С. В. Кисляков

ОПЕРАТОРЫ, (НЕ)ПОДОБНЫЕ СЖАТИЮ: КОНТРПРИМЕР ПИЗЬЕ ЧЕРЕЗ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Эти заметки представляют собой слегка отредактированную и расширенную запись двух лекций, прочитанных мною в марте 1996г. на семинаре по линейному и комплексному анализу ПОМИ и посвященных контрпримеру Пизье к старой гипотезе о подобии сжатию всякого полиномиально ограниченного оператора. В одном пункте изложение будет существенно отличаться от оригинальных рассуждений Пизье — именно, основное неравенство (см. п. 1 ниже) будет доказано непосредственно, без привлечения броуновского движения или других вероятностных соображений. Прочие отличия носят редакционный характер и вызваны особенностями аудитории (к каковой причисляется и докладчик).

Оригинальное изложение см. в работах Пизье [7, 8]. Еще одно доказательство, не использующее не только броуновского движения, но и сингулярных интегралов, принадлежит Дэвидсону и Паульсену [3]; в их работах, однако, используются иные (впрочем, вполне стандартные) факты, не нужные здесь.

0. Постановка задачи

Напомним классическое неравенство фон Неймана:

$$\|p(T)\| \leqslant \sup_{|z|\leqslant 1} |p(z)|,$$

если T – сжатие в гильбертовом пространстве, а p – аналитический полином ($p \in \mathcal{P}_A$). Если оператор V подобен сжатию, т.е. $V = A^{-1}TA$, где $\|T\| \leqslant 1$, а A – обратимый оператор, то подобное неравенство, разумеется, выполняется с некоторой константой:

$$\|p(V)\| \leqslant C \sup_{|z|\leqslant 1} |p(z)|, \quad p \in \mathcal{P}_A. \tag{1}$$

Автор частично поддержан грантом РФФИ №96-01-00693.

Операторы, удовлетворяющие этой оценке, называются полиномиально ограниченными. То, что не всякий полиномиально ограниченный оператор подобен сжатию, было доказано лишь в январе 1996г (контрпример Пизье).

Важно отметить, однако, что операторы, подобные сжатию, характеризуются неким родственным неравенством (теорема Паульсена). Сформулируем его. Через C_A мы будем обозначать диск-алгебру, через $B(H)$ – пространство всех операторов в гильбертовом пространстве H, через M_n – пространство матриц размера $n \times n$, отождествляемое с $B(\mathbb{C}^n)$.

Определение. *Линейный оператор $\mathcal{T} : C_A \to B(H)$ называется вполне ограниченным, если для любого конечного набора $\{f_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $f_{ij} \in C_A$, и любых векторов x_j и y_i из H справедливо неравенство*

$$\Big|\sum_{i,j} \big(\mathcal{T}(f_{ij})x_j, y_i\big)\Big| \leqslant C\big(\sum_j \|x_j\|^2\big)^{1/2}\big(\sum_i \|y_i\|^2\big)^{1/2} \sup_{|z|\leqslant 1} \|\{f_{ij}(z)\}\|_{M_n} \tag{2}$$

(постоянная не зависит от n, функций f_{ij} и векторов x_i, y_j). Эквивалентным образом, можно потребовать, чтобы

$$\big(\sum_i \|\sum_j \mathcal{T}(f_{ij})x_j\|^2\big)^{1/2} \leqslant C\big(\sum_j \|x_j\|^2\big)^{1/2} \sup_{|z|\leqslant 1} \|\{f_{ij}(z)\}\|_{M_n} \tag{3}$$

для любой матрицы $\{f_{ij}\}$ как выше и любых векторов $x_j \in H$.

См. [9] и имеющиеся там ссылки по поводу вполне ограниченных отображений (которые бывают заданы не только на диск-алгебре, но такая общность нам не понадобится).

Теорема Паульсена. *Оператор $T \in B(H)$ подобен сжатию тогда и только тогда, когда отображение $p \mapsto p(T)$ $(p \in \mathcal{P}_A)$ продолжается до вполне ограниченного отображения диск-алгебры в $B(H)$.*

Доказательство можно найти, например, в книге [9] (впрочем, "легкая половина" этой теоремы ("только тогда") будет доказана ниже, в п. 5).

Мы начнем изложение конструкции Пизье с *основного неравенства*, относящегося к анализу Фурье.

1. Основное неравенство

Пусть $\{e_n\}$ – базисные орты пространства l^2. Для функции f, аналитической в круге, через $S_n f$ мы будем обозначать n-ый отрезок ее ряда Тейлора: $S_n f = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \hat{f}(k) z^k$.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел удовлетворяет условию*

$$\sup_{n\geqslant 0} \sum_{2^n\leqslant k\leqslant 2^{n+1}} |a_k|^2 < \infty. \tag{4}$$

Тогда

$$\|\sum_{n\geqslant 1} e_n n^{-1} a_n S_{n-1}(f') z^{-n+1}\|_{\mathrm{BMO}(l^2)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}} \tag{5}$$

для всякой функции f, аналитической в единичном круге, граничные значения которой лежат в пространстве BMO.

Замечание. Если положить $b_n = n^{-1} a_n$, то условие (4) можно переписать так:

$$\sup_{n\geqslant 1} n\Big(\sum_{k\geqslant n} |b_k|^2\Big)^{1/2} < \infty. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Неравенство (5) достаточно проверить для $f \in \mathcal{P}_A$. Обозначим через K_n n-е ядро Фейера, а через $\mathbb{P}_-$ “отрицательный” проектор Рисса:

$$\mathbb{P}_- f = \sum_{n<0} \hat{f}(n) z^n.$$

Пусть $\delta(f)$ – выражение, стоящее под знаком нормы в левой части неравенства (5). Учитывая явный вид коэффициентов Фурье функций K_n, можем написать

$$\delta(f) = \sum_{n\geqslant 1} e_n a_n \mathbb{P}_-\big((z^{-n} f) * K_n\big) = \mathbb{P}_-\Big(\sum_{n\geqslant 1} e_n a_n K_n * (z^{-n} f)\Big).$$

Поскольку оператор $\mathbb{P}_-$ отображает пространство BMO(l^2) в себя, достаточно проверить, что

$$\|\sum_{n\geqslant 1} e_n a_n K_n * (z^{-n} f)\|_{\mathrm{BMO}(l^2)} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}, \quad f \in \mathcal{P}_A.$$

Заметим, что выражение под знаком нормы в левой части последнего неравенства имеет смысл для любого (не обязательно аналитического) тригонометрического полинома f и зависит лишь от его аналитической составляющей $\mathbb{P}_+f$ ($\mathbb{P}_+ = \mathrm{id} - \mathbb{P}_-$). Так как оператор $\mathbb{P}_+$ отображает L^∞ на $\mathrm{BMO}A = \mathrm{BMO} \cap H^2$, мы видим, что достаточно доказать неравенство

$$\|\sum_{n\geqslant 1} e_n a_n K_n * (z^{-n} f)\|_{\mathrm{BMO}(l^2)} \leqslant C\|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L^\infty,$$

или, иными словами, проверить, что оператор

$$A : f \mapsto \sum_{n\geqslant 1} e_n a_n K_n * (z^{-n} f)$$

действует из L^∞ в $\mathrm{BMO}(l^2)$.

Мы будем трактовать оператор A как сингулярный интеграл типа Кальдерона–Зигмунда с ядром

$$\mathcal{K}(\zeta, z) = \sum_{n\geqslant 1} e_n a_n K_n(\zeta\bar{z})\bar{z}^n$$

($\mathcal{K}$ – l^2-значная функция). Справедлива (если угодно, эвристическая) формула

$$(Af)(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{K}(\zeta, z) f(z)\, dm(z),$$

где m – нормированная мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$.

Хорошо известно (см., например, [4]), что для того, чтобы оператор A действовал из L^∞ в $\mathrm{BMO}(l^2)$, достаточно, чтобы

(а) он действовал из L^2 в $L^2(l^2)$ и

(в) ядро $\mathcal{K}$ удовлетворяло условию Хёрмандера по переменной ζ: если I – дуга и $\zeta_1, \zeta_2 \in I$, то

$$\int_{\mathbb{T}\setminus 10I} \|\mathcal{K}(\zeta_1, z) - \mathcal{K}(\zeta_2, z)\|_{\ell^2} dm(z) \leqslant C \tag{7}$$

($10I$ – дуга с тем же центром, что и I, но растянутая в 10 раз; C не зависит от I, ζ_1, ζ_2).

L^2-непрерывность оператора A получается простым вычислением. Полагая $b_n = a_n/n$, находим, меняя порядок суммирования:

$$\begin{aligned}\|Af\|^2_{L^2(l^2)} &= \sum_{n\geqslant 1} b_n^2 \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2|\hat f(k)|^2 + \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n} (2n-k)^2|\hat f(k)|^2\Big) \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} |\hat f(k)|^2\big(k^2\sum_{n\geqslant k} b_n^2\big) + \sum_{k\geqslant 1}|\hat f(k)|^2 \sum_{k/2\leqslant n\leqslant k-1}(2n-k)^2 b_n^2 \\ &\leqslant C\sum_{k\geqslant 1}|\hat f(k)|^2\big(k^2\sum_{n\geqslant k} b_n^2 + k^2\sum_{n\geqslant k/2} b_n^2\big) \leqslant C\|f\|_2^2\end{aligned}$$

в силу (6).

Проверим условие Хёрмандера. В сущности, требуемое неравенство известно. Вычисления, подобные приведенным ниже, встречаются часто (см., например, стандартное доказательство теоремы Михлина–Хёрмандера о мультипликаторах или различные варианты теории Литлвуда–Пэли).

Переходя от $\mathbb{T}$ к отрезку $(-\pi,\pi)$, мы видим, что неравенство (7) сводится к такой оценке: если $y\in(0,\pi)$, то

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{8y}^{\pi}\Big(\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^2|K_n(x-y)-K_n(x)|^2\Big)^{1/2} dx \leqslant \text{const}\,.$$

Имеем: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\frac12(n+1)t}{\sin^2\frac12 t}$,

$$\frac{d}{dt}K_n(t) = \frac{[\sin\frac12(n+1)t][\cos\frac12(n+1)t]}{\sin^2\frac12 t} - \frac{1}{n+1}\frac{\cos\frac12 t\sin^2\frac12(n+1)t}{\sin^3\frac12 t}.$$

Отсюда получаются оценки

$$|K_n(t)| \leqslant \frac{C}{(n+1)t^2}, \quad 0<t\leqslant\pi; \tag{8}$$

$$\Big|\frac{d}{dt}K_n(t)\Big| \leqslant \frac{C(n+1)}{t}, \quad 0<t\leqslant\pi. \tag{9}$$

(В первом случае мы оценили $|\sin\frac12(n+1)t|$ сверху единицей, а во втором — величиной $C(n+1)|t|$).

Пусть $x \geqslant 8y$, $2^{-k} \leqslant y \leqslant 2^{-k+1}$, $2^{-j} \leqslant x < 2^{-j+1}$ (тогда $j \leqslant k-2$). В силу (4) находим:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n^2 |K_n(x-y) - K_n(x)|^2 = \sum_{s\geqslant 0} \sum_{2^s \leqslant n < 2^{s+1}} a_n^2 |K_n(x-y) - K_n(x)|^2$$
$$\leqslant C \sum_{s\geqslant 0} \sup_{2^s \leqslant n < 2^{s+1}} |K_n(x-y) - K_n(x)|^2.$$

Используя (8) при $n \geqslant c2^{\frac{j+k}{2}}$ и (9) при $n \leqslant C2^{\frac{j+k}{2}}$, мы можем продолжить оценку так:

$$\ldots \leqslant C\Bigg(\sum_{s \leqslant \frac{j+k}{2}} 2^{2s} 2^{2j} y^2 + \sum_{s > \frac{j+k}{2}} 2^{-2s} 2^{4j} \Bigg)$$
$$\leqslant C\big(2^{3j+k} y^2 + 2^{3j-k}\big) \sim C2^{3j-k},$$

поскольку $y \sim 2^{-k}$. Теперь видно, что

$$I \leqslant C \sum_{j \leqslant k-2} 2^{-j} 2^{\frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k} \sim \text{const}\,,$$

как и требовалось. •

2. Операторы Ганкеля. Операторы Пеллера

Пусть $\varphi : \mathbb{T} \to B(H)$ – функция (предположим, например, что при всех x из H функция $\varphi(\cdot)x$ квадратично интегрируема). Определим на H-значных аналитических полиномах оператор Ганкеля Γ_φ:

$$\Gamma_\varphi(p) = \mathbb{P}_-(\varphi p);$$

определение корректно, ибо если $p(z) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant l} x_k z^k$ $(x_k \in H)$, то $\varphi(z)p(z) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant l} z^k \varphi(z) x_k \in L^2(H, dm)$.

Разложим пространство $L^2(H)$ в ортогональную сумму $L^2(H) = H^2_-(H) \oplus H^2(H)$ $(H^2_-(H) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_- L^2(H))$. Нам встретятся лишь случаи, когда Γ_φ продолжается до непрерывного оператора из $H^2(H)$ в $H^2_-(H)$. Эта ситуация описывается векторной теоремой Нехари, которая, однако, нам не понадобится.

Функция φ называется *символом* оператора Γ_φ. Символ определяется неоднозначно: если $\hat{\varphi}(n) = \hat{\varphi}_1(n)$ при $n < 0$, то $\Gamma_\varphi = \Gamma_{\varphi_1}$

(здесь коэффициенты Фурье $\hat{\varphi}(n) = \int \varphi \bar{z}^n$ являются операторами в H).

Пусть S – оператор умножения на z в $H^2(H)$, а σ – оператор в $H^2_-(H)$, определяемый равенством $\sigma f = \mathbb{P}_-(zf)$. Легко проверяется фундаментальное соотношение для ганкелевых операторов: $\sigma\Gamma_\varphi = \Gamma_\varphi S$.

Теперь рассмотрим в прямой сумме $H^2_-(H) \oplus H^2(H) = L^2(H)$ *оператор Пеллера* (см. [6]; независимо такие операторы рассматривали Фояш и Виллиамс, см. [2]):

$$T = T_\varphi \begin{pmatrix} \sigma & \Gamma_\varphi \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Приведем более детальную формулировку результата Пизье.

Теорема Пизье. *Существуют полиномиально ограниченные операторы вида T_φ, не подобные сжатию.*

В примере Пизье пространство H бесконечномерно, и это существенно — см. [1].

Сейчас мы укажем некое условие, достаточное для полиномиальной ограниченности операторов вида T_φ. Позже мы увидим, что среди операторов, удовлетворяющих этому условию, есть неподобные сжатию.

Обозначим через M_g оператор умножения на (скалярную) аналитическую функцию g (он действует в $H^2(H)$). Непосредственным счетом с использованием фундаментального соотношения для ганкелевых операторов проверяется, что

$$T_\varphi^n = \begin{pmatrix} \sigma^n & n\Gamma_\varphi S^{n-1} \\ 0 & S^n \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1,$$

откуда

$$p(T_\varphi) = \begin{pmatrix} p(\sigma) & \Gamma_\varphi M_{p'} \\ 0 & p(S) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_A.$$

Таким образом, оператор T_φ полиномиально ограничен тогда и только тогда, когда

$$\|\Gamma_\varphi M_{p'}\| \leqslant C \sup_{|z|\leqslant 1} |p(z)|, \quad p \in \mathcal{P}_A.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n\}$ – *последовательность операторов в* $B(H)$, *удовлетворяющая условию*

$$\|\sum \alpha_j X_j\|_{B(H)} \leqslant C\bigl(\sum |\alpha_j|^2\bigr)^{1/2}, \ \ \alpha_j \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Пусть, далее, числовая последовательность $\{a_k\}$ *удовлетворяет условию* (4), *а функция* $\varphi : \mathbb{T} \to B(H)$ *задана формулой*

$$\varphi(z) = \sum_{j\geqslant 1} j^{-1} a_j X_j \bar{z}^j. \tag{11}$$

Тогда $\|\Gamma_\varphi M_{p'}\| \leqslant C\|p\|_\infty$, $p \in \mathcal{P}_A$, *т.е. оператор* T_φ *полиномиально ограничен.*

Доказательство. Пусть g – H-значный аналитический полином, и пусть $p \in \mathcal{P}_A$. Тогда

$$\begin{aligned}\Gamma_\varphi M_{p'} g = \mathbb{P}_-(\varphi p' g) &= \mathbb{P}_-\Bigl(\sum_{j\geqslant 1} j^{-1} a_j \bar{z}^j p'(z) X_j(g(z))\Bigr) \\ &= \mathbb{P}_-\Bigl[\sum_{j\geqslant 1} j^{-1} a_j \mathbb{P}_-\bigl(\bar{z}^j p'(z)\bigr) X_j(g(z))\Bigr].\end{aligned} \tag{12}$$

В силу теоремы 1 (см. неравенство (5)),

$$\|\sum_{j\geqslant 1} e_j j^{-1} a_j \mathbb{P}_-(\bar{z}^j p'(z))\|_{\mathrm{BMO}(l^2)} \leqslant c\|p\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant c\|p\|_\infty$$

(как и в (5), $\{e_j\}$ – орты пространства l^2).

Прибегнем к двойственности между H^1 и BMO(которая, разумеется, сохраняется и в l^2-значной ситуации). Слева в последнем неравенстве под знаком нормы стоит функция из $\mathrm{BMO}_-(l^2) = \mathrm{BMO}(l^2) \cap H^2_-(l^2)$. В силу упомянутой двойственности пространство $\mathrm{BMO}_-(l^2)$ отождествляется с факторпространством $L^\infty(l^2)/H^\infty(l^2)$. Следовательно, найдутся такие аналитические функции h_j, $j \geqslant 1$, что

$$\sup_{|z|\leqslant 1}\Bigl(\sum_{j\geqslant 1} |j^{-1} a_j \mathbb{P}_-\bigl(\bar{z}^j p'(z)\bigr) + h_j(z)|^2\Bigr)^{1/2} \leqslant C\|p\|_\infty. \tag{13}$$

Пусть $G_j(z) = j^{-1} a_j \mathbb{P}_-\bigl(\bar{z}^j p'(z)\bigr) + h_j(z)$ – функции, стоящие под знаком модуля в (13). Поскольку функции h_j аналитичны, мы можем переписать (12) в виде

$$\Gamma_\varphi(M_{p'}g) = \mathbb{P}_-\big[\sum_{j\geqslant 1} G_j(z)X_j(g(z))\big].$$

С другой стороны, в силу (10)и (13), при фиксированном z имеем

$$\begin{aligned}\|\sum_{j\geqslant 1} G_j(z)X_j(g(z))\|_H \leqslant \|\sum_{j\geqslant 1} G_j(z)X_j\|_{B(H)}\|g(z)\|_H \\ \leqslant C\|p\|_\infty\|g(z)\|_H,\end{aligned}$$

откуда вытекает утверждение теоремы 2. •

3. План дальнейшего изложения

Среди операторов T_φ, фигурирующих в теореме 2, мы хотим найти операторы, не подобные сжатию. Как выбрать последовательность $\{X_n\}$? Ввиду [1] довольно ясно, что операторы X_n не должны коммутировать. Пизье предложил рассмотреть последовательность $\{X_n\}$, удовлетворяющую *каноническим антикоммутационным соотношениям*

$$X_nX_k + X_kX_n = 0, \quad X_nX_k^* + X_k^*X_n = \delta_{nk}I, \\ 1 \leqslant n,k < \infty. \tag{14}$$

Хорошо известно, что такая последовательность существует (и даже единственна в некотором смысле); мы приведем доказательство в п. 6. Проверим, что из (14) вытекает (10).

Лемма 1. *Если выполнены условия* (14), *то* $\|\sum \alpha_i X_i\| = \big(\sum|\alpha_i|^2\big)^{1/2}$ *для любых комплексных скаляров* α_i.

Доказательство. Пусть $V = \sum \alpha_i X_i$. Тогда $V^2 = 0$ и $V^*V + VV^* = \big(\sum|\alpha_i|^2\big)I$. Далее, $\|V^*VV^*V\| = \|V\|^4$, но $V^*V^*VV = 0$, поэтому

$$\|V\|^4 = \|V^*(VV^*)V + V^*(V^*V)V\| = \\ \|V^*\big[\big(\sum|\alpha_i|^2 I\big)\big]V\| = \big(\sum|\alpha_i|^2\big)\|V\|^2. \qquad \bullet$$

Теорема 3. *Если операторы X_n удовлетворяют соотношениям (14), функция φ определена формулой (11), а ряд $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^2$ расходится, то оператор T_φ не подобен сжатию.*

Отсюда вытекает теорема Пизье, поскольку условие (4) не влечет сходимости ряда $\sum\limits_{j\geqslant 1}|a_j|^2$.

В доказательстве теоремы 3 большую роль будет играть понятие полной ограниченности (см. п. 0). Во-первых, мы докажем "половину" теоремы Паульсена.

Предложение 1. *Если оператор $V\in B(H)$ подобен сжатию, то отображение $p\mapsto p(V)$, $p\in C_A$, вполне ограничено.*

Если это предложение уже известно, возьмем оператор T_φ из теоремы 3 и любые векторы $x,y\in H$. Легко проверяется формула

$$\begin{aligned}
&\left(p(T_\varphi)\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{1}\cdot x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar z y\\ 0\end{pmatrix}\right)=\bigl(\Gamma_\varphi(p'\cdot x),\bar z y\bigr)\\
&=\sum_{j\geqslant 1} j^{-1}a_j\bigl(X_j(x),y\bigr)\int_{\mathbb{T}}\mathbb{P}_-\bigl(\bar z^j p'(z)\bigr)z\,dm\\
&=\Bigl(\sum_{j\geqslant 1}a_j\hat p(j)X_j(x),y\Bigr),\qquad p\in\mathcal{P}_A.
\end{aligned}$$

Значит, если оператор T_φ подобен сжатию, и, стало быть, отображение $p\mapsto p(T_\varphi)$ вполне ограничено, то вполне ограничено и отображение u, задаваемое равенством

$$u(p)=\sum_{j\geqslant 1}a_j\hat p(j)X_j,\qquad p\in C_A. \tag{15}$$

Все решается следующим утверждением.

Предложение 2. *Если $\sum|a_j|^2=\infty$, то отображение (15) не является вполне ограниченным.*

Для доказательства предложений 1 и 2 и построения операторов, удовлетворяющих условию (14), нужна минимальная информация о C^*-алгебрах.

4. Отступление: C^*-алгебры

Напомним, что C^*-алгебра определяется либо как банахова алгебра с инволюцией $x \mapsto x^*$, в которой выполнено тождество $\|xx^*\| = \|x\|^2$, либо как замкнутая самосопряженная подалгебра в $B(H)$ (эти определения эквивалентны), и что алгебраический $(*)$-изоморфизм между двумя C^*-алгебрами является изометрией. Нам понадобится еще понятие тензорного произведения C^*-алгебр.

Если H_1 и H_2 – гильбертовы пространства, то через $H_1 \otimes H_2$ обозначается множество $C_2^a(H_1, H_2)$ всех *антилинейных* ($A\lambda x = \bar{\lambda}Ax$) операторов Гильберта–Шмидта из H_1 в H_2; скалярное произведение в $C_2^a(H_1, H_2)$ определяется формулой $(A, B) = \mathrm{trace}(AB^*)$. (Для антилинейного оператора B сопряженный B^* определяется формулой $(Bx, y) = (B^*y, x)$; при этом оператор B^* антилинеен, однако отображение $B \mapsto B^*$ линейно и т.д.).

Если $x \in H_1$, $y \in H_2$, то через $x \otimes y$ обозначается оператор $(x, \cdot)y \in C_2^a(H_1, H_2) = H_1 \otimes H_2$.

Пусть A_1 и A_2 – две C^*-алгебры. Реализуем их как замкнутые самосопряженные подалгебры в $B(H_1)$ и $B(H_2)$. Если $u \in A_1$, $v \in A_2$, то определим оператор $u \otimes v$ на $H_1 \otimes H_2$ равенством

$$(u \otimes v)(x \otimes y) = ux \otimes vy, \quad x \in H_1,\ y \in H_2,$$

или, эквивалентно,

$$(u \otimes v)T = vTu^*, \quad T \in C_2^a(H_1, H_2)$$

(из последнего равенства вытекает корректность первоначального определения). Легко проверить, что $u^* \otimes v^* = (u \otimes v)^*$. Через $A_1 \otimes A_2$ мы обозначим C^*-подалгебру в $B(H_1 \otimes H_2)$, порожденную всеми операторами вида $u \otimes v$, $u \in A_1$, $v \in A_2$.

Легко видеть, что изоморфный тип построенной C^*-алгебры в действительности не зависит от конкретной реализации алгебр A_1 и A_2 алгебрами операторов. Посмотрим, почему это так, если $A_1 = B(\mathbb{C}^n) = M_n$ – алгебра всех матриц порядка n (иные случаи нам не понадобятся, однако общее утверждение лежит лишь в одном шаге от этого). Пусть F и G – две конкретные реализации алгебры A_2. Как линейные пространства, $M_n \otimes F$ и $M_n \otimes G$ представляют собой прямые суммы одинакового числа копий алгебр F и G, а покомпонентное отображение $M_n \otimes F \to M_n \otimes G$ будет, очевидно, алгебраическим $(*)$-изоморфизмом. Значит, оно будет и изометрией.

5. Переформулировка условия полной ограниченности

Лемма 2. *Отображение $\mathcal{T}: C_A \to B(H)$ является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда для любых k и n любого набора $B_0, \ldots, B_k$ скалярных матриц размера $n \times n$ выполняется неравенство*

$$\|\sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s \otimes \mathcal{T}(z^s)\|_{M_n\otimes B(H)} \leqslant C \sup_{|z|\leqslant 1} \|\sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s z^s\|_{M_n}. \tag{16}$$

Доказательство. Запишем условие полной ограниченности в форме (3):

$$\Big(\sum_i \|\sum_j \mathcal{T}(f_{ij})x_j\|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\Big(\sum_j \|x_j\|^2\Big)^{1/2} \sup_z \|\{f_{ij}(z)\}\|_{M_n},$$

где $F = \{f_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ – матрица аналитических полиномов. Свяжем ее с матрицами B_s из условия леммы формулой

$$F(z) = \sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s z^s.$$

Пусть $\{e_j\}$ – базисные орты пространства $\mathbb{C}^n$, и пусть $u: \mathbb{C} \to H$ – антилинейный оператор (Гильберта–Шмидта), переводящий e_j в x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Записав $B_s = \{b_{ij}^{(s)}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, найдем

$$\begin{aligned}\sum_j \mathcal{T}(f_{ij})x_j &= \sum_s \sum_j b_{ij}^{(s)} \mathcal{T}(z^s)x_j \\ &= \sum_s \mathcal{T}(z^s)\big[u\big(\sum_j \overline{b_{ij}^{(s)}} e_j\big)\big] = \sum_s \mathcal{T}(z^s)\big[uB_s^* e_i\big]\end{aligned}$$

(матрица B_s обычным образом отождествляется с оператором в $\mathbb{C}^n$). Поэтому неравенство (3), воспроизведенное выше, эквивалентно неравенству

$$\|\sum_s \mathcal{T}(z^s)uB_s^*\|_{C_2^a(\mathbb{C}^n,H)} \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{C_2^a(\mathbb{C}^n,H)} \sup_{|z|\leqslant 1} \|\{f_{ij}(z)\}\|_{M_n}.$$

Варьируя векторы x_j, оператор u можно сделать произвольным. Поэтому последнее неравенство переписывается в форме (16). $\bullet$

Доказательство предложения 1. Можно считать, что V – сжатие. Построим унитарную дилатацию (см., например, [5]) для V, т.е. унитарный оператор U в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \supset H$, такой что

$$f(V) = Pf(U)\big|_H, \quad f \in \mathcal{P}_A$$

($P : \mathcal{H} \to H$ – ортогональный проектор). Снова запишем определения полной ограниченности отображения $f \mapsto f(V)$ в форме (3):

$$\Big(\sum_i \|P\big(\sum_j f_{ij}(U)x_j\big)\|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\big(\sum_j \|x\|^2\big)^{1/2} \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\{f_{ij}(z)\}\|_{M_n},$$
$$x_j \in H, \quad f_{ij} \in \mathcal{P}_A.$$

Отсюда видно, что достаточно проверить полную ограниченность отображения $f \mapsto f(U)$ ($C_a \to B(\mathcal{H})$). На этот раз запишем нужное неравенство в виде (16):

$$\|\sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s \otimes U^k\|_{M_n\otimes B(\mathcal{H})} \leqslant C \sup_{|z|\leqslant 1} \|\sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s z^s\|_{M_n},$$

где B_s – скалярные матрицы размера $n \times n$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$. Норма слева в действительности определяется C^*-алгеброй, порожденной оператором U. Эта алгебра отождествляется с $C(\operatorname{spec} U)$ (а сам оператор U при таком отождествлении переходит в функцию z). Значит, норма слева есть

$$\|\sum_{0\leqslant s\leqslant k} B_s \otimes z^s\|_{M_n\otimes C(\operatorname{spec} U)} = \sup_{z\in\operatorname{spec} U} \|\sum_s B_s \bar{z}^s\|_{M_n},$$

что, разумеется, не превосходит правой части. •

6. Канонические антикоммутационные соотношения

Лемма 3. *В пространстве* $\mathbb{C}^{2^n}$ *существуют* n *операторов* $X_1, \ldots,$ X_n *(матриц* $2^n \times 2^n$*), удовлетворяющих соотношениям* (14).

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ надо удовлетворить лишь двум соотношениям: $X_1^2 = 0$, $X_1X_1^* + X_1^*X_1 = I$. Годится (например) матрица $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Предположим, что построены матрицы $X_1, \dots, X_n$ размера $2^n \times 2^n$, удовлетворяющие соотношениям (14) и имеющие структуру $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где α, β – матрицы размера $2^{n-1} \times 2^{n-1}$. Мы хотим добиться того же в размерности 2^{n+1}. Прежде всего, рассмотрим следующие n матриц размера $2^{n+1} \times 2^{n+1}$:

$$\widetilde{X}_j = \begin{pmatrix} 0 & X_j \\ X_j & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Они имеют нужную структуру, и легко проверить, что соотношения (14) для них сохраняются. Добавим к ним матрицу $\widetilde{X}_{n+1} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

(все блоки в A и B имеют размер $2^{n-1} \times 2^{n-1}$). Проверим оставшиеся соотношения. Прежде всего,

$$\widetilde{X}_{n+1}^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} = 0,$$

$$\widetilde{X}_{n+1}^* \widetilde{X}_{n+1} + \widetilde{X}_{n+1} \widetilde{X}_{n+1}^* = \begin{pmatrix} B^*B & 0 \\ 0 & A^*A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AA^* & 0 \\ 0 & BB^* \end{pmatrix} = I.$$

Далее, при $j \leqslant n$ имеем

$$\widetilde{X}_j \widetilde{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} X_j B & 0 \\ 0 & X_j A \end{pmatrix}, \quad \widetilde{X}_{n+1} \widetilde{X}_j = \begin{pmatrix} AX_j & 0 \\ 0 & BX_j \end{pmatrix}.$$

Из того, что матрица X_j сама имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (блоки размера $2^{n-1} \times 2^{n-1}$), легко усмотреть, что $X_j B = -AX_j$, $X_j A = -BX_j$, так что $\widetilde{X}_j \widetilde{X}_{n+1} + \widetilde{X}_{n+1} \widetilde{X}_j = 0$, $j \leqslant n$. Аналогично проверяются и равенства $\widetilde{X}_j^* \widetilde{X}_{n+1} + \widetilde{X}_{n+1} \widetilde{X}_j^* = 0$, $j \leqslant n$. $\bullet$

Любопытно отметить, что все построенные матрицы вещественны.

Лемма 4. *Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ и $(X_1', \dots, X_n')$ – два набора операторов, удовлетворяющих соотношениям (14). Пусть A_n и A' – C^*-алгебры, порожденные этими наборами. Тогда существует алгебраический $(*)$-изоморфизм (стало быть, и изометрия) алгебры A_n на A_n', переводящий X_j в X_j', $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть $K_0 = \{I\}$. Определим по индукции

$$K_j = K_{j-1} \cup K_{j-1}X_j \cup X_j^* K_{j-1} \cup X_j^* K_{j-1} X_j, \;\; j \geqslant 1.$$

Все эти множества конечны, и легко видеть, что A_n есть линейная оболочка множества K_n.

Утверждение. *Множество K_n линейно независимо.*

Если это доказано, то рассмотрим таблицу умножения в базисе K_n: разложим произведение любых двух базисных элементов снова по этому базису. Аналогично поступим с операцией сопряжения. Нетрудно понять, что коэффициенты в этих таблицах можно вычислить, основываясь исключительно на соотношениях (14), а не на конкретной природе операторов $\{X_j\}$; иными словами, аналогичные построения с операторами X_j' приведут к таблицам с теми же коэффициентами. Это доказывает лемму 4.

Доказательство утверждения.

Сублемма. *Если $j_1, \dots, j_s$ – попарно различные индексы, то $X_{j_1}X_{j_2}\dots X_{j_s} \neq 0$.*

Действительно, обозначим $Z = X_{j_2}\dots X_{j_s}$. Если $X_{j_1}Z = 0$, то $X_{j_1}^*X_{j_1}Z = 0$, $X_{j_1}X_{j_1}^*Z = \pm X_{j_1}ZX_j^* = 0$, откуда $Z = (X_{j_1}X_{j_1}^* + X_{j_1}^*X_{j_1})Z = 0$, и т.д.

Удобно проверять по индукции следующее свойство, более сильное, чем нужное нам утверждение: если $0 \leqslant l < j_1 < \dots < j_s$, то множество

$$X_{j_s}^* \dots X_{j_1}^* K_l X_{j_1} \dots X_{j_s}$$

линейно независимо.

База ($l = 0$) вытекает из сублеммы.

Предположим, что мы проверили указанное свойство при некотором l. Пусть $l + 1 < j_1 < \dots < j_s$. Обозначим $Y = X_{j_1}\dots X_{j_s}$. Пусть векторы x_0, x_1, x_2, x_3 – линейные комбинации векторов набора K_l; предположим, что

$$Y^*x_0Y + Y^*x_1X_{l+1}Y + Y^*X_{l+1}^*x_2Y + Y^*X_{l+1}^*x_3X_{l+1}Y^* = 0.$$

Надо доказать, что $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Так как $YX_{l+1} = \pm X_{l+1}Y$ и $X_{l+1}^*Y^* = \pm Y^*X_{l+1}^*$, то, умножив справа на X_{l+1} и слева на X_{l+1}^*, получаем

$$Y^*X_{l+1}^*x_0X_{l+1}Y = 0,$$

откуда $x_0 = 0$ по индукционному предположению. Учтя это в исходном равенстве и умножив слева на X_{l+1}^*, получим

$$Y^* X_{l+1}^* x_1 X_{l+1} Y = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, и т.д.

Теперь, чтобы построить бесконечную последовательность операторов, удовлетворяющих условиям (14), достаточно рассмотреть естественные изометрические вложения

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots .$$

Индуктивный предел (пополнение объединения) этой последовательности будет C^*-алгеброй, которую можно реализовать как алгебру операторов, и т.д. •

7. Доказательство предложения 2

Это — последнее, что нам осталось. Пусть операторы X_j удовлетворяют соотношениям (14), $\sum |a_j|^2 = \infty$; предположим, что отображение (15) вполне ограничено. По лемме 2, для любых скалярных матриц $B_0, \dots, B_k$ размера (скажем) $2^k \times 2^k$ выполняется неравенство

$$\|\sum_{0 \leqslant s \leqslant k} B_s \otimes u(z^s)\|_{M_{2^k} \otimes B(H)} \leqslant c \sup_{|z| \leqslant 1} \|\sum_{0 \leqslant s \leqslant k} B_s z^s\|_{M_{2^k}}.$$

Поскольку $u(z^s) = a_s X_s$, норма слева определяется C^*-алгеброй, порожденной операторами $X_1, \dots, X_k$. Мы реализуем эти операторы матрицами размера $2^k \times 2^k$, как в п. 6; положим еще $B_s = \bar{a}_s \bar{X}_s$ (над X_s комплексное сопряжение можно было бы не писать ввиду вещественности построенных матриц). Итак, получаем, используя еще лемму 1:

$$\begin{aligned}\|\sum_{0 \leqslant s \leqslant k} \big(\bar{a}_s \bar{X}_s\big) \otimes \big(a_s X_s\big)\|_{M_{2^k} \otimes M_{2^k}} &\leqslant C \sup_{|z| \leqslant 1} \|\sum_{0 \leqslant s \leqslant k} \bar{a}_s \bar{X}_s z^s\|_{M_{2^k}} \\ &\leqslant C\Big(\sum_{0 \leqslant s \leqslant k} |a_s|^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Учитывая, что любой антилинейный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$ задается некоторой матрицей u по формуле $x \mapsto u\bar{x}$, видим, что величина, стоящая слева, есть

$$\begin{aligned}&\sup\big\{\|\sum_{0\leqslant s\leqslant k}|a_s|^2X_suX_s^*\|_{C_2}:\,u\in M_{2^k},\ \|u\|_{C_2}\leqslant 1\big\}\\ &=\sup\big\{|\mathrm{trace}\sum_{0\leqslant s\leqslant k}|a_s|^2X_suX_s^*v|:\,u,v\in M_{2^k},\ \|u\|_{C_2},\|v\|_{C_2}\leqslant 1\big\}.\end{aligned}$$

Положим $u=v=2^{-k/2}I$, тогда $\mathrm{trace}(X_suX_s^*v)=2^{-k}\mathrm{trace}\ X_sX_s^*=2^{-k-1}\mathrm{trace}(X_sX_s^*+X_s^*X_s)=2^{-1}$, так что, окончательно, получаем

$$\sum_{0\leqslant s\leqslant k}|a_s|^2\leqslant C\Big(\sum_{0\leqslant s\leqslant k}|a_s|^2\Big)^{1/2},$$

откуда $\sum_s|a_s|^2<\infty$. •

Литература

1. A. B. Aleksandrov, V. V. Peller, *Hankel operators and similarity to a contraction.* — Intern. Math. Research Notices, No. 9 (1996), 263–275.
2. J. F. Carlson, D. N. Clark, C. Foias, J. P. Williams, *Projective Hilbert $A(D)$-modules.* — New York J. Math. **1** (1994), 26–38.
3. K. R. Davidson, V. Paulsen, *Polynomially bounded operators.* — J. Reine U. Angew. Math., to appear.
4. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* North. Holland, Amsterdam, 1985.
5. N. Nikol'skii, *Treatise on the shift operator.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.
6. V. V. Peller, *Estimates of functions of power bounded operators on Hilbert space.* — J. Oper. Theory **7** (1982), 341–372.
7. G. Pisier, *Un opérateur polynomialement borné sur un Hilbert qui n'est pas semblable á une contraction.* — C. R. Acad. Sci. Paris **323** (1996), 547–550.
8. G. Pisier, *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction.* — J. Amer. Math. Soc., to appear.
9. G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps.* — Lecture Notes Math. **1618** (1995).

Kislyakov S. V. Operators (not) similar to a contraction: Pisier's counterexample via singular integrals.

The main difference of this exposition of Pisier's counterexample from the original one is that in the proof of the key inequality probabilistic considerations (like Brownian motion) are replaced by some standard facts from the theory of Calderon–Zygmund operators.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 октября 1996 г.