирихле $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ не может сходиться на каждом элементе $y \in Y$ к $y(0)$.

Таким образом, множество (1.1) в пространстве $C[-\pi,\pi]$ является $(K^* \cup (d_n)_{n=1}^{\infty},\ \{\delta_0\})$-тестовым для Y, но не является $(K^* \cup (d_n)_{n=1}^{\infty},\ \{\delta_0\})$-коровкинским для Y.

В связи с понятием (F,Φ)-тестового множества для множества Y возникают две в определенном смысле взаимнообратные задачи:

Задача 1. Для заданных множеств Y, F и Φ найти условия на множество X (по возможности минимальной мощности), необходимые и/или достаточные для того, чтобы оно было (F,Φ)-тестовым для множества Y.

Задача 2. Для заданных множеств X, F и Φ найти необходимые и/или достаточные условия на (по возможности максимальное) множество Y, для которого множество X является (F,Φ)-тестовым.

Аналогичные задачи формулируются и для коровкинских множеств.

Из многочисленных публикаций, содержащих решения задачи 1 для различных E, X, Y, F и Φ, отметим работы [2, 7–17] (относительно коровкинских множеств) и [8, 9, 18–21] (относительно тестовых множеств), в которых результаты для случая функционалов сформулированы в явном виде.

Задача 2 относительно коровкинских множеств для случая линейных положительных операторов в пространстве $C[a,b]$ впервые была решена в 1961 г. независимо В. А. Баскаковым [22] и Г. Бауэром [23]. Затем она рассматривалась в работах [24–26]. Для более детального представления о результатах, связанных с задачей 2, в различных пространствах см. [5].

В данной статье доказываются теоремы, дающие решение задачи 2 в общем банаховом пространстве для линейных произвольных и положительных функционалов. Основные из полученных результатов для произвольных линейных функционалов анонсированы в [27], а для положительных – в [28].

2. Формулировка результатов

С целью удовлетворения требования максимальности (по включению) множества Y в решении задачи 2 дадим следующее

Определение 2.1. *Множество всех точек (F,Φ)-тестового ((F,Φ)-коровкинского) прикосновения множества X будем называть (F,Φ)-тестовым ((F,Φ)-коровкинским) замыканием множества X и обозначать $\langle (F,\Phi) - T \rangle [X]$ ($\langle (F,\Phi) - K \rangle [X]$).*

Таким образом, (F,Φ)-тестовое ((F,Φ)-коровкинское) замыкание множества X представляет собой максимальное множество Y, для которого множество X является (F,Φ)-тестовым ((F,Φ)-коровкинским).

Замечание 2.1. Очевидно, что (F,Φ)-коровкинское замыкание множества X является подмножеством (F,Φ)-тестового замыкания множества X. Поэтому элементы (F,Φ)-коровкинского замыкания множества X обладают всеми свойствами элементов (F,Φ)-тестового замыкания множества X. В некоторых случаях (F,Φ)-коровкинское и (F,Φ)-тестовое замыкания множества X совпадают. Это будет иметь место, например, в случае ограниченности множества F.

Мы хотим описать тестовые замыкания на языке другого более простого типа замыканий. Введем необходимые определения.

Определение 2.2. *Множество X назовем отличающим сужения на множество Y функционалов из множества F от сужений на множество Y функционалов из множества Φ, короче – $\{F,\Phi\}$-отличающим для множества Y, если для любой пары функционалов $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$ из равенства их сужений на множество X следует равенство их сужений на множество Y : $(f|X = \varphi|X) \Rightarrow (f|Y = \varphi|Y)$.*

Если $Y = E$, то $\{F,\Phi\}$-отличающее множество для Y называется просто $\{F,\Phi\}$-отличающим ([20, 6]).

Определение 2.3. *Если множество X является $\{F,\Phi\}$-отличающим для Y, то каждый элемент множества Y назовем точкой $\{F,\Phi\}$-отличающего прикосновения множества X.*

Определение 2.4. *Множество всех точек $\{F,\Phi\}$-отличающего прикосновения множества X будем называть $\{F,\Phi\}$-отличающим замыканием множества X и обозначать $\langle \{F,\Phi\} - O \rangle [X]$.*

Множество $\langle \{F,\Phi\} - O \rangle [X]$ является максимальным множеством Y, для которого множество X является $\{F,\Phi\}$-отличающим.

Отличающие замыкания обладают следующими свойствами.

Предложение 2.1.

1) *Для любого действительного числа $\lambda \neq 0$ и любого функционала $\psi \in E^*$ справедливы равенства*

$$\langle \{F,\Phi\} - O \rangle [X] = \langle \{\lambda F, \lambda\Phi\} - O \rangle [X] =$$
$$\langle \{F+\psi, \Phi+\psi\} - O \rangle [X] = \langle \{F-\Phi, \{\Theta\}\} - O \rangle [X],$$

где $\lambda F = \{\lambda f : f \in F\}$, $F+\psi = \{f+\psi : f \in F\}$, $F-\Phi = \{f-\varphi : f \in F, \varphi \in \Phi\}$, Θ – нулевой функционал.

2) *Для любых непустых множеств $X \subset X_1$ $(\subset E)$, $F_1 \subset F$, $\Phi_1 \subset \Phi$ справедливо включение $\langle \{F,\Phi\} - O \rangle [X] \subset \langle \{F_1,\Phi_1\} - O \rangle [X_1]$.*

Понятие отличающего замыкания связано с понятием линейной независимости подмножеств пространства E^* на подмножествах пространства E. Напомним, что множество $\Psi \subset E^*$ называют линейно независимым на множестве X, если для произвольного натурального числа k, не превосходящего мощности $|\Psi|$ множества Ψ, и k произвольных различных функционалов $\{\psi_i\}_{i=1}^k \subset \Psi$ из равенства $\sum_{i=1}^k \lambda_i \psi_i(x) = 0$, $x \in X$, следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. В случае $X = E$ это определение превращается в определение линейно независимого множества Ψ. Множество Ψ, линейно независимое на X, линейно независимо на любом надмножестве $Y \supset X$, в частности линейно независимо. Обратно не верно. Однако имеет место

Предложение 2.2. *Для того чтобы множество $\Psi \subset E^*$ было линейно независимым на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы множество Ψ было линейно независимым на некотором надмножестве $Y \supset X$, являющимся подмножеством $\{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\}$-отличающего замыкания множества X.*

Следствие 2.1. *Для того чтобы множество $\Psi \subset E^*$ было линейно независимым на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы множество Ψ было линейно независимым на $\{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\}$-отличающем замыкании множества X.*

Следствие 2.2. *Для того чтобы множество $\Psi \subset E^*$ было линейно независимым на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы множество Ψ было линейно независимым и чтобы $\{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\}$-отличающее замыкание множества X совпадало со всем пространством E: $\{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\} - O\,\rangle\,[X] = E$.*

Относительно структуры тестовых, коровкинских и отличающих замыканий имеет место

Предложение 2.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *(F, Φ)-тестовое и $\{F, \Phi\}$-отличающее замыкания множества X являются банаховыми, а (F, Φ)-коровкинское замыкание множества X – линейным нормированным подпространствами пространства E.*

2) *Замыкание $\overline{\operatorname{lin} X}$ линейной оболочки $\operatorname{lin} X$ множества X по норме пространства E является банаховым подпространством (F, Φ)-тестового и $\{F, \Phi\}$-отличающего замыканий множества X, а $\operatorname{lin} X$ является линейным нормированным подпространством (F, Φ)-коровкинского замыкания множества X.*

Понятие отличающего замыкания проще понятия тестового (коровкинского) замыкания в том смысле, что определение отличающего замыкания, в отличие от определения тестового (коровкинского) замыкания, не содержит операции предельного перехода. Поэтому описание тестового замыкания в терминах отличающего замыкания представляется целесообразным.

Пусть $\overline{F}^{\mathcal{W}}$ и $\overline{F}^{S}$ – соответственно замыкание и секвенциальное замыкание множества F в $*$-слабой топологии.

Элементы тестового замыкания обладают следующим свойством:

Предложение 2.4. *Для того чтобы элемент пространства E принадлежал (F,Φ)-тестовому замыканию множества X, необходимо, чтобы он принадлежал $\{\overline{F}^{S},\Phi\}$-отличающему замыканию множества X, т.е.*

$$\langle\, (F,\Phi) - T \,\rangle\, [X] \subset \langle\, \{\overline{F}^{S},\Phi\} - O \,\rangle\, [X]. \tag{2.1}$$

Если левая часть включения (2.1) совпадает с E, то из предложения 2.4 получаем лемму 1 из [20].

В силу замечания 2.1, (F,Φ)-тестовое замыкание множества X в формулировке предложения 2.4 можно заменить его (F,Φ)-коровкинским замыканием.

Признак элементов тестового замыкания можно сформулировать следующим образом.

Предложение 2.5. *Для того чтобы элемент пространства E принадлежал (F,Φ)-тестовому замыканию множества X, достаточно, чтобы он принадлежал $\{\overline{F}^{\mathcal{W}},\Phi\}$-отличающему замыканию множества X, т.е.*

$$\langle\, \{\overline{F}^{\mathcal{W}},\Phi\} - O \,\rangle\, [X] \subset \langle\, (F,\Phi) - T \,\rangle\, [X]. \tag{2.2}$$

Если левая часть включения (2.2) совпадает с E, то из предложения 2.5 следует лемма 2 из [20].

Замечание 2.2. В предложении 2.5 множество $\overline{F}^{\mathcal{W}}$ можно заменить на F, получив эквивалентное предложение.

Критерий элементов тестового замыкания содержится в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Если множество F замкнуто в $*$-слабой топологии, то для того чтобы элемент пространства E принадлежал (F,Φ)-тестовому замыканию множества X, необходимо и достаточно,* *чтобы он принадлежал* $\{F,\Phi\}$*-отличающему замыканию множества* X, *т.е.*

$$\langle\,(F,\Phi)-T\,\rangle\,[X]=\langle\,\{F,\Phi\}-O\,\rangle\,[X]. \tag{2.3}$$

В частности при совпадении одной из частей равенства (2.3) с E из теоремы 2.1 следует предложение 2 из [20].

Из теоремы 2.1 в качестве следствия можно получить теорему Банаха–Штейнгауза в терминах тестовых замыканий.

Следствие 2.3. *Для того чтобы* (E^*,E^*)*-тестовое замыкание множества* X *совпадало со всем пространством* E, *необходимо и достаточно, чтобы множество* X *было фундаментальным (т.е., чтобы* $\overline{\operatorname{lin} X}=E$*)*

В следующей теореме тестовое замыкание объединения двух множеств характеризуется посредством отличающего замыкания одного из них.

Теорема 2.2. *Пусть* A, $B\subset E$ *– произвольные непустые множества,* $f_0\in E^*$, $\Pi(A,f_0)=\{f\in E^*: f|A=f_0|A\}=A^{\perp}+f_0$ *– плоскость в пространстве* E^*, *полученная сдвигом подпространства* $A^{\perp}=\{f\in E^*: f(x)=0,\ x\in A\}$ *на функционал* f_0, $\Phi\subset\Pi(A,f_0)$, F *замкнуто в* $*$*-слабой топологии и* $F\cap\Pi(A,f_0)\neq\varnothing$. *Для того чтобы элемент пространства* E *принадлежал* (F,Φ)*-тестовому замыканию объединения* $A\cup B$, *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал* $\{F\cap\Pi(A,f_0),\Phi\}$*-отличающему замыканию множества* B, *т.е.*

$$\langle\,(F,\Phi)-T\,\rangle\,[A\cup B]=\langle\,\{F\cap\Pi(A,f_0),\Phi\}-O\,\rangle\,[B]. \tag{2.4}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 эквивалентны.

В случае сепарабельного пространства E справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.3. *Для того чтобы элемент сепарабельного банахова пространства* E *принадлежал* (F,Φ)*-тестовому замыканию множества* X, *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал* $\{\overline{F}^{\,S},\Phi\}$*-отличающему замыканию множества* X, *т.е.*

$$\langle\,(F,\Phi)-T\,\rangle\,[X]=\langle\,\{\overline{F}^{\,S},\Phi\}-O\,\rangle\,[X]. \tag{2.5}$$

Теорема 2.4. *Пусть E – сепарабельное банахово пространство, A, $B \subset E$ – произвольные непустые множества, $f_0 \in E^*$, $\Phi \subset \Pi(A, f_0)$ и $F \cap \Pi(A, f_0) \neq \varnothing$. Для того чтобы элемент пространства E принадлежал (F, Φ)-тестовому замыканию объединения $A \cup B$, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал $\{\overline{F}^S \cap \Pi(A, f_0), \Phi\}$-отличающему замыканию множества B, т.е.*

$$\langle (F, \Phi) - T \rangle [A \cup B] = \langle \{\overline{F}^S \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O \rangle [B]. \tag{2.6}$$

При совпадении одной из частей каждого из равенств (2.5) и (2.6) со всем пространством E теоремы 2.3 и 2.4 превращаются соответственно в предложения 4 и 3, отмеченные в [20].

Теоремы 2.3 и 2.4 эквивалентны.

Замечание 2.3. Если в теоремах 2.3 и 2.4 потребовать секвенциальную замкнутость множества F в $*$-слабой топологии, то в их формулировках $\overline{F}^S$ можно заменить на F, получив, таким образом, для сепарабельного пространства E полные аналоги соответственно теорем 2.1 и 2.2.

Можно сформулировать следующий признак элементов тестового замыкания.

Теорема 2.5. *Пусть A, $B \subset E$ – произвольные непустые множества, $f_0 \in E^*$, F замкнуто в $*$-слабой топологии и $F \cap \Pi(A, f_0) \neq \varnothing$. Пусть $\Psi \subset E^*$ – множество, обладающее следующими свойствами: 1) $F \cap \Pi(A, f_0) \subset \Psi$ и 2) $\Psi - \Psi \subset \Psi$. Для того чтобы элемент пространства E принадлежал $(F, F \cap \Pi(A, f_0))$-тестовому замыканию объединения $A \cup B$, достаточно, чтобы он принадлежал $\{\Psi, \{\Theta\}\}$-отличающему замыканию множества B, т.е.*

$$\langle \{\Psi, \{\Theta\}\} - O \rangle [B] \subset \langle (F, F \cap \Pi(A, f_0)) - T \rangle [A \cup B].$$

Замечание 2.4. Наименьшим по включению множеством Ψ, обладающим свойствами 1) и 2), является “целая” оболочка $\mathrm{in}(F \cap \Pi(A, f_0))$ множества $F \cap \Pi(A, f_0)$, т.е. совокупность всех конечных линейных комбинаций функционалов пересечения $F \cap \Pi(A, f_0)$ с целыми коэффициентами. Поэтому, в силу утверждения 2 предложения 2.1, наиболее сильной из теорем 2.5 со всевозможными множествами Ψ, обладающими свойствами 1) и 2), будет та, в которой $\Psi = \text{in}\,(F \cap \Pi(A, f_0))$. Так как $\text{lin}\,(F \cap \Pi(A, f_0))$ обладает свойствами 1) и 2), то в теореме 2.5 также можно положить $\Psi = \text{lin}\,(F \cap \Pi(A, f_0))$.

Из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.4. *Пусть A, $B \subset E$ – произвольные непустые множества, $f_0 \in E^*$, F замкнуто в $*$-слабой топологии, множество $V \subset E^*$ линейно независимо на множестве B и $\text{lin}\, V \supset F \cap \Pi(A, f_0) \neq \varnothing$. Тогда $(F, F \cap \Pi(A, f_0))$-тестовое замыкание объединения $A \cup B$ совпадает со всем пространством E, т.е.*

$$\langle\, (F, F \cap \Pi(A, f_0)) - T\,\rangle\,[A \cup B] = E.$$

Близкое к следствию 2.4 предложение доказано в [21] ([21], предложение 3).

Для случая конечного множества B достаточные условия совпадения тестового замыкания со всем пространством E детализируются следующим образом.

Следствие 2.5. *Пусть $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, F замкнуто в $*$-слабой топологии, $\dim \text{lin}\,(F \cap \Pi(A, f_0)) = m \in \mathbf{N}$, элементы множества $B = \{x_j\}_{j=1}^m \subset E$ удовлетворяют условию $\det(\psi_i(x_j))_{i,j=1}^m \neq 0$ для некоторого множества функционалов $V = \{\psi_i\}_{i=1}^m \subset \text{lin}\,(F \cap \Pi(A, f_0))$. Тогда $(F,\, F \cap \Pi(A, f_0))$-тестовое замыкание объединения $A \cup B$ совпадает со всем пространством E.*

(Сравните с предложением 2 из [21]).

Для множества $X \subset E$, элемента $x_0 \in E$, функционала $\varphi \in E^*$ и числа r определим на объединении $X \cup \{x_0\}$ функционал $\omega_{X,x_0,\varphi,r} : (X \cup \{x_0\}) \to \mathbf{R}$, совпадающий с функционалом φ на множестве X и равный r на элементе x_0. Если $r = \varphi(x_0)$, то $\omega_{X,x_0,\varphi,r}$ представляет собой сужение функционала φ на объединение $X \cup \{x_0\}$. В частности, если $x_0 \in X$ (и тогда $r = \varphi(x_0)$), то $\omega_{X,x_0,\varphi,r}$ есть сужение функционала φ на множество X.

В терминах функционала $\omega_{X,x_0,\varphi,r}$ можно дать еще один признак принадлежности элемента x_0 тестовому замыканию.

Теорема 2.6. *Пусть $x_0 \in E$, F замкнуто в $*$-слабой топологии и $D(X \cup \{x_0\})$ – некоторое множество функционалов, определенных на объединении $X \cup \{x_0\}$, включающее в себя множество $F \mid (X \cup \{x_0\}) = \{f \mid (X \cup \{x_0\}) : f \in F\}$ сужений $f \mid (X \cup \{x_0\})$*

на $X \cup \{x_0\}$ *всех функционалов* f *из* F. *Если для каждого функционала* $\varphi \in \Phi$ *функционал* $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$ *является среди функционалов множества* $\{\omega_{X,x_0,\varphi,r} : r \in \mathbf{R}\}$ *единственным, принадлежащим множеству* $D(X \cup \{x_0\})$, *то элемент* x_0 *принадлежит* (F,Φ)*-тестовому замыканию множества* X.

В сформулированных результатах множество F составлено из произвольных линейных функционалов. Перейдем к случаю, когда F – множество линейных положительных функционалов.

Множество K в действительном банаховом пространстве E называется конусом, если оно замкнуто, $\lambda K + \mu K \subset K$ для любых чисел $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ и $K \cap (-K) = \{\vartheta\}$, где ϑ здесь и далее – нуль пространства E. Функционал $f \in E^*$ называется положительным (относительно конуса K), если $f(x) \geqslant 0$, $x \in K$. Множество всех линейных положительных функционалов обозначают через K^*. Очевидно, что множество K^* замкнуто в $*$-слабой топологии. Поэтому сохраняется справедливость теорем 2.1, 2.2, 2.5, 2.6 и следствий 2.4, 2.5, если в их формулировке положить $F = K^*$ и снять требование замкнутости F в $*$-слабой топологии, а также теорем 2.3, 2.4 и предложений 2.4, 2.5 при замене в них $\overline{F}^S$ на K^*.

Для формулировки дальнейших теорем нам понадобится следующее распространение понятия положительности на функционалы, заданные только на множестве X.

Определение 2.5. *Функционал* $\omega : X \to \mathbf{R}$ *назовем позитивным относительно множества* X, *если для любого элемента* $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k \in K$, *где* $m \in \mathbf{N}$, $a_k \in \mathbf{R}$, $x_k \in X$, $k = 1, \ldots, m$, *имеем* $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \omega(x_k) \geqslant 0$.

Это определение в случае, когда $E = C[a,b]$, K – конус неотрицательных функций, $X = \{x_k\}_{k=1}^m$ – конечная система функций $x_k \in C[a,b]$, превращается в определение М. Г. Крейна позитивной последовательности $\{\omega_k = \omega(x_k)\}_{k=1}^m$ относительно системы $\{x_k\}_{k=1}^m$ ([29]). Конечные позитивные последовательности использовались также в [22].

Совокупность всех позитивных функционалов относительно множества X обозначим через $P(X)$. Сужение на множество X линейного положительного функционала является позитивным функционалом относительно X, т.е. $K^*|X \subset P(X)$.

Обозначим через $\overset{0}{K}$ – внутренность конуса K. Если внутренность конуса не пуста, то конус называется телесным.

В следующей теореме формулируется критерий элементов (K^*, Φ)-тестового замыкания.

Теорема 2.7. *Для того чтобы элемент x_0 пространства E принадлежал (K^*, Φ)-тестовому замыканию множества X, достаточно, а если объединение $X \cup \{x_0\}$ линейно независимо,*

$$\overset{0}{K} \cap \operatorname{lin}(X \cup \{x_0\}) \neq \varnothing, \tag{2.7}$$

$$\Phi \mid (X \cup \{x_0\}) \subset P(X \cup \{x_0\}), \tag{2.8}$$

то и необходимо, чтобы для каждого функционала $\varphi \in \Phi$ функционал $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$ был среди функционалов множества $\{\omega_{X,x_0,\varphi,r} : r \in \mathbf{R}\}$ единственным позитивным относительно объединения $X \cup \{x_0\}$.

Определение 2.6. *Элемент $x_0 \in E$ назовем X-измеримым, если для него найдутся два элемента $\underline{x}_0$, $\overline{x}_0 \in \operatorname{lin} X$ такие, что $x_0 - \underline{x}_0$, $\overline{x}_0 - x_0 \in K$.*

Для множества X, состоящего из единственного элемента, принадлежащего конусу K, эквивалентное определение X-измеримого элемента было дано М. А. Красносельским ([30], с. 17).

Множество всех X-измеримых элементов обозначим через E_X.

Если $x_0 \in E_X$ и $\varphi \in K^*$, то существуют и конечны величины

$$\underline{\gamma}_{\varphi}(x_0) = \sup \{\varphi(\underline{x}_0) : \underline{x}_0 \in \operatorname{lin} X, \quad x_0 - \underline{x}_0 \in K\}, \tag{2.9}$$

$$\overline{\gamma}_{\varphi}(x_0) = \inf \{\varphi(\overline{x}_0) : \overline{x}_0 \in \operatorname{lin} X, \quad \overline{x}_0 - x_0 \in K\}, \tag{2.10}$$

удовлетворяющие двойному неравенству

$$\underline{\gamma}_{\varphi}(x_0) \leqslant \varphi(x_0) \leqslant \overline{\gamma}_{\varphi}(x_0). \tag{2.11}$$

Предложение 2.6. *Пусть $x_0 \in E_X$ и $\varphi \in K^*$. Для того чтобы функционал $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$ был среди функционалов множества $\{\omega_{X,x_0,\varphi,r} : r \in \mathbf{R}\}$ единственным позитивным относительно объединения $X \cup \{x_0\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\underline{\gamma}_{\varphi}(x_0) = \overline{\gamma}_{\varphi}(x_0). \tag{2.12}$$

Теорема 2.8. *Пусть $\Phi \subset K^*$. Для того чтобы X-измеримый элемент x_0 принадлежал (K^*, Φ)-тестовому замыканию множества X, достаточно, а если объединение $X \cup \{x_0\}$ линейно независимо и выполняется условие* (2.7), *то и необходимо, чтобы для каждого функционала $\varphi \in \Phi$ выполнялось равенство* (2.12).

В теореме 2.8 необходимые и достаточные условия принадлежности (K^*, Φ)-тестовому замыканию множества X сформулированы только для X-измеримых элементов. В связи с этим возникает вопрос об обширности множества E_X всех X-измеримых элементов. Справедливо следующее

Предложение 2.7. *Для того чтобы каждый элемент пространства E с телесным конусом K был X-измеримым, т.е. чтобы $E_X = E$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X \neq \varnothing. \tag{2.13}$$

Теорема 2.9. *Если справедливо* (2.13) *и $\Phi \subset K^*$, то для принадлежности элемента $x_0 \in E$ (K^*, Φ)-тестовому замыканию множества X достаточно, а при условии линейной независимости объединения $X \cup \{x_0\}$ и необходимо, чтобы для каждого функционала $\varphi \in \Phi$ выполнялось равенство* (2.12).

Теорема 2.10. *При выполнении условия* (2.13) *(K^*, Φ)-тестовое и (K^*, Φ)-коровкинское замыкания множества X совпадают:*

$$\langle\, (K^*, \Phi) - T \,\rangle\, [X] = \langle\, (K^*, \Phi) - K \,\rangle\, [X]. \tag{2.14}$$

Если одна из частей равенства (2.14) совпадает со всем пространством E, то теорема 2.10 превращается в теорему 6 из [6].

Предложение 2.8. *Каждое из следующих условий эквивалентно условию* (2.13)*:*

$$\overset{0}{K} \cap \overline{\operatorname{lin} X} \neq \varnothing, \tag{2.15}$$

$$\overset{0}{K} \cap \langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X] \neq \varnothing. \tag{2.16}$$

Частный случай предложения 2.8, когда $\langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X] = E$, отмечен в [6].

Теорема 2.11. *Если*

$$\overset{0}{K} \cap \langle (K^*, \Phi) - T \rangle [X] \neq \varnothing, \tag{2.17}$$

$$K^* \cap \Phi \neq \varnothing, \tag{2.18}$$

то (K^*, Φ)-тестовое и (K^*, Φ)-коровкинское замыкания множества X совпадают.

Если $\langle (K^*, \Phi) - T \rangle [X] = E$, то из теоремы 2.11 следует теорема 8 из [6].

Замечание 2.5. Условие (2.17) следует из условия (2.13).

Теоремы 2.10 и 2.11 относятся к случаю телесного конуса K. Можно сформулировать условия на не обязательно телесный конус, при которых утверждение этих теорем останется в силе. Предварительно напомним определения используемых нами понятий. Конус K порождает в пространстве E частичную упорядоченность: $x \leqslant y$ $(x, y \in E)$ тогда и только тогда, когда $y - x \in K$. Элемент $z \in E$ называют верхней гранью для двух элементов x и y из E и обозначают $z = \sup\{x, y\}$, если $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ и из неравенств $x \leqslant z_1$, $y \leqslant z_1$ следует неравенство $z \leqslant z_1$. Если для каждой пары элементов x, $y \in E$ существует $\sup\{x, y\}$, то конус K называют миниэдральным ([30], с. 48). Норму $\|\cdot\|$ пространства E с миниэдральным конусом K называют монотонной ([31], с. 192), если для любой пары элементов x, $y \in E$ из неравенства $|x| \leqslant |y|$ вытекает неравенство $\|x\| \leqslant \|y\|$. Элемент z называют ([31], с. 20) наибольшим элементов множества G, если $z \in G$ и $x \leqslant z$ для любого элемента $x \in G$. Пусть S – единичная замкнутая сфера в E с центром в начале ϑ.

Теорема 2.12. *Если норма пространства E монотонна по отношению к частичной упорядоченности, порожденной миниэдральным конусом K, и существует наибольший элемент положительной части единичной сферы $K \cap S$, принадлежащий (K^*, Φ)-коровкинскому замыканию множества X, то (K^*, Φ)-тестовое и (K^*, Φ)-коровкинское замыкания множества X совпадают.*

3. Доказательства результатов

Доказательство предложения 2.1 очевидно на основании определения 2.4. $\bullet$

Доказательство предложения 2.2. Необходимость. Пусть $Y \supset X$ – произвольное надмножество множества X. Тогда из линейной независимости Ψ на X следует линейная независимость Ψ на Y. Пусть $\psi \in \operatorname{lin}\Psi$ и $\psi|X = \Theta|X$. Тогда найдутся число $k \in \mathbf{N}$, линейно независимые функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Psi$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ такие, что $\psi = \lambda_1\psi_1 + \ldots + \lambda_k\psi_k$ и, следовательно, $\lambda_1\psi_1(x) + \ldots + \lambda_k\psi_k(x) = 0$, $x \in X$. Отсюда, в силу линейной независимости Ψ на X, получаем, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Следовательно, $\psi = \Theta$. В частности $\psi|Y = \Theta|Y$. А это означает, что $Y \subset \langle\, \{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\} - O\,\rangle\, [X]$.

Достаточность. Пусть $k \in \mathbf{N}$, $k \leqslant |\Psi|$, $\psi_1, \ldots, \psi_k$ – различные функционалы из Ψ и $\lambda_1\psi_1(x) + \ldots + \lambda_k\psi_k(x) = 0$, $x \in X$. Таким образом, $\psi|X = \Theta|X$, где $\psi = \lambda_1\psi_1 + \ldots + \lambda_k\psi_k \in \operatorname{lin}\Psi$. Тогда, в силу включения $Y \subset \langle\, \{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\} - O\,\rangle\, [X]$, имеем: $\psi|Y = \Theta|Y$, т.е. $\lambda_1\psi_1(x) + \ldots + \lambda_k\psi_k(x) = 0$, $x \in Y$. Отсюда, в силу линейной независимости Ψ на Y, получаем: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. $\bullet$

Следствия 2.1 и 2.2 вытекают из предложения 2.2 соответственно при $Y = \langle\, \{\operatorname{lin}\Psi, \{\Theta\}\} - O\,\rangle\, [X]$ и $Y = E$. $\bullet$

Предложение 2.3 нетрудно доказывается с использованием определений 2.1 и 2.4. $\bullet$

Доказательство предложения 2.4. Пусть $x_0 \in \langle\, (F, \Phi) - T\,\rangle\, [X]$, $f \in \overline{F}^{\,S}$, $\varphi \in \Phi$ и

$$f|X = \varphi|X. \tag{3.1}$$

Из принадлежности $f \in \overline{F}^{\,S}$ следует существование последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, слабо сходящейся к f. Тогда нормы $(\|f_n\|)_{n=1}^{\infty}$ ограничены в совокупности и, в силу (3.1), последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к φ на X. Отсюда и из принадлежности $x_0 \in \langle\, (F, \Phi) - T\,\rangle\, [X]$ получим: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$. Следовательно, $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, $x_0 \in \langle\, \{\overline{F}^{\,S}, \Phi\} - O\,\rangle\, [X]$. $\bullet$

Доказательство предложения 2.5. Допустим противное. Тогда найдется элемент x_0 такой, что

$$x_0 \in \langle\, \{\overline{F}^{\,\mathcal{W}}, \Phi\} - O\,\rangle\, [X], \tag{3.2}$$

но $x_0 \notin \langle\, (F, \Phi) - T\,\rangle\, [X]$. Последнее означает существование последовательности функционалов $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, $\|f_n\| \leqslant c$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, и функционала $\varphi \in \Phi$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$,

$x \in X$, но числовая последовательность $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ не сходится к числу $\varphi(x_0)$.

В силу ограниченности норм $\|f\|_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, последовательность $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ ограничена и потому обладает сходящимися подпоследовательностями, хотя бы одна из которых – обозначим ее через $(f_{n_k}(x_0))_{k=1}^{\infty}$ – такова, что

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) \neq \varphi(x_0). \tag{3.3}$$

Так как E – банахово пространство, то, по теореме Банаха–Алаоглу ([32], с. 50), шар $B_c^* = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant c\}$ в пространстве E^* с центром в начале Θ и радиуса c компактен в $*$-слабой топологии. Тогда, так как $(f_{n_k}(x_0))_{k=1}^{\infty} \subset B_c^*$, существует функционал $\psi \in E^*$, являющийся предельной в $*$-слабой топологии точкой последовательности $(f_{n_k}(x_0))_{k=1}^{\infty}$. В силу включения $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, имеем

$$\psi \in \overline{F}^{\mathcal{W}}, \tag{3.4}$$

а в силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$, $x \in X$, имеем

$$\psi|X = \varphi|X. \tag{3.5}$$

Очевидно также, что

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \psi(x_0). \tag{3.6}$$

Так как имеет место (3.2), то из (3.4), принадлежности $\varphi \in \Phi$ и (3.5) вытекает, что $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$ и, следовательно, из (3.6) получаем равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0)$, противоречащее (3.3). •

Доказательство замечания 2.2. В формулировке предложения 2.5 множество F можно, в силу его произвольности, заменить на $\overline{F}^{\mathcal{W}}$. Полученное предложение будет эквивалентно предложению 2.5, поскольку из включения $F \subset \overline{F}^{\mathcal{W}}$, по определению тестового замыкания, следует включение $\langle\, (\overline{F}^{\mathcal{W}}, \Phi) - T \,\rangle\, [X] \subset \langle\, (F, \Phi) - T \,\rangle\, [X]$. •

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Так как $F \subset \overline{F}^{S} \subset \overline{F}^{\mathcal{W}}$, а в силу замкнутости множества F в $*$-слабой топологии, $F = \overline{F}^{\mathcal{W}}$, то $F = \overline{F}^{S}$ и остается сослаться на предложение 2.4.

Достаточность следует из равенства $F = \overline{F}^{\mathcal{W}}$ и предложения 2.5 •

Доказательство следствия 2.3. Фундаментальность множества X эквивалентна ([32], с. 43) тому, что X является $\{E^*, \{\Theta\}\}$-отличающим (для всего пространства E), т.е. что $\{E^*, \{\Theta\}\}$-отличающее замыкание множества X совпадает со всем пространством E. Но $E^* = E^* - E^*$ и потому, по утверждению 1) предложения 2.1, $\langle\{E^*, E^*\} - O\rangle[X] = \langle\{E^* - E^*, \{\Theta\}\} - O\rangle[X] = \langle\{E^*, \{\Theta\}\} - O\rangle[X] = E$. Для завершения доказательства следствия остается применить теорему 2.1 при $F = \Phi = E^*$. •

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $x_0 \in \langle(F, \Phi) - T\rangle[A \cup B]$. Тогда, по теореме 2.1 при $X = A \cup B$, имеем $x_0 \in \langle\{F, \Phi\} - O\rangle$ $[A \cup B]$. Отсюда, в силу утверждения 2) предложения 2.1,

$$x_0 \in \langle\{F \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O\rangle[A \cup B]. \tag{3.7}$$

Покажем, что из (3.7) следует принадлежность

$$x_0 \in \langle\{F \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O\rangle[B]. \tag{3.8}$$

Действительно, пусть $f \in F \cap \Pi(A, f_0)$, $\varphi \in \Phi$ и $f|B = \varphi|B$. Из принадлежности $f \in F \cap \Pi(A, f_0)$ следует, что $f \in \Pi(A, f_0)$, а из принадлежности $\varphi \in \Phi$ и включения $\Phi \subset \Pi(A, f_0)$ следует, что и $\varphi \in \Pi(A, f_0)$. Следовательно, $f|A = \varphi|A$. Но так как также и $f|B = \varphi|B$, то $f|(A \cup B) = \varphi|(A \cup B)$. Тогда из (3.7) получаем $f(x_0) = \varphi(x_0)$ и (3.8) доказано. Таким образом, мы доказали включение $\langle(F, \Phi) - T\rangle[A \cup B] \subset \langle\{F \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O\rangle[B]$. Для доказательства равенства (2.4) остается доказать обратное включение. Пусть $x_0 \in \langle\{F \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O\rangle[B]$. Тогда, по утверждению 2) предложения 2.1,

$$x_0 \in \langle\{F \cap \Pi(A, f_0), \Phi\} - O\rangle[A \cup B]. \tag{3.9}$$

Пусть $f \in F$, $\varphi \in \Phi$ и $f|(A \cup B) = \varphi|(A \cup B)$. Из того, что $\varphi \in \Phi$ и $\Phi \subset \Pi(A, f_0)$ следует, что $\varphi \in \Pi(A, f_0)$, т.е. $\varphi|A = f_0|A$. Но из равенства $f|(A \cup B) = \varphi|(A \cup B)$ следует в частности, что $f|A = \varphi|A$. Значит, $f|A = f_0|A$, т.е. $f \in \Pi(A, f_0)$. Итак, имеем: $f \in F \cap \Pi(A, f_0)$, $\varphi \in \Phi$ и $f|(A \cup B) = \varphi|(A \cup B)$. Отсюда, в силу (3.9), $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Следовательно, $x_0 \in \langle\{F, \Phi\} - O\rangle[A \cup B]$. Но, по теореме 2.1 при $X = A \cup B$, $\langle\{F, \Phi\} - O\rangle[A \cup B] = \langle(F, \Phi) - T\rangle[A \cup B]$ и потому $x_0 \in \langle(F, \Phi) - T\rangle[A \cup B]$. •

В доказательстве теоремы 2.2 мы фактически показали, что теорема 2.2 является следствием теоремы 2.1. На самом деле справедливо и обратное. Действительно, положим в теореме 2.2 $A = \{\vartheta\}$ и $B = X$. Тогда $\Pi(A, f_0) = \{f \in E^* : f(\vartheta) = f_0(\vartheta) = 0\} = E^*$ и потому $\Phi \subset \Pi(A, f_0)$, $F \cap \Pi(A, f_0) = F \neq \varnothing$, а $\langle\, (F, \Phi) - T \,\rangle\, [A \cup B] = \langle\, (F, \Phi) - T \,\rangle\, [B] = \langle\, (F, \Phi) - T \,\rangle\, [X]$. В итоге получаем теорему 2.1. Таким образом, теоремы 2.1 и 2.2 эквивалентны. $\bullet$

Доказательство теоремы 2.3. Необходимость следует из предложения 2.4.

Достаточность доказывается так же как предложение 2.5 с той лишь разницей, что вместо теоремы Банаха–Алаоглу используется тот факт, что в пространстве E^*, сопряженном с сепарабельным банаховым пространством E, шар $B_c^* = \{f \in E^* : \|f\| \leqslant c\}$ секвенциально компактен в $*$-слабой топологии ([32], с. 50, теорема 2.10.1) (т.е. всякая последовательность функционалов из шара B_c^* содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому функционалу из B_c^*). $\bullet$

Доказательство теоремы 2.4. Справедливость теоремы 2.4 следует из ее эквивалентности теореме 2.3. Эквивалентность же этих теорем доказывается аналогично доказательству эквивалентности теорем 2.1 и 2.2. $\bullet$

Доказательство теоремы 2.5. По свойству 2) множества Ψ и утверждению 2) предложения 2.1,

$$\langle\, \{\Psi, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [B] \subset \langle\, \{\Psi - \Psi, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [B]. \tag{3.10}$$

По утверждению 1) предложения 2.1,

$$\langle\, \{\Psi - \Psi, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [B] = \langle\, \{\Psi, \Psi\} - O \,\rangle\, [B]. \tag{3.11}$$

По свойству 1) множества Ψ и утверждению 2) предложения 2.1,

$$\langle\, \{\Psi, \Psi\} - O \,\rangle\, [B] \subset \langle\, \{F \cap \Pi(A, f_0),\ F \cap \Pi(A, f_0)\} - O \,\rangle\, [B]. \tag{3.12}$$

По теореме 2.2 при $\Phi = F \cap \Pi(A, f_0)$, имеем:

$$\begin{aligned} &\langle\, \{F \cap \Pi(A, f_0),\ F \cap \Pi(A, f_0)\} - O \,\rangle\, [B] = \\ &\quad = \langle\, (F, F \cap \Pi(A, f_0)) - T \,\rangle\, [A \cup B]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.10)–(3.13) получаем требуемое. $\bullet$

Докажем замечание 2.4 в общем виде.

Пусть L – линейное пространство и Q – непустое множество в L, удовлетворяющее условию $Q - Q \subset Q$. Тогда множество Q обладает следующими свойствами:

a) Нулевой элемент $\vartheta \in Q$.

В самом деле, так как $Q \neq \varnothing$, то в Q найдется хотя бы один элемент q. Тогда $\vartheta = q - q \in Q - Q \subset Q$. •

b) $-Q \subset Q$.

Действительно, если $q \in Q$, то на основании свойства a), $-q = \vartheta - q \in Q - Q \subset Q$. •

c) $Q + Q \subset Q$.

В самом деле, если q_1, $q_2 \in Q$, то, в силу свойства b), $q_1 + q_2 = q_1 - (-q_2) \in Q - Q \subset Q$. •

d) $\mathbf{Z}Q \subset Q$, где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел.

Действительно, пусть $z \in \mathbf{Z}$ и $q \in Q$. Если $z = 0$, то, по свойству a), $zq = 0 \cdot q = \vartheta \in Q$. Если $z > 0$, то, по свойству c), $zq \in Q$. Если $z < 0$, то, по только что доказанному, $-zq \in Q$ и, следовательно, по свойству b), $zq = -(-zq) \in Q$. •

Предложение 2.9. *Пусть $P \subset L$ – непустое множество. Наименьшим по включению множеством Q со свойствами 1) $P \subset Q$ и 2) $Q - Q \subset Q$, является целая оболочка $\operatorname{in} P$ множества P.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $\operatorname{in} P$ обладает свойствами 1) и 2).

Теперь покажем, что если множество Q обладает свойствами 1) и 2), то $\operatorname{in} P \subset Q$. Пусть $q \in \operatorname{in} P$. Тогда найдутся $n \in \mathbf{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{Z}$ и $p_1, \ldots, p_n \in P$ такие, что $q = z_1 p_1 + \ldots + z_n p_n$. Так как $p_1, \ldots, p_n \in P$, то в силу свойства 1), $p_1, \ldots, p_n \in Q$. Но тогда, поскольку $z_1, \ldots, z_n$ – целые, по свойству d), $z_1 p_1, \ldots, z_n p_n \in Q$. Отсюда, по свойству c), $q = z_1 p_1 + \ldots + z_n p_n \in Q$. •

Доказательство следствия 2.4. Так как множество V линейно независимо на множестве B, то, по необходимой части следствия 2.2, $\langle \{\operatorname{lin} V, \{\Theta\}\} - O \rangle [B] = E$. Но тогда, по теореме 2.5, если в ней положить $\Psi = \operatorname{lin} V$, будем иметь $E \subset \langle (F, F \cap \Pi(A, f_0)) - T \rangle [A \cup B]$. •

Доказательство следствия 2.5. Условие $\det(\psi_i(x_j))_{i,j=1}^m \neq 0$ эквивалентно линейной независимости множества $V = \{\psi_i\}_{i=1}^m$ на множестве $B = \{x_j\}_{j=1}^m$. Но тогда множество $V = \{\psi_i\}_{i=1}^m$ линейно независимо и, следовательно, в силу условий $\dim \operatorname{lin}(F \cap$

$\Pi(A, f_0)) = m$ и $V = \{\psi_i\}_{i=1}^m \subset \mathrm{lin}\,(F \cap \Pi(A, f_0))$ имеет место включение $F \cap \Pi(A, f_0) \subset \mathrm{lin}\, V$. Таким образом, выполнены все условия следствия 2.4, на основании которого получаем утверждение следствия 2.5. •

Доказательство теоремы 2.6. Пусть $f \in F$, $\varphi \in \Phi$ и

$$f|X = \varphi|X. \tag{3.14}$$

Так как $\omega_{X,x_0,f,f(x_0)} = f|(X \cup x_0)$ и $f \in F$, то, по условию теоремы,

$$\omega_{X,x_0,f,f(x_0)} \in D(X \cup x_0). \tag{3.15}$$

В силу равенства (3.14), $\omega_{X,x_0,\varphi,f(x_0)} = \omega_{X,x_0,f,f(x_0)}$. Отсюда и из (3.15): $\omega_{X,x_0,\varphi,f(x_0)} \in D(X \cup x_0)$. Тогда, по условию теоремы, $\omega_{X,x_0,\varphi,f(x_0)} = \omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$. В частности, $\omega_{X,x_0,\varphi,f(x_0)}(x_0) = \omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}(x_0)$, т.е. $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Следовательно, $x_0 \in \langle\, \{F, \Phi\} - O \,\rangle\, [X]$, откуда, по теореме 2.1, $x_0 \in \langle\, (F, \Phi) - T \,\rangle\, [X]$. •

Доказательство теоремы 2.7. Необходимость. В силу включения (2.8) $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)} = \varphi|(X \cup \{x_0\}) \in P(X \cup \{x_0\})$.

Допустим существование числа

$$r_0 \neq \varphi(x_0) \tag{3.16}$$

такого, что

$$\omega_{X,x_0,\varphi,r_0} \in P(X \cup \{x_0\}). \tag{3.17}$$

Так как объединение $X \cup \{x_0\}$ линейно независимо, то каждый элемент $x \in \mathrm{lin}\,(X \cup \{x_0\})$ имеет единственное представление

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k, \tag{3.18}$$

где $m \in \mathbf{N}$, $a_k \in \mathbf{R}$, $x_k \in (X \cup \{x_0\})$, $k = 1, \ldots, m$, зависят от x.

Определим на пространстве $\mathrm{lin}\,(X \cup \{x_0\})$ соответствие ω следующим образом:

$$\mathrm{lin}\,(X \cup \{x_0\}) \ni x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \mapsto \omega(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k),$$

где $x_k \in (X \cup \{x_0\})$, $k = 1, \ldots, m$. В силу однозначности представления (3.18), соответственно ω будет функционалом. Нетрудно показать его аддитивность.

Из (2.7) следует, что $K_1 = K \cap \operatorname{lin}(X \cup \{x_0\})$ является телесной полугруппой в пространстве $\operatorname{lin}(X \cup \{x_0\})$ ([33], с. 10).

Функционал ω положителен относительно K_1. В самом деле, если $x \in K_1$, то $x \in \operatorname{lin}(X \cup \{x_0\})$ и, следовательно, имеет место представление (3.18). Но тогда, в силу принадлежности (3.17),

$$\omega(x) = \omega\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) \geqslant 0.$$

Из того, что K_1 – телесная полугруппа в пространстве $\operatorname{lin}(X \cup \{x_0\})$, ω – положительный относительно нее и аддитивный функционал, следует ([33], с. 10), что функционал ω однороден и непрерывен, т.е. $\omega \in (K_1)^*$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы М. Г. Крейна о расширении положительного функционала ([33], с. 11), по которой функционал ω можно продолжить до линейного положительного функционала f, определенного на всем пространстве E, т.е. существует функционал $f \in E^*$ такой, что

$$f \in K^* \tag{3.19}$$

$$f \mid \operatorname{lin}(X \cup \{x_0\}) = \omega. \tag{3.20}$$

Но так как $\omega|(X \cup \{x_0\}) = \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}$, то из (3.20):

$$f|(X \cup \{x_0\}) = \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}. \tag{3.21}$$

Поскольку, по определению, $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}|X = \varphi|X$, то из (3.21):

$$f|X = \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}|X = \varphi|X. \tag{3.22}$$

По условию теоремы, $x_0 \in \langle\, (K^*, \Phi) – T \,\rangle\, [X]$. Следовательно, по теореме 2.4 при $F = K^*$, $x_0 \in \langle\, \{K^*, \Phi\} – O \,\rangle\, [X]$. Отсюда, из (3.19), принадлежности $\varphi \in \Phi$ и (3.22) заключаем, что $f(x_0) = \varphi(x_0)$. Но из (3.21): $f(x_0) = \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_0) = r_0$. Следовательно, $r_0 = \varphi(x_0)$, что противоречит (3.16).

Достаточность. Очевидно $K^*|(X \cup \{x_0\}) \subset P(X \cup \{x_0\})$. Поэтому достаточность следует из теоремы 2.6, если в последней положить $F = K^*$ и $D(X \cup \{x_0\}) = P(X \cup \{x_0\})$. •

Пусть $x_0 \in E_X$ и $\varphi \in K^*$. Тогда, по определению 2.6, найдутся элементы $\underline{x}_0$, $\overline{x}_0 \in \operatorname{lin} X$ такие, что $x_0 - \underline{x}_0$, $\overline{x}_0 - x_0 \in K$ и, следовательно, $\varphi(x_0 - \underline{x}_0) \geqslant 0$ и $\varphi(\overline{x}_0 - x_0) \geqslant 0$, или

$$\varphi(\underline{x}_0) \leqslant \varphi(x_0) \leqslant \varphi(\overline{x}_0). \tag{3.23}$$

Поэтому числовые множества $\{\varphi(\underline{x}_0) : \underline{x}_0 \in \operatorname{lin} X,\ x_0 - \underline{x}_0 \in K\}$ и $\{\varphi(\overline{x}_0) : \overline{x}_0 \in \operatorname{lin} X,\ \overline{x}_0 - x_0 \in K\}$ не пусты, первое из них ограничено сверху, а второе снизу числом $\varphi(x_0)$. Следовательно, существуют и конечны величины $\underline{\gamma}_\varphi(x_0)$ и $\overline{\gamma}_\varphi(x_0)$, определяемые соответственно равенствами (2.9) и (2.10). Из (3.23) следует справедливость (2.11). •

Доказательство предложения 2.6. Достаточность. Так как $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)} = \varphi \mid (X \cup \{x_0\})$, а $\varphi \in K^*$, то $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)} \in P(X \cup \{x_0\})$. Теперь покажем, что $\omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$ – единственный функционал в пересечении $\{\omega_{X,x_0,\varphi,r} : r \in \mathbf{R}\} \cap P(X \cup \{x_0\})$. Допустим противное: существует число r_0 такое, что выполняются (3.16) и (3.17). Из (3.16) следует, что либо

$$r_0 < \varphi(x_0), \tag{3.24}$$

либо

$$r_0 > \varphi(x_0), \tag{3.25}$$

Рассмотрим случай (3.24). Так как $x_0 \in E_X$ и $\varphi \in K^*$, то справедливы неравенства (2.11). Тогда, в силу (3.24), правого неравенства (2.11) и (2.12), имеем: $r_0 < \varphi(x_0) \leqslant \overline{\gamma}_\varphi(x_0) = \underline{\gamma}_\varphi(x_0)$. Тогда, по определению $\underline{\gamma}_\varphi(x_0)$, найдется элемент

$$\underline{x}_0 \in \operatorname{lin} X \tag{3.26}$$

такой, что

$$x_0 - \underline{x}_0 \in K \tag{3.27}$$

и

$$r_0 < \varphi(\underline{x}_0). \tag{3.28}$$

Из (3.26) следует существование чисел $m \in \mathbf{N}$, $b_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, m$, и элементов $x_k \in X$, $k = 1, \dots, m$, таких, что $\underline{x}_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k x_k$. Стало быть,

$$x_0 - \underline{x}_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k x_k, \tag{3.29}$$

где $a_0 = 1$, $a_k = -b_k$, $k = 1, \dots, m$,

$$x_0, x_1, \dots, x_m \in (X \cup \{x_0\}). \tag{3.30}$$

Тогда, в силу определения функционала $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}$, линейности функционала φ и неравенства (3.28),

$$\sum_{k=0}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) = \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_0) - \sum_{k=1}^{m} b_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) =$$

$$= r_0 - \sum_{k=1}^{m} b_k\varphi(x_k) = r_0 - \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} b_k x_k\right) = r_0 - \varphi(\underline{x}_0) < 0.$$

Отсюда, из (3.29), (3.30) и (3.27) заключаем, что

$$\omega_{X,x_0,\varphi,r_0} \notin P(X \cup \{x_0\}). \tag{3.31}$$

Теперь рассмотрим случай (3.25). Из (3.25), левого неравенства (2.11) и (2.12) имеем: $r_0 > \varphi(x_0) \geqslant \underline{\gamma}_{\varphi}(x_0) = \overline{\gamma}_{\varphi}(x_0)$. Тогда, по определению $\overline{\gamma}_{\varphi}(x_0)$ найдется элемент

$$\overline{x}_0 \in \operatorname{lin} X \tag{3.32}$$

такой, что

$$\overline{x}_0 - x_0 \in K, \tag{3.33}$$

$$r_0 > \varphi(\overline{x}_0). \tag{3.34}$$

Из (3.48) следует, что $\overline{x}_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k$, где $m \in \mathbf{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbf{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^{m} \subset X$. Значит,

$$\overline{x}_0 - x_0 = \sum_{k=0}^{m} a_k x_k, \tag{3.35}$$

где $a_0 = -1$ и выполняется (3.30).

Тогда, в силу определения функционала $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}$, линейности функционала φ и неравенства (3.34), получим:

$$\sum_{k=0}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) - \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k\varphi(x_k) - r_0 = \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right) - r_0 = \varphi(\overline{x}_0) - r_0 < 0.$$

Отсюда, из (3.35), (3.30) и (3.33) следует (3.31).

Итак, из предположения (3.16) мы получили противоречие с (3.17).

Необходимость. Допустим противное: $\underline{\gamma}_\varphi(x_0) \neq \overline{\gamma}_\varphi(x_0)$. Отсюда и из (2.11) вытекает, что выполняется хотя бы одно из неравенств $\underline{\gamma}_\varphi(x_0) < \varphi(x_0)$ или $\varphi(x_0) < \overline{\gamma}_\varphi(x_0)$. Тогда найдется число r_0 такое, что $\underline{\gamma}_\varphi(x_0) \leqslant r_0 < \varphi(x_0)$ в случае первого неравенства, и $\varphi(x_0) < r_0 \leqslant \overline{\gamma}_\varphi(x_0)$ в случае второго неравенства. Таким образом, найдется число r_0, удовлетворяющее соотношению (3.16), и такое, что

$$\underline{\gamma}_\varphi(x_0) \leqslant r_0 \leqslant \overline{\gamma}_\varphi(x_0). \tag{3.36}$$

Из (3.16) вытекает, что $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0} \neq \omega_{X,x_0,\varphi,\varphi(x_0)}$. Следовательно, если мы покажем, что $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0} \in P(X \cup \{x_0\})$, то получим противоречие с условием предложения 2.6.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{m} a_k x_k \in K, \tag{3.37}$$

где $m \in \mathbf{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{R}$, $\{x_k\}_{k=1}^m \subset (X \cup \{x_0\})$. Тогда либо

$$x_0 \notin \{x_k\}_{k=1}^m \tag{3.38}$$

либо

$$x_0 \in \{x_k\}_{k=1}^m. \tag{3.39}$$

В случае (3.38), $\{x_k\}_{k=1}^m \subset X$ и тогда, в силу того, что $\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}|X = \varphi|X$, φ – линейный функционал, принадлежностей (3.37) и $\varphi \in K^*$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi(x_k) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right) \geqslant 0.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) \geqslant 0. \tag{3.40}$$

Теперь рассмотрим случай (3.39). Положим для определенности $x_0 = x_m$, при этом $a_m \neq 0$. Следовательно, либо $a_m > 0$, либо $a_m < 0$. Имеем:

$$-\frac{1}{a_m}\sum_{k=1}^{m} a_k \omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) =$$

$$= -\frac{1}{a_m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) + a_m\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_m)\right) =$$

$$= -\frac{1}{a_m}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k\varphi(x_k) + a_m\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_0)\right) =$$

$$= -\frac{1}{a_m}\left(\sum_{k=1}^{m-1} a_k\varphi(x_k) + a_m r_0\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k\right) - r_0. \tag{3.41}$$

Рассмотрим случай $a_m > 0$. Тогда $1/a_m > 0$ и из (3.37), по определению конуса K, получим:

$$x_0 - \left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k\right) = x_m + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{a_m}x_k = \frac{1}{a_m}\sum_{k=1}^{m} a_k x_k \in K. \tag{3.42}$$

Так как $\{x_k\}_{k=1}^{m-1} \subset X$, то

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k \in \operatorname{lin} X. \tag{3.43}$$

Из (3.42) и (3.43), по определению $\underline{\gamma}_{\varphi}(x_0)$ и левому неравенству (3.36) имеем: $\varphi\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k\right) \leqslant \underline{\gamma}_{\varphi}(x_0) \leqslant r_0$. Отсюда и из (3.41) следует неравенство $-\frac{1}{a_m}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) \leqslant 0$, из которого с учетом того, что $a_m > 0$, получим неравенство (3.40).

Теперь рассмотрим случай $a_m < 0$. Тогда $-1/a_m > 0$ и из (3.37), по определению конуса K, получим

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k - x_0 = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k - x_m = -\frac{1}{a_m}\sum_{k=1}^{m} a_k x_k \in K.$$

Отсюда и из (3.43), по определению $\overline{\gamma}_{\varphi}(x_0)$ и правому неравенству (3.36), имеем: $r_0 \leqslant \overline{\gamma}_{\varphi}(x_0) \leqslant \varphi\left(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{a_k}{-a_m}x_k\right)$. Тогда из (3.41) следует неравенство $-\frac{1}{a_m}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\omega_{X,x_0,\varphi,r_0}(x_k) \geqslant 0$, из которого, с учетом отрицательности a_m, получим (3.40). $\bullet$

Доказательство теоремы 2.8. Необходимость. Из включения $\Phi \subset K^*$ следует включение (2.8). Таким образом, выполнены все условия необходимой части теоремы 2.7, из которой для каждого функционала $\varphi \in \Phi$, в силу необходимой части предложения 2.6, получаем равенство (2.12).

Достаточность. Так как $\Phi \subset K^*$, то из достаточных частей предложения 2.6 и теоремы 2.7 заключаем, что элемент x_0 принадлежит (K^*, Φ)-тестовому замыканию множества X. $\bullet$

Доказательство предложения 2.7. Достаточность. Пусть $x \in E$. Если $x = \vartheta$ – нуль пространства E, то, взяв в качестве элементов $\underline{x}$ и $\overline{x}$ нуль ϑ, будем иметь: $\underline{x} = \overline{x} = \vartheta \in \operatorname{lin} X$ и $x - \underline{x} = \overline{x} - x = \vartheta - \vartheta = \vartheta \in K$. Следовательно, $\vartheta \in E_X$.

Пусть $x \neq \vartheta$. По условию (2.13) существует элемент $u \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X$. Так как u – внутренний элемент конуса K, то найдется число $\rho > 0$ такое, что замкнутый шар $B(u;\rho)$ с центром в точке u и радиуса ρ будет содержаться в K. Так как элементы $\pm\frac{\rho}{\|x\|}x + u$ принадлежат шару $B(u;\rho)$, то они принадлежат и конусу K. Тогда, в силу положительности $\frac{\|x\|}{\rho}$, элементы $\pm x + \frac{\|x\|}{\rho}u$ также принадлежат конусу K. Поэтому если положить $\underline{x} = -\frac{\|x\|}{\rho}u$, $\overline{x} = \frac{\|x\|}{\rho}u$, то $x - \underline{x}$, $\overline{x} - x \in K$, а также очевидно, что $\underline{x}$, $\overline{x} \in \operatorname{lin} X$. Следовательно, $x \in E_X$.

Необходимость. Поскольку конус K телесен, то существует внутренний элемент u этого конуса. Тогда найдется число $\rho > 0$ такое, что замкнутый шар $B(u;\rho)$ с центром в точке u и радиуса ρ содержится в конусе K.

Так как $u \in E_X$, то найдется элемент $\overline{u} \in \operatorname{lin} X$ такой, что $\overline{u} - u \in K$. Но тогда $B(\overline{u};\rho) \subset K$. В самом деле, пусть $x \in B(\overline{u};\rho)$; тогда $\|u-(x+u-\overline{u})\| = \|\overline{u}-x\| \leqslant \rho$, откуда вытекает, что $x+u-\overline{u} \in B(u;\rho)$ и, следовательно, $x + u - \overline{u} \in K$. Отсюда, в силу того, что $\overline{u} - u \in K$, получаем: $x = (x + u - \overline{u}) + (\overline{u} - u) \in K$. Таким образом, $B(\overline{u};\rho) \subset K$ и, следовательно, $\overline{u} \in \overset{0}{K}$. Итак, $\overline{u} \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X$. $\bullet$

Теорема 2.9 следует из теоремы 2.8 и предложения 2.7. $\bullet$

Доказательство теоремы 2.10. Так как правая часть равенства (2.14) включается в левую, то достаточно доказать лишь обратное включение. Пусть

$$y \in \langle (K^*, \Phi) - T \rangle [X], \tag{3.44}$$

$(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset K^*$, $\varphi \in \Phi$ и

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x), \quad x \in X. \tag{3.45}$$

По условию (2.13), существует элемент $u \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X$. Из справедливости предельного равенства (3.45) для $x \in X$ следует его справедливость для элемента u. Это влечет ограниченность норм $\|f_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда из (3.44) следует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = \varphi(y)$. Итак, $y \in \langle (K^*, \Phi) - K \rangle [X]$. •

Доказательство предложения 2.8. Докажем эквивалентность условий (2.13) и (2.15). Поскольку $\operatorname{lin} X \subset \overline{\operatorname{lin} X}$, то из (2.13) следует (2.15). Теперь пусть справедливо (2.15) и пусть $u \in \overset{0}{K} \cap \overline{\operatorname{lin} X}$. Если $u \in \operatorname{lin} X$, то (2.13) доказано. Пусть u является предельной точкой $\operatorname{lin} X$. Так как $u \in \overset{0}{K}$, то существует число $\rho > 0$ такое, что шар $B(u; \rho)$ с центром в точке u и радиуса ρ лежит в конусе K. Поскольку u – предельная точка $\operatorname{lin} X$, то в шаре $B(u; 2^{-1}\rho)$ найдется отличная от u точка $x \in \operatorname{lin} X$. Тогда $B(x; 2^{-1}\rho) \subset B(u; \rho) \subset K$, т.е. $x \in \overset{0}{K}$. Таким образом, $x \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X$ и, следовательно, выполняется условие (2.13).

Докажем эквивалентность условий (2.13) и (2.16).

Так как, по утверждению 2) предложения 2.3, $\operatorname{lin} X \subset \langle \{K^*, \{\Theta\}\} - O \rangle [X]$, то (2.13) влечет (2.16).

Пусть теперь выполняется (2.16), но не выполняется (2.13), т.е.

$$\overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X = \varnothing. \tag{3.46}$$

В силу (2.16) существует элемент

$$u \in \overset{0}{K} \cap \langle \{K^*, \{\Theta\}\} - O \rangle [X]. \tag{3.47}$$

Покажем, что каждый элемент $y \in E_1 = \operatorname{lin} X + \operatorname{lin} \{u\}$ однозначно представляется в виде

$$y = x + \lambda u, \quad \text{где} \quad x \in \operatorname{lin} X, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{3.48}$$

Допустим, что это не так. Тогда найдется элемент $y \in E_1$ такой, что $y = x_1 + \lambda_1 u = x_2 + \lambda_2 u$, где $x_1,\ x_2 \in \operatorname{lin} X$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Поскольку $u \in \overset{0}{K}$ и $|\lambda_2 - \lambda_1| > 0$, то ([33], с. 9) $|\lambda_2 - \lambda_1| u \in \overset{0}{K}$. С другой стороны, так как $x_1,\ x_2 \in \operatorname{lin} X$, то $(\operatorname{sign}(\lambda_2 - \lambda_1))(x_1 - x_2) \in \operatorname{lin} X$. Следовательно,

$$(\operatorname{sign}(\lambda_2 - \lambda_1))(x_1 - x_2) =$$
$$= (\operatorname{sign}(\lambda_2 - \lambda_1))(\lambda_2 - \lambda_1)u = |\lambda_2 - \lambda_1| u \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X,$$

что противоречит (3.46). Этим однозначность представления (3.48) доказана.

Определим на подпространстве E_1 соответствие ψ, соотносящее каждому элементу (3.48) из E_1 число $\psi(y) = \psi(x + \lambda u) = \lambda$. В силу однозначности представления (3.48), соответствие ψ будет функционалом. Легко убедиться в аддитивности этого функционала.

Так как подпространство E_1 содержит внутренний элемент u конуса K (элемент u представляется в виде (3.48) при $x = \vartheta \in \operatorname{lin} X$ и $\lambda = 1$), то пересечение $K_1 = E_1 \cap K$ является телесной полугруппой в пространстве E_1 ([33], с. 10).

Покажем, что функционал ψ положителен на K_1. Допустим противное, т.е., что существует элемент $y_0 \in K_1$ такой, что $\psi(y_0) < 0$. Так как $y_0 \in K_1$, то $y_0 = x_0 + \lambda_0 u$, где $x_0 \in \operatorname{lin} X$, $\lambda_0 = \psi(y_0) < 0$. Тогда ([33], с.9) $-\lambda_0 u \in \overset{0}{K}$, поскольку $-\lambda_0 > 0$ и $u \in \overset{0}{K}$. Следовательно, существует число $r > 0$ такое, что шар $B(-\lambda_0 u; r)$ с центром в точке $-\lambda_0 u$ радиуса r расположен в конусе K. Так как $y_0 \in K$, то, в силу определения конуса K, $B(y_0 - \lambda_0 u; r) = B(-\lambda_0 u; r) + y_0 \subset K$. Значит, $x_0 = y_0 - \lambda_0 u \in \overset{0}{K}$ и, следовательно, $x_0 \in \overset{0}{K} \cap \operatorname{lin} X$, что противоречит (3.46). Таким образом, функционал ψ положителен на K_1.

Из того, что K_1 – телесная полугруппа в пространстве E_1 и ψ – положительный на ней аддитивный функционал, следует ([33], с. 10), что функционал ψ однороден и непрерывен, т.е. $\psi \in (K_1)^*$.

Итак, выполняются все условия теоремы М. Г. Крейна о продолжении положительного функционала ([33], с. 11), по которой функционал ψ можно продолжить до линейного положительного функционала, определенного на всем пространстве E. Это означает существование функционала $f \in K^*$ такого, что

$$f(y) = \psi(y), \quad y \in E_1. \tag{3.49}$$

Если $x \in X$, то $x = x + 0 \cdot u \in E_1$. Отсюда и из (3.49) имеем: $f(x) = \psi(x) = 0$, $x \in X$, и, следовательно, по определению $\{K^*, \{\Theta\}\}$-отличающего замыкания множества X, получим $f(x) = 0$, $x \in \langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X]$. В частности, в силу (3.47),

$$f(u) = 0. \tag{3.50}$$

Но, с другой стороны, $u = \vartheta + 1 \cdot u \in E_1$ и потому, в силу (3.49) справедливо равенство $f(u) = \psi(u) = 1$, противоречащее равенству (3.50). $\bullet$

Доказательство теоремы 2.11. В силу (2.18), существует функционал $\varphi \in K^* \cap \Phi$. Так как $\varphi \in \Phi$, то, по утверждению 2) предложения 2.1

$$\langle\, \{K^*, \Phi\} - O \,\rangle\, [X] \subset \langle\, \{K^*, \{\varphi\}\} - O \,\rangle\, [X]. \tag{3.51}$$

Для любого функционала $f \in K^*$ имеем: $f = (f + \varphi) - \varphi$, где $f + \varphi \in K^*$, поскольку $\varphi \in K^*$. Таким образом, $K^* \subset K^* - \{\varphi\}$. Тогда, по предложению 2.1, $\langle\, \{K^*, \{\varphi\}\} - O \,\rangle\, [X] = \langle\, \{K^* - \{\varphi\}, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X] \subset \langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X]$. Стало быть, по теореме 2.1 и включению (3.51) получаем: $\langle\, (K^*, \Phi) - T \,\rangle\, [X] \subset \langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X]$, откуда

$$\overset{0}{K} \cap \langle\, (K^*, \Phi) - T \,\rangle\, [X] \subset \overset{0}{K} \cap \langle\, \{K^*, \{\Theta\}\} - O \,\rangle\, [X]$$

и, следовательно, из (2.17) заключаем о выполнении (2.16). Тогда, по предложению 2.8, справедливо (2.13) и, следовательно, по теореме 2.10, получим требуемое. $\bullet$

Доказательство теоремы 2.12. Пусть выполняется (3.44), $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset K^*$, $\varphi \in \Phi$ и имеет место (3.45). Пусть e – наибольший элемент пересечения $K \cap S$ и $e \in \langle\, (K^*, \Phi) - K \,\rangle\, [X]$. Тогда из (3.45) вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(e) = \varphi(e)$, т.е. последовательность $(f_n(e))_{n=1}^{\infty}$ – сходящаяся и, следовательно, ограниченная:

$$f_n(e) \leqslant c, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.52}$$

Покажем, что при условиях монотонности нормы пространства E по отношению к частичной упорядоченности, порожденной миниэдральным конусом K, и существовании наибольшего элемента e пересечения $K \cap S$, норма $\|f\|$ любого функционала $f \in K^*$ равна его значению $f(e)$ на элементе e.

Пусть $x \neq \vartheta$ и $x \in K \cap B$, где B – единичный (замкнутый) шар в E. Тогда $\|x\|^{-1}x \in K \cap S$ и потому $\|x\|^{-1}x \leqslant e$, т.е. $e - \|x\|^{-1}x \in K$. Отсюда и из того, что $f \in K^*$, получим: $f(e - \|x\|^{-1}x) \geqslant 0$ или $f(x) \leqslant f(e)\|x\|$. Но так как $x \in B$, то $f(x) \leqslant f(e)$ и, следовательно, $\sup\{f(x) : x \in K \cap B\} \leqslant f(e)$. С другой стороны, поскольку $e \in K \cap B$, имеем: $f(e) \leqslant \sup\{f(x) : x \in K \cap B\}$. Таким образом,

$$\sup\{f(x) : x \in K \cap B\} = f(e). \tag{3.53}$$

Так как конус K миниэдрален и норма пространства E монотонна относительно частичной упорядоченности, порожденной конусом K, то банахово пространство E является банаховой структурой ([31], с. 195), если в качестве класса положительных элементов взять множество K. В таком случае норма функционала $f \in K^*$ равна ([31], с. 245) левой части равенства (3.53). Таким образом, $\|f\| = f(e)$. Отсюда и из (3.52) получаем, что нормы $\|f_n\|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ограничены в совокупности. Тогда, в силу (3.44), $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(y) = \varphi(y)$. Таким образом, $y \in \langle\, (K^*, \Phi) - K \,\rangle\, [X]$. Итак, $\langle\, (K^*, \Phi) - T \,\rangle\, [X] \subset \langle\, (K^*, \Phi) - K \,\rangle\, [X]$. Следовательно, $\langle\, (K^*, \Phi) - T \,\rangle\, [X] = \langle\, (K^*, \Phi) - K \,\rangle\, [X]$. •

Литература

1. П. П. Коровкин, *О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций.* — ДАН СССР **90, No. 6** (1953), 961–964.
2. П. П. Коровкин, *Линейные операторы и теория приближения.* Физматгиз, М. (1959).
3. H. Bohman, *On approximation of continuous and of analytic functions.* — Arkiv. Matem. **2, No. 3** (1952), 43–56.
4. F. Altomare, M. Campiti, *A bibliography on the Korovkin type approximation theory (1952–1987).* — Funct. Anal. and Appr., Pitagora Editrice, Bologna (1989), 34–79.
5. F. Altomare, M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.* Walter de gryter & Co., Berlin–New York (1994).
6. Л. Г. Лабскер, *Тестовые и отличающие множества в банаховом пространстве.* — Изв. ВУЗ. Математика **No. 1** (1992), 102–105.

7. Ю. А. Шашкин, *Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **26** (1962), 495–512.
8. М. А. Красносельский, В. С. Климов, Е. А. Лифшиц, *О сходимости положительных функционалов и операторов.* — ДАН СССР **162, No. 2** (1965), 258–261.
9. Л. Г. Лабскер, *О слабой сходимости последовательностей линейных положительных функционалов.* — ДАН СССР **197, No. 6** (1971), 1264--1267.
10. С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, *Супремальные генераторы.* — ДАН СССР **199, No. 4** (1971), 776–777.
11. С. С. Кутателадзе, *О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору.* — Сиб. матем. журнал **13, No. 2** (1972), 464–466.
12. C. A. Miccheli, *Chebyshev subspaces and convergence of positive linear operators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **40, No. 2** (1973), 448–452.
13. A. S. Cavaretta, *A Korovkin theorem for finitely defined operators.* — Approxim. Theory, New York–London, Acad. Press (1973), 299–305.
14. H. Berens, G. G. Lorentz, *Geometric theory of Korovkin sets.* — J. Approxim. Theory **15, No. 3** (1975), 161–189.
15. A. Leonte, I. Virtopeanu, *Asupra unui resultat al lui L. G. Labsker relativ la multimi Korovkin.* — Analele Univ. din Craiova. ser. Mat., Fiz.-Chim. **11** (1983), 31–34.
16. Ю. Г. Абакумов, В. Г. Банин, *Об одном общем подходе к теоремам типа теорем Коровкина.* — Примен. функц. анализа в теории приближений, Калинин (1985), 3–6.
17. F. Altomare, *Korovkin-type theorems for positive functionals in spaces of continuous affine functions.* — Rendiconti del circolo Matematico di Palermo **36, serie 11** (1987), 167–181.
18. А. М. Рубинов, *Об одной теореме В. С. Климова, М. А. Красносельского и Е. А. Лифшица.* — Оптимизация, АН СССР, Сиб. отд. Ин-т матем., вып. **3(20)** (1971), 154–158.
19. Л. Г. Лабскер, *О множествах Коровкина в пространстве непрерывных функций для операторов класса S_m^0.* — Мат. заметки **25, No. 4** (1979), 521–536.
20. Л. Г. Лабскер, *О множествах Коровкина в банаховом пространстве для множеств линейных функционалов.* — Мат. заметки **31, No. 1** (1982), 93–112.
21. Л. Г. Лабскер, *К вопросу о слабой сходимости последовательностей линейных функционалов.* — Anal. Numer. et Theor. Approxim. **14, No. 1** (1985), 33–57.
22. В. А. Баскаков, *О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов.* — Успехи матем. наук **16, No. 1** (1961), 131–134.
23. H. Bauer, *Silovshen rand and Dirichletsches problem.* — Ann. Inst. Fourier **No. 11** (1961), 89–136.
24. Л. Г. Лабскер, *О некоторых достаточных условиях аппроксимации непрерывных функций операторами класса S_m.* — ДАН Азерб. ССР **26, No. 9** (1970), 3–7.

25. A. Lupas, *On the approximation by linear operators of class S_m.* — An. Sti. Univ. "Al. I. Cura," IASI Sekt. 1A Mat. **17, No. 1** (1971), 133–137.
26. Р. М. Минькова, *Аппроксимация непрерывных функций некоторыми классами линейных операторов.* — Примен. функц. анализа в теории приближений, Калинин **2** (1974), 85–100.
27. Л. Г. Лабскер, *Тестовые замыкания множеств в банаховом пространстве для линейных функционалов.* — Докл. РАН **351, No. 2** (1996), 1–3.
28. Л. Г. Лабскер, *О критериях тестовых замыканий множеств в банаховом пространстве для приближения линейными положительными функционалами.* Тез. докладов, М., 27 апреля–3 мая 1995, с. 171–172.
29. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* Наука, М. (1973).
30. М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений.* Физматгиз, М. (1962).
31. Б. З. Вулих, *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* Гос. изд-во физ-мат. лит., М. (1961).
32. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ., М. (1962).
33. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.* — Успехи мат. наук **3, No. 1** (1948), 3–95.

Labsker L. G. Test closure operations in a Banach space that are generated by linear functionals.

Some criteria are proved for an element of a Banach space to belong to a certain test or Korovkin closure of a given set. The operations of closure in question are determined by linear functionals. The cases of arbitrary linear functionals and of positive functionals are considered. Some sufficient conditions are given for a test closure to coincide with a Korovkin closure.

Финансовая академия
при Правительстве
Российской Федерации, Москва

Поступило 15 января 1996 г.