Н. Я. Кругляк

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОКРЫТИЯХ ТИПА УИТНИ

Ключевым моментом доказательства основных результатов работы [1] являлась теорема о покрытии 1.9. Однако подробное доказательство этой теоремы для случая $\alpha < 0$ в [1] было лишь намечено. В настоящей работе мы восполняем этот пробел, а также приводим формулировки и доказательства теорем о покрытии, анонсированных в [2].

§1. Формулировки результатов

Настоящая работа является продолжением работы [1], и, в общем, мы предполагаем, что читатель располагает текстом той статьи и, в частности, знаком с определениями §1. Однако, чтобы достичь хотя бы минимальной автономии, мы воспроизводим основные технических определения из [1, §1].

Всюду далее мы будем рассматривать пространство R^n с нормой

$$\|x\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \ (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Через $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, r)$ будем обозначать замкнутый куб с центром в точке x и радиуса $r \geqslant 0$, т.е.

$$\mathcal{Q}(x, r) = \{y \in R^n : \|y - x\| \leqslant r\}.$$

Таким образом, все рассматриваемые кубы *замкнуты* и гомотетичны единичному кубу $\mathcal{Q}_0 = [0, 1]^n$.

Объем куба $\mathcal{Q}$ будем обозначать через $|\mathcal{Q}|$, а через $\lambda\mathcal{Q}$ $(\lambda \geqslant 0)$ будем обозначать куб с тем же центром, что и куб $\mathcal{Q}$ и радиуса

$$r(\lambda\mathcal{Q}) = \lambda \cdot r(\mathcal{Q}).$$

Под *укладкой* $\pi = \{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ мы будем понимать семейство попарно непересекающихся кубов $\mathcal{Q}_i$ $(i = 1, \dots, |\pi|)$, где через $|\pi|$ обозначено число кубов в укладке π.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченное множество. И пусть в каждой точке $x \in \Omega$ задан куб $\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}(x, r(x))$ с центром в x и радиусом $r(x)$, который может равняться и нулю. В этом случае куб $\mathcal{Q}_x$ будем называть вырожденным.

Определение. *Будем говорить, что семейство кубов $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ имеет ограниченную α-емкость ($\alpha \in R$), если конечна величина*

$$|\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha = \sum_\pi \left(\sum_{\mathcal{Q}\in\pi} |\mathcal{Q}|^\alpha \right),$$

где sup *взят по всем укладкам π, состоящим из кубов семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$.*

Таким образом, если $\alpha < 0$, то из конечности α-емкости следует, что семейство $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ не содержит вырожденных кубов.

Можно также определить α-емкость и при $\alpha = \pm\infty$, полагая

$$|\{\mathcal{Q}_x\}|_{+\infty} = \sup_{x\in\Omega} |\mathcal{Q}_x|$$

и

$$|\{\mathcal{Q}_x\}|_{-\infty} = \sup_{x\in\Omega} |\mathcal{Q}_x|^{-1}.$$

Определение. *Семейство невырожденных кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ называется конечнократным, если*

$$\sum_{i\in I} \chi_{K_i} \leqslant M < +\infty,$$

где χ_{K_i} – характеристическая функция куба K_i, а $M > 0$ некоторая постоянная, которую будем называть кратностью семейства $\{K_i\}_{i\in I}$.

Определение. *Семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ будем называть сильно-зацепленным, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что из $K_i \cap K_j \neq \varnothing$ $(i, j \in I)$ следует неравенство*

$$|K_i \cap K_j| \geqslant \varepsilon \max(|K_i|, |K_j|).$$

Постоянную ε будем называть константой зацепления семейства $\{K_i\}_{i\in I}$.

Определение. *Семейство кубов* $\{K_i\}_{i\in I}$ *назовем семейством кубов Уитни для множества* Ω, *если оно конечнократно, сильнозацеплено и справедливо равенство*

$$\Omega\cap\left(\bigcup_{i\in I}\frac{1}{2}K_i\right)=\Omega\cap\left(\bigcup_{i\in I}K_i\right).$$

Определение. *Будем говорить, что семейство кубов* $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ *является расширением (сужением) семейства* $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$, *если все кубы* K_{x_i} $(i\in I)$ *невырождены, их центры* x_i $(i\in I)$ *содержатся в* Ω *и выполнены условия:*

a) *для всех* $i\in I$ *справедливы вложения*

$$\mathcal{Q}_{x_i}\subset K_{x_i}\quad(\textit{соответственно}\ \ K_{x_i}\subset\mathcal{Q}_{x_i});$$

b) *если* $|\mathcal{Q}_x|>0$, *то найдется* $i=i(x)$ *такой, что*

$$x\in\mathcal{Q}_x\subset K_{x_i}\quad(\textit{соответственно}\ \ x\in K_{x_i}\subset\mathcal{Q}_x).$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство для $\alpha<0$ следующей теоремы (теорема 1.9 из [1]).

Теорема 1.1. *Предположим, что семейство кубов* $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ *имеет ограниченную* α-*емкость, причем* $\alpha\notin[0,1-1/n]$.

Тогда существует семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$, *являющееся*

a) *семейством кубов Уитни для множества* Ω;

b) *таким расширением при* $\alpha>0$ *(сужением при* $\alpha<0$*) исходного семейства* $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$, *что имеет место оценка*

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha\leqslant c|\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha. \tag{1.1}$$

Причем коэффициенты кратности M *и зацепления* ε *зависят только от размерности* n, *а коэффициент изменения емкости* c *(из (1.1)) зависит от* n *и* α.

Замечание 1.2. Утверждение теоремы остается верным и при $\alpha=\pm\infty$.

Для формулировки результата для $\alpha\in(0,1-1/n]$ нам понадобится

Определение 1.3. *Коэффициентом регулярности* λ *множества* Ω *называется величина*

$$\lambda = \inf_{\mathcal{Q}} \frac{|\mathcal{Q} \cap \Omega|}{|\mathcal{Q}|},$$

где inf *берется по всем кубам* $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, r)$ *с центром* $x \in \Omega$ *и радиусом* $r \leqslant \operatorname{diam} \Omega$.

Теорема 1.4. *Пусть* $\alpha \in (0, 1-1/n]$. *Предположим, что выполнены условия:*

a) Ω *выпукло и регулярно с коэффициентом регулярности* $\lambda > 0$;

b) *функция* $x \to r(x)$ *является непрерывной (здесь* $r(x)$ – *радиус куба* $\mathcal{Q}_x$).

Тогда теорема 1.1 *остается справедливой при замене* (1.1) *на*

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant c\lambda^{-\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}|_\alpha. \tag{1.2}$$

В заключение установим связь с теоремой о покрытии типа Уитни. Нам понадобится

Определение 1.5. *Будем говорить, что семейство кубов* $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ *удовлетворяет условию Липшица с показателем* $q > 0$, *если*

$$|\, r(\mathcal{Q}_{x_1}) - r(\mathcal{Q}_{x_2}) \,| \leqslant q\|x_1 - x_2\|, \quad (x_1, x_2 \in \Omega).$$

В следующей теореме Ω – произвольное, не обязательно ограниченное подмножество R^n.

Теорема 1.6. *Пусть семейство* $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ *не содержит вырожденных кубов и удовлетворяет условию Липшица с показателем* $q < \frac{1}{5}$.

Тогда существует семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ *такое, что*

a) *все кубы* K_{x_i} $(i \in I)$ *имеют вид* $K_{x_i} = \lambda_i \mathcal{Q}_{x_i}$, *причем* $\lambda_i \in [3, 5]$;

b) *семейство* $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ *является конечнократным и сильнозацепленным, причем коэффициенты кратности и зацепления зависят только от размерности* n;

c) *имеет место вложение* $\Omega \subset \bigcup\limits_{i\in I} \frac{1}{2} K_{x_i}$;

d) *для любого* $x \in \Omega$ *найдется номер* $i = i(x)$ *такой, что* $\mathcal{Q}_x \subset K_{x_i}$.

Следствие 1.7 (теорема о покрытии типа Уитни [4, 5]).

Пусть $F \subset R^n$ – *замкнутое непустое подмножество и* $\Omega = R^n \setminus F$. *Тогда существует такое семейство кубов* $\{K_i\}_{i\in I}$, *что*

a) $2K_i \cap F \neq \varnothing$ *для всех* $i \in I$;

b) *семейства кубов* $\{K_i\}_{i\in I}$, $\left\{\frac{1}{2}K_i\right\}_{i\in I}$ *покрывают множество* Ω*:*

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} K_i = \bigcup_{i\in I} \frac{1}{2}K_i;$$

c) *семейство* $\{K_i\}_{i\in I}$ *конечнократно и сильнозацеплено с коэффициентами кратности и зацепления, зависящими только от размерности* n.

Доказательство. Для $x \in \Omega$ через $\mathcal{Q}_x$ обозначим наименьший куб с центром в точке x, пересечение которого с F не пусто. Тогда, как нетрудно видеть, это семейство $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $q = 1$. Применяя теорему 1.6 к семейству кубов $\{\frac{1}{6}\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ (для этого семейства кубов $q \leqslant \frac{1}{6}$), получаем требуемое утверждение. □

§2. Доказательство теоремы 1.1 для $\alpha < 0$

1. Построение липшицевой миноранты.

Пусть $\Omega_1 \subset R^n$ ограниченное множество, $\{\mathcal{Q}_x^1\}_{x\in\Omega_1}$ – семейство кубов такое, что

$$\sigma_1 = \inf_{x\in\Omega} r(\mathcal{Q}_x^1) > 0. \tag{2.1}$$

Зафиксируем положительное число $q < 1$ и проведем следующее итерационное построение семейства кубов $\{\mathcal{Q}_{x_i}^i\}_{i\in I}$, которое будем называть липшицевой минорантой семейства $\{\mathcal{Q}_x^1\}_{x\in\Omega_1}$.

В качестве x_1 возьмем элемент из Ω_1 такой, что

$$r(\mathcal{Q}_{x_1}^1) \leqslant (1+q)\sigma_1. \tag{2.2}$$

Если множество Ω_i, семейство кубов $\{\mathcal{Q}_x^i\}_{x\in\Omega_i}$ и элемент $x_i \in \Omega_i$ построены, то в качестве Ω_{i+1} возьмем множество

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus \mathcal{Q}_{x_i}^i. \tag{2.3}$$

Кубы $\mathcal{Q}_x^{i+1}$ с центрами $x \in \Omega_{i+1}$ определяются формулами

$$r(\mathcal{Q}_x^{i+1}) = \min\left(r(\mathcal{Q}_x^i),\, r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) + q\|x - x_i\|\right). \tag{2.4}$$

Таким образом,

$$\mathcal{Q}_x^{i+1} \subset \mathcal{Q}_x^i \quad (x \in \Omega_{i+1}), \tag{2.5}$$

т.е. кубы на каждом шаге не увеличиваются. Для выбора точки $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ положим

$$\sigma_{i+1} = \inf_{x \in \Omega_{i+1}} r(\mathcal{Q}_x^{i+1}). \tag{2.6}$$

Элемент $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ выбирается так, чтобы

$$r(\mathcal{Q}_{x_{i+1}}^{i+1}) \leqslant (1+q)\sigma_{i+1}. \tag{2.7}$$

Получаемое в итоге этого итерационного процесса семейство кубов $\{\mathcal{Q}_{x_i}^i\}_{i \in I}$ и будем называть липшицевой минорантой семейства $\{\mathcal{Q}_x^1\}_{x \in \Omega_1}$.

Отметим, что из формулы (2.4) следует, что

$$r(\mathcal{Q}_x^{i+1}) \geqslant \min\big(r(\mathcal{Q}_x^i),\, r(\mathcal{Q}_{x_i}^i)\big) \geqslant \sigma_i \ (x \in \Omega_{i+1}). \tag{2.8}$$

Поэтому $\sigma_{i+1} \geqslant \sigma_i$ и, следовательно,

$$\sigma_j \geqslant \sigma_i \quad (j \geqslant i). \tag{2.9}$$

В частности,

$$\inf_{i \in I} r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) \geqslant \sigma_1 > 0. \tag{2.10}$$

2. Простейшие свойства липшицевой миноранты.

Имеет место

Предложение 2.1. *Семейство кубов $\{\mathcal{Q}_{x_i}^i\}_{i \in I}$ липшицево с показателем q.*

Доказательство. Пусть $j > i$. Если $r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) \geqslant r(\mathcal{Q}_{x_i}^i)$, то из (2.4) имеем

$$|r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) - r(\mathcal{Q}_{x_i}^i)| = r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) - r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) \leqslant r(\mathcal{Q}_{x_j}^{i+1}) - r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) \leqslant q\|x_j - x_i\|.$$

Если $r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) < r(\mathcal{Q}_{x_i}^i)$, то из (2.9) и (2.7) с учетом того, что $x_j \notin \mathcal{Q}_{x_i}^i$ имеем

$$|\, r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) - r(\mathcal{Q}_{x_i}^i)\, | \leqslant r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) - \sigma_i \leqslant q r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) \leqslant q\|x_j - x_i\|.$$

□

Доказательство следующего утверждения полностью повторяет доказательство для случая $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$ (см. предложение 5.3 работы [1]).

Предложение 2.2. *Семейство* $\{\frac{1}{2+q}\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ *является укладкой.*

Предложение 2.3. *Семейство* $\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ *состоит из конечного числа кубов и справедливо вложение*

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{Q}^i_{x_i}. \tag{2.11}$$

Доказательство. В силу (2.10) имеем для всех $i \in I$

$$| \mathcal{Q}^i_{x_i} | \geqslant (2\sigma_1)^n > 0.$$

Поэтому требуемое утверждение следует из предложения 2.2 и ограниченности Ω_1. □

Предложение 2.4. *Для любого* $x \in \Omega_1$ *найдется номер* $i = i(x)$ *такой, что*

$$x \in \mathcal{Q}^i_{x_i} \subset 2(1+q)\mathcal{Q}^1_x. \tag{2.12}$$

Доказательство. Из (2.11) следует, что найдется номер i такой, что $x \in \mathcal{Q}^i_{x_i}$. Возьмем наименьший номер i, для которого $x \in \mathcal{Q}^i_{x_i}$. Тогда $x \in \Omega_i$ и, значит,

$$r(\mathcal{Q}^1_x) \geqslant r(\mathcal{Q}^i_x) \geqslant \sigma_i \geqslant \frac{1}{1+q}(\mathcal{Q}^i_{x_i}). \tag{2.13}$$

Следовательно,

$$x \in \mathcal{Q}^i_{x_i} \subset \mathcal{Q}\left(x, 2r(\mathcal{Q}^i_{x_i})\right) \subset 2(1+q)\mathcal{Q}^1_x.$$

□

3. Конечнократность.

Доказательства пункта 3 §5 работы [1] основываются на предложениях 5.1 и 5.3, которые идентичны предложениям 2.1 и 2.2. Поэтому для липшицевой миноранты, т.е. для семейства $\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ справедливы аналогичные следствиям 5.8 и 5.11 утверждения:

Предложение 2.5. *Если* $\varepsilon_0 > 0$ *таково, что*

$$1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}, \tag{2.14}$$

то семейство $\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ *соизмеримо с коэффициентом соизмеримости*

$$\lambda = \frac{1 + (1+\varepsilon_0)q}{1 - (1+\varepsilon_0)q}. \tag{2.15}$$

Предложение 2.6. *Если $\varepsilon_0 > 0$ таково, что*

$$1+\varepsilon_0 < \frac{1}{q}, \tag{2.16}$$

то семейство $\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ конечнократно, причем при фиксированных q и ε_0 его кратность оценивается сверху числом, зависящим только от n.

4. Сильная зацепленность.

Доказательства пункта 4 §5 работы [1] основываются на следствиях 5.8 и 5.11 этой работы, которые идентичны предложениям 2.5 и 2.6. Поэтому для липшицевой миноранты справедливо аналогичное следствию 5.16 утверждение:

Предложение 2.7. *Если $q < 1$ и $1+\delta_0 < \frac{1}{q}$, то существуют такие числа $\lambda_i \in [1+\frac{\delta_0}{2}, 1+\delta_0]$, что семейство кубов $\{\lambda_i\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ обладает свойствами:*

a) *кратность семейства $\{\lambda_i\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ конечна и зависит только от n;*

b) *семейство $\{\lambda_i\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ сильнозацеплено и коэффициент зацепления зависит только от n.*

5. Оценка α-емкости.

Так же как и в пункте 5 §5 работы [1] разобъем кубы семейства $\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$ на две группы. В первую группу (первичные кубы) отнесем те кубы $\mathcal{Q}^i_{x_i}$, для которых имеет место

$$\mathcal{Q}^i_{x_i} = \mathcal{Q}^1_{x_i}, \tag{2.17}$$

т.е. те кубы, которые не уменьшались в процессе построения семейства $\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i\in I}$.

Остальные кубы будем называть вторичными. Из формулы (2.4) следует, что для каждого вторичного куба $\mathcal{Q}^j_{x_j}$ найдется куб $\mathcal{Q}^i_{x_i}$ с номером $i < j$ такой, что

$$r(\mathcal{Q}^j_{x_j}) = r(\mathcal{Q}^i_{x_i}) + q\|x_j - x_i\|. \tag{2.18}$$

Куб $\mathcal{Q}^i_{x_i}$ с наименьшим номером i, для которого выполнено (2.18), назовем образующим для вторичного куба $\mathcal{Q}^j_{x_j}$.

Имеет место

Предложение 2.8. *Образующий куб является первичным.*

Доказательство. Если образующий куб $\mathcal{Q}_{x_i}^i$ для вторичного куба $\mathcal{Q}_{x_j}^j$ сам является вторичным, то найдется номер $i_0 < i$ такой, что

$$r(\mathcal{Q}_{x_i}^i) = r(\mathcal{Q}_{x_{i_0}}^{i_0}) + q\|x_i - x_{i_0}\|.$$

Поэтому из (2.18) имеем

$$r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) = r(\mathcal{Q}_{x_{i_0}}^{i_0}) + q\|x_j - x_i\| + q\|x_i - x_{i_0}\| \geqslant$$
$$\geqslant r(\mathcal{Q}_{x_{i_0}}^{i_0}) + q\|x_j - x_{i_0}\|.$$

С другой стороны, из (2.4) и (2.5) следует, что

$$r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) \leqslant r(\mathcal{Q}_{x_j}^{i_0+1}) \leqslant r(\mathcal{Q}_{x_{i_0}}^{i_0}) + q\|x_j - x_{i_0}\|.$$

Поэтому

$$r(\mathcal{Q}_{x_j}^j) = r(\mathcal{Q}_{x_{i_0}}^{i_0}) + q\|x_j - x_{i_0}\|,$$

но это противоречит выбору i как наименьшего номера, для которого выполнено (2.18). $\square$

Обозначим через F_i семейство вторичных кубов $\mathcal{Q}_{x_j}^j$, для которых образующим является куб $\mathcal{Q}_{x_i}^i$.

Предложение 2.9. *Если $\alpha < 0$, то*

$$\sum_{\mathcal{Q}_{x_j}^j \in F_i} |\, \mathcal{Q}_{x_j}^j \,|^\alpha \leqslant \gamma \,|\, \mathcal{Q}_{x_i}^i \,|^\alpha, \tag{2.19}$$

где $\gamma > 0$ зависит только от n.

Доказательство. Обозначим через C_m $(m = 0, 1, 2, \dots)$ количество кубов $\mathcal{Q}_{x_j}^j \in F_i$, центры которых лежат в

$$Z_m = 2^{m+1}\mathcal{Q}_{x_i}^i \setminus 2^m \mathcal{Q}_{x_i}^i.$$

Так как $\alpha < 0$, то из формулы (2.18) следует, что если $x_j \in Z_m$, то

$$|\, \mathcal{Q}_{x_j}^j \,|^\alpha \leqslant (q2^m)^{n\alpha}.$$

Поэтому

$$\sum_{\mathcal{Q}_{x_j}^j \in F_i} |\, \mathcal{Q}_{x_j}^j \,|^\alpha \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} C_m (q2^m)^{n\alpha}.$$

И так как $\alpha < 0$, то достаточно доказать, что все C_m ограничены сверху постоянной C, зависящей только от размерности n.

Для этого воспользуемся тем, что если центр x_j куба $\mathcal{Q}^j_{x_j} \in F_i$ содержится в Z_m, то в силу (2.18)

$$r(\mathcal{Q}^j_{x_j}) \geqslant q2^m r(\mathcal{Q}^i_{x_i})$$

и поэтому куб $\frac{1}{2+q}\mathcal{Q}^j_{x_j}$ высекает из Z_m объем не менее

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{q2^m}{2+q}\right)^n \mid \mathcal{Q}^i_{x_i} \mid .$$

Так как в силу предложения 2.2 кубы $\frac{1}{2+q}\mathcal{Q}^j_{x_j}$ не пересекаются, то

$$C_m \leqslant \frac{|Z_m|}{\frac{1}{2^n}(\frac{q2^m}{2+q})^n|\mathcal{Q}^i_{x_i}|} \leqslant \frac{2^{(m+1)n}|\mathcal{Q}^i_{x_i}|}{\frac{1}{2^n}(\frac{q2^m}{2+q})^n|\mathcal{Q}^i_{x_i}|} \leqslant \frac{4^n}{(\frac{q}{2+q})^n}.$$

□

Предложение 2.10. *Если $\alpha < 0$ и $1+\varepsilon_0 < \frac{1}{q}$, то*

$$\sum_{i\in I} |\mathcal{Q}^i_{x_i}|^\alpha \leqslant \gamma \left|\left\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^1_x\right\}\right|_\alpha, \tag{2.20}$$

где $\gamma > 0$ зависит только от n.

Доказательство. В силу предложения 2.9 неравенство (2.20) достаточно доказать для случая, когда суммирование осуществляется только по первичным кубам.

Так как в силу предложения 2.6 семейство $\left\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^i_{x_i}\right\}_{i\in I}$ конечнократно и кратность зависит только от n, то оно распадается на конечное и зависящее только от n число укладок. Для каждой из этих укладок π будет

$$\sum_{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^j_{x_j}\in\pi} |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha = \left(\frac{1}{1+\varepsilon_0}\right)^{n\alpha}\left(\sum_{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^j_{x_j}\in\pi}\left|(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^j_{x_j}\right|^\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{1+\varepsilon_0}\right)^{n\alpha} \left|\left\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^1_x\right\}\right|_\alpha .$$

Отсюда и следует (2.20). □

Следствие 2.11. *Если* $\alpha < 0$ *и* $1+\varepsilon_0 < \frac{1}{q}$, *то имеет место*

$$\left|\left\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\right\}\right|_\alpha \leqslant \gamma \left|\left\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}^1_x\right\}\right|_\alpha, \tag{2.21}$$

где $\gamma > 0$ *зависит только от* n.

Доказательство. Неравенство (2.21) следует из (2.20) и определения α-емкости. □

6. Завершение доказательства теоремы 1.1 для $\alpha < 0$.

6.1. Случай $\alpha \neq -\infty$.

Положим

$$\Omega_1 = \Omega \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}^1_x = \frac{1}{20}\mathcal{Q}_x \quad (x \in \Omega_1) \tag{2.22}$$

и построим липшицеву миноранту для семейства $\{\mathcal{Q}^1_x\}_{x\in\Omega_1}$ при $q < \frac{1}{20}$. Тогда из предложения 2.7 при $\delta_0 = 4$ следует, что существуют такие числа $\lambda_i \in [3,5]$, что семейство кубов $K_{x_i} = \lambda_i \mathcal{Q}^i_{x_i}$ $(i \in I)$ является конечнократным и сильнозацепленным с коэффициентами кратности и зацепления, зависящими только от n.

Так как из предложения 2.3 следует, что

$$\Omega = \Omega_1 \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{Q}^i_{x_i} \subset \bigcup_{i\in I} \frac{1}{2} K_{x_i}, \tag{2.23}$$

то семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является семейством кубов Уитни для множества Ω.

Из (2.5), (2.22) и того, что $\lambda_i \in [3,5]$, имеем

$$K_{x_i} \subset 5\mathcal{Q}^i_{x_i} \subset 5\mathcal{Q}^1_{x_i} \subset \mathcal{Q}_{x_i},$$

т.е. выполнено условие a) определения 1.8 работы [1].

Так как в силу предложения 2.4 для любого $x \in \Omega_1 = \Omega$ найдется номер $i = i(x)$ такой, что

$$x \in \mathcal{Q}^i_{x_i} \subset 2(1+q)\mathcal{Q}^1_x \subset 4\mathcal{Q}^1_x \subset \frac{1}{5}\mathcal{Q}_x,$$

то из $\lambda_i \in [3,5]$ следует, что

$$x \in K_{x_i} = \lambda_i \mathcal{Q}^i_{x_i} \subset 5\mathcal{Q}^i_{x_i} \subset \mathcal{Q}_x,$$

т.е. выполнено и условие b) определения 1.8 работы [1].

Осталось оценить α-емкость для семейства $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$. Из следствия 2.11 при $1+\varepsilon_0=20$ с учетом (2.22) имеем

$$|\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}|_\alpha \leqslant C|\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha,$$

где $C>0$ зависит только от n и α. Осталось воспользоваться тем, что из $\alpha<0$ и вложения $\mathcal{Q}^i_{x_i}\subset K_{x_i}$ $(i\in I)$ следует неравенство

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant |\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}|_\alpha.$$

Поэтому

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant C|\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha,$$

где $C>0$ зависит только от n. $\square$

6.2. Случай $\alpha=-\infty$.

Представим R^n в виде объединения равных кубов V_i с непересекающимися внутренностями и объема

$$|V_i| = \frac{1}{16^n}\,\frac{1}{|\{\mathcal{Q}_x\}|_{-\infty}} = \frac{1}{16^n}\inf_{x\in\Omega}|\mathcal{Q}_x|. \tag{2.24}$$

Если $\Omega\cap V_i\neq\varnothing$, то возьмем произвольную точку $x_i\in\Omega\cap V_i$ и куб U_{x_i} с центром в точке x_i и радиуса $8r(V_i)$, тогда

$$V_i\subset\frac{1}{4}U_{x_i}. \tag{2.25}$$

Рассмотрим семейство кубов $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$. Нетрудно видеть, что это семейство конечнократно (с кратностью, зависящей только от n) и соизмеримо с коэффициентом $\lambda=1$.

Поэтому из леммы 5.15 работы [1] следует, что при $a=\frac{1}{2}$ найдутся такие числа $\varepsilon_i\in[\frac{1}{2},1]$ $(i\in I)$, что семейство кубов $K_{x_i}=\varepsilon_i U_{x_i}$ конечнократно и сильнозацеплено с коэффициентами кратности и зацепления, зависящими только от n.

Так как из (2.25) следует, что

$$\Omega\subset\bigcup_{i\in I}V_i\subset\bigcup_{i\in I}\frac{1}{4}U_{x_i}\subset\bigcup_{i\in I}\frac{1}{2}K_{x_i},$$

то семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является семейством кубов Уитни для множества Ω.

Так как для любых $i\in I$ и $x\in\Omega$ справедливо неравенство

$$|K_{x_i}|\leqslant|U_{x_i}|=8^n|V_i|=\frac{1}{2^n|\{\mathcal{Q}_x\}|_{-\infty}}\leqslant\frac{1}{2^n}|\mathcal{Q}_x|,$$

то $r(K_{x_i}) \leqslant \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}_x)$.

Поэтому $K_{x_i} \subset \mathcal{Q}_{x_i}$ и если $i = i(x)$ выбрано так, что $x \in K_{x_i}$, то $K_{x_i} \subset \mathcal{Q}_x$. Таким образом, семейство $\{K_{x_i}\}_{i \in I}$ является сужением семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x \in \Omega}$.

Осталось оценить α-емкость семейства $\{K_{x_i}\}_{i \in I}$. Имеем

$$|\{K_{x_i}\}|_{-\infty} = \sup_{i \in I} \frac{1}{|K_{x_i}|} \leqslant 2^n \sup_{i \in I} \frac{1}{|U_{x_i}|} = \\ = \frac{2^n}{8^n} \sup_{i \in I} \frac{1}{|V_i|} = 4^n |\{\mathcal{Q}_x\}|_{-\infty}.$$

□

§3. Доказательство теоремы 1.4

Доказательство теоремы 1.4 полностью повторяет доказательство теоремы 1.9 работы [1] для $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$ за исключением оценки α-емкости. При $\alpha \in (0, 1 - \frac{1}{n}]$ в условиях теоремы 1.4 используемое при доказательстве теоремы 1.9 следствие 5.20 (см. [1]) нужно заменить на

Предложение 3.1. *Если $\alpha \in (0, 1 - \frac{1}{n}]$ и выполнены предположения теоремы 1.4, то имеет место оценка*

$$|\{\mathcal{Q}^j_{x_j}\}|_\alpha \leqslant C \lambda^{-\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от n, а λ – коэффициент регулярности множества Ω.

Доказательство. Рассмотрим произвольную укладку $\pi = \{\mathcal{Q}^j_{x_j}\}$, состоящую из кубов семейства $\{\mathcal{Q}^i_{x_i}\}_{i \in I}$. Разобъем π на три укладки π_1, π_2, π_3 и оценим α-емкость для каждой из них.

В первую укладку π_1 возьмем те кубы $\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi$, для которых имеет место неравенство

$$r(\mathcal{Q}_{x_j}) \geqslant \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}^j_{x_j}). \tag{3.1}$$

Во вторую π_2 возьмем те кубы $\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi \setminus \pi_1$, для которых имеет место свойство:

$*$) для всех $x \in \frac{1}{2} \mathcal{Q}^j_{x_j} \cap \Omega$ справедливо неравенство

$$r(\mathcal{Q}_x) < \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}^j_{x_j}). \tag{3.2}$$

Оставшиеся кубы из π отнесем к π_3.

Так как $\mathcal{Q}_{x_j} \subset \mathcal{Q}^j_{x_j}$, то семейство $\{\mathcal{Q}_{x_j}\}$, отвечающее кубам $\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_1$, образует укладку и из (3.1) имеем

$$\sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_1} |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha \leqslant 2^{n\alpha} \sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_1} |\mathcal{Q}_{x_j}|^\alpha \leqslant 2^{n\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha. \tag{3.3}$$

Для оценки α-емкости укладки π_2 отметим, что без ограничения общности можно считать, что

$$\delta = \sup_{x \in \Omega} r(\mathcal{Q}_x) \leqslant \operatorname{diam} \Omega, \tag{3.4}$$

ибо в противном случае нашелся бы куб $\mathcal{Q}_{x_0}$, содержащий Ω и можно было бы в качестве семейства $\{K_{x_i}\}_{i \in I}$ взять один куб $\{2\mathcal{Q}_{x_0}\}$ и теорема 1.4 очевидным образом была бы верна. Поэтому без ограничения общности можно считать, что выполнено (3.4).

Так как из формулы (5.13) работы [1] следует, что $r(\mathcal{Q}^j_{x_j}) \leqslant \delta$, то из (3.4) и условия а) теоремы 1.4 имеем

$$\frac{|\frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j} \cap \Omega|}{|\frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j}|} \geqslant \lambda > 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим семейство кубов $\{\mathcal{Q}_x\}_{x \in \frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j} \cap \Omega}$. Из (3.5) и теоремы Безиковича (см. [3]) следует, что найдется семейство элементов $u_i(j) \subset \frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j} \cap \Omega$ таких, что кубы $\mathcal{Q}_{u_i(j)}$ образуют укладку и

$$\sum_i |\mathcal{Q}_{u_i(j)}| \geqslant C\lambda |\mathcal{Q}^j_{x_j}|, \tag{3.6}$$

где $C > 0$ зависит только от n.

Поэтому из того, что $\alpha \in (0, 1]$ следует, что

$$\sum_i |\mathcal{Q}_{u_i(j)}|^\alpha \geqslant \left(\sum_i |\mathcal{Q}_{u_i(j)}| \right)^\alpha \geqslant C^\alpha \lambda^\alpha |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha. \tag{3.7}$$

Осталось заметить, что из (3.2) и того, что $u_i(j) \in \frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j}$ следует, что семейство $\{\mathcal{Q}_{u_i(j)}\}_{i,j}$ является укладкой и поэтому из (3.7) следует, что

$$\sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_2} |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha \leqslant C\lambda^{-\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha, \tag{3.8}$$

где $C>0$ зависит только от n.

Рассмотрим теперь кубы $\mathcal{Q}^j_{x_j}$ из укладки π_3. Так как они не содержатся в π_1, то имеет место неравенство

$$r(\mathcal{Q}_{x_j}) < \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}^j_{x_j}). \tag{3.9}$$

Кроме того, из того, что куб $\mathcal{Q}^j_{x_j}$ не принадлежит π_2, следует, что найдется элемент $y_j \in \frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j} \cap \Omega$ такой, что

$$r(\mathcal{Q}_{y_j}) \geqslant \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}^j_{x_j}). \tag{3.10}$$

Из выпуклости Ω, непрерывности функции $x \to r(\mathcal{Q}_x)$ (см. условие b) теоремы 1.4) и неравенств (3.9)–(3.10) следует, что на отрезке $[x_j, y_j]$ найдется точка z_j такая, что

$$r(\mathcal{Q}_{z_j}) = \frac{1}{2} r(\mathcal{Q}^j_{x_j}). \tag{3.11}$$

Так как $z_j \in \frac{1}{2}\mathcal{Q}^j_{x_j}$, то кубы $\{\mathcal{Q}_{z_j}\}$ образуют укладку и, следовательно,

$$\sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_3} |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha = 2^{n\alpha} \sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi_3} |\mathcal{Q}_{z_j}|^\alpha \leqslant 2^{n\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha. \tag{3.12}$$

Этим оценка α-емкости для π_3 установлена.

Оценки (3.3), (3.8) и (3.12) с учетом того, что коэффициент регулярности $\lambda \leqslant 1$ дают в итоге требуемую оценку

$$\sum_{\mathcal{Q}^j_{x_j} \in \pi} |\mathcal{Q}^j_{x_j}|^\alpha \leqslant C\lambda^{-\alpha} |\{\mathcal{Q}_x\}|_\alpha, \tag{3.13}$$

где $C>0$ зависит только от n при фиксированном α. $\square$.

§4. Доказательство теоремы 1.6

Рассмотрим кубы $V_N = \mathcal{Q}(0, N)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ множества $\Omega_N = \Omega \cap V_N$.

Поступим следующим образом. Для семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega_1}$ построим липшицеву мажоранту (см. §5 работы [1]) с q равным показателю липшицевости семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$. Получим некоторые кубы $\{U_{x_i(1)}\}_{i\in I_1}$. Так как все кубы $\mathcal{Q}_x$ семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega_1}$ не вырождены, то в силу предложения 5.4 работы [1] имеем

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{i\in I_1} U_{x_i(1)}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим затем

$$\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \bigcup_{i\in I_1} U_{x_i(1)}. \tag{4.2}$$

Строя для семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega_2'}$ липшицеву мажоранту, получаем семейство $\{U_{x_i(2)}\}_{i\in I_2}$ и вложения

$$\Omega_2' \subset \bigcup_{i\in I_2} U_{x_i(2)}. \tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$\Omega_2 \subset \bigcup_{i\in I_1} U_{x_i(1)} \bigcup_{i\in I_2} U_{x_i(2)}. \tag{4.4}$$

Затем рассматривается множество

$$\Omega_3' = \Omega_3 \setminus \left(\bigcup_{i\in I_1} U_{x_i(1)} \bigcup_{i\in I_2} U_{x_i(2)}\right)$$

и строится липшицева мажоранта для семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega_3'}$. В результате этого процесса получаем семейство $\{U_{x_i(j)}\}_{i,j}$, причем имеет место вложение

$$\Omega \subset \bigcup_{i,j} U_{x_i(j)}. \tag{4.5}$$

Семейство $\{U_{x_i(j)}\}_{i,j}$ обладает рядом важных свойств. Первое свойство этого семейства состоит в том, что если U, V – два куба из этого семейства с центрами u и ν соответственно, то либо $u \notin V$, либо $\nu \notin U$.

Действительно, пусть, например, куб V построен позднее куба U, тогда из построения следует, что $\nu \notin U$.

Из этого свойства следует в силу леммы 5.2 (см. [1]), что семейство $\{\frac{1}{2+q}U_{x_i(j)}\}_{i,j}$ является укладкой. Поэтому семейство $\{(1+\varepsilon_0)U_{x_i(j)}\}_{i,j}$ является β-укладкой при $\beta = \frac{1}{(1+\varepsilon_0)(2+q)}$.

Второе важное свойство этого семейства состоит в том, что все кубы этого семейства совпадают с исходными, т.е.

$$U_{x_i(j)} = \mathcal{Q}_{x_i(j)}. \tag{4.6}$$

Действительно, рассмотрим первый шаг. По определению липшицевой мажоранты и того, что $\mathcal{Q}_x^1 = \mathcal{Q}_x$, имеем из формулы (5.7) (см. §5 работы [1]):

$$r(\mathcal{Q}_x^2) = \max\left(r(\mathcal{Q}_x),\, r(\mathcal{Q}_{x_1}) - q\|x - x_1\|\right).$$

Но, т.к. семейство $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем q, то

$$r(\mathcal{Q}_{x_1}) - q\|x - x_1\| \leqslant r(\mathcal{Q}_x).$$

Следовательно, $r(\mathcal{Q}_x^2) = r(\mathcal{Q}_x)$, т.е. кубы не увеличиваются. Итак, мы имеем семейство $\{\mathcal{Q}_{x_i(j)}\}$, которое обладает свойствами:

a) $\Omega \subset \bigcup\limits_{i,j} \mathcal{Q}_{x_i(j)}$;

b) семейство $\{(1+\varepsilon_0)\mathcal{Q}_{x_i(j)}\}_{i,j}$ является β-укладкой при $\beta = \frac{1}{(1+\varepsilon_0)(2+q)}$;

c) семейство $\{\mathcal{Q}_{x_i(j)}\}_{i,j}$ является липшицевым с показателем q (т.к. оно является частью семейства $\{\mathcal{Q}_x\}_{x\in\Omega}$).

Эти свойства позволяют применить технику пунктов 3 и 4 §5 работы [1]. Применяя ее, получаем (см. следствие 5.16 в [1]), что если $1+\varepsilon_0 < \frac{1}{q}$, то существуют такие числа $\lambda_{i,j} \in [1+\frac{\varepsilon_0}{2}, 1+\varepsilon_0]$, что семейство кубов $K_{i,j} = \lambda_{i,j}\mathcal{Q}_{x_i(j)}$ является конечнократным и сильнозацепленным.

Так как $q < \frac{1}{5}$, то можно взять $\varepsilon_0 = 4$. Тогда $\lambda_{i,j} \in [3,5]$ и $\mathcal{Q}_{x_i(j)} \subset \frac{1}{2}K_{i,j}$. Поэтому из a) следует, что

$$\Omega \subset \bigcup_{i,j} \frac{1}{2} K_{i,j}. \tag{4.7}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.6 осталось доказать, что для любого $x \in \Omega$ найдется куб $K_{i,j}$ такой, что $\mathcal{Q}_x \subset K_{i,j}$.

Для этого воспользуемся тем, что из предложения 5.4 §5 работы [1] следует вложение $\mathcal{Q}_x \subset (2+q)\mathcal{Q}_{x_i(j)}$ для некоторых i и j. Поэтому из $\lambda_{i,j} \geqslant 3$ получаем, что $\mathcal{Q}_x \subset K_{i,j}$. $\square$

Литература

1. Н. Я. Кругляк, *Гладкие аналоги разложений Кальдерона–Зигмунда, количественные теоремы о покрытиях и K-функционал для пары* $(L_q, \dot{W}_p^k)$. — Алгебра и Анализ **8, No. 4** (1996), 110–160.
2. Н. Я. Кругляк, *Количественные теоремы о покрытиях типа Уитни.* — Доклады РАН **352, No. 1** (1997), (в печати).
3. A. S. Besicovitch, *A general form of covering principle and relative differentiation of additive functions.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **41** (1945), 103–110.
4. M. Guzman, *Differentiability of integrals in* R^n. Lecture Notes of Math., 3481, Springer-Verlag, Berlin (1975) (русск. пер. Гусман М. Дифференцирование интегралов в R^n, Мир, М. (1978)).
5. H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets.* — Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

Krugljak N. Ya. Quantitative theorems on Whitney type coverings.

The crucial point of the construction of an almost optimal decomposition for the couple (L_q, W_p^k) was the covering theorem in which the parameter α (α-capacity) is controlled. Here we give a detailed proof of this theorem for negative α.

Ярославский государственный университет

Поступило 4 ноября 1996 г.