В. В. Капустин

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ФАКТОРИЗАЦИИ

В этой заметке мы даем новое определение характеристической функции Θ сжатия в гильбертовом пространстве. Θ рассматривается как функция, значения которой – операторы, действующие в том же самом пространстве, снабженном весами. Мы устанавливаем некоторые формулы, связывающие наше определение с классическим определением и определением, используемым в "бескоординатном" варианте теории функциональной модели. Используя наше новое определение, мы даем новую интерпретацию факторизации характеристической функции, соответствующей инвариантному подпространству.

Характеристические функции сжатий

1. Начнем с классического определения характеристической функции сжатия. Пусть T – сжатие в гильбертовом пространстве H. Предположим, что T – вполне неунитарно, т.е. не существует ненулевого подпространства, приводящего T, на котором T действует как унитарный оператор. Определим $D = (I - T^*T)^{1/2}$, $D_* = (I - TT^*)^{1/2}$, $\mathcal{D} = \operatorname{clos\,range} D$, $\mathcal{D}_* = \operatorname{clos\,range} D_*$. *Характеристическая функция* θ – это функция, значения которой – операторы из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}_*$,

$$\theta(\lambda)d = \left(-T + \lambda D_*(I - \lambda T^*)^{-1} D\right) d, \quad d \in D. \tag{1}$$

В [1] собрана основная информация о характеристических функциях. Хорошо известно, что функция θ – сжимающая, т.е. $\|\theta(\lambda)\| \leqslant 1$ для всех λ, $|\lambda| < 1$. Мы пишем $\theta \in H^\infty(\mathcal{D} \to \mathcal{D}_*)$.

Если Ω – аналитическая операторнозначная функция, то мы говорим, что все функции вида $\tau_* \Omega \tau^*$, где τ, τ_* – унитарные операторы, *совпадают* с Ω. Если $\|\Omega\|_\infty \leqslant 1$, то Ω может быть представлена как $\Omega = \Omega_u \oplus \Omega_p$, где Ω_u – унитарная константа, а Ω_p – *чистая* функция, т.е. $\|\Omega_p(0)e\| < \|e\|$ для всех $e \neq 0$. Все сжимающие

Работа частично поддержана РФФИ, грант 95-01-00482.

операторнозначные функции, чистые части которых совпадают с θ, также будут называться характеристическими функциями T.

2. Пусть $W \geqslant 0$ – неотрицательный оператор в H. Определим новое скалярное произведение в H:

$$< \cdot, \cdot >_W = (W \cdot, \cdot). \tag{2}$$

Через H_W будем обозначать замыкание фактор-пространства $H/\ker W$ относительно нормы, соответствующей скалярному произведению $< \cdot, \cdot >_W$.

Теперь определим функцию Θ, $\Theta(\lambda) : H_{I-T^*T} \to H_{I-TT^*}$;

$$\Theta(\lambda) = (I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T). \tag{3}$$

Лемма 1. *Функция Θ совпадает с характеристической функцией θ сжатия T.*

Доказательство. Введем операторы $\tau : H_{I-T^*T} \to \mathcal{D}$, $\tau h = Dh$, и $\tau_* : H_{I-TT^*} \to \mathcal{D}_*$, $\tau_* h = D_* h$. Очевидно, τ, τ_* – унитарные операторы. Утверждение леммы следует из хорошо известного соотношения $\theta(\lambda)\tau = \tau_*\Theta(\lambda)$, которое легко может быть проверено.

3. По определению, *блуждающее* пространство изометрического оператора есть ортогональное дополнение его образа.

Любое сжатие имеет *изометрическую дилатацию*. Изометрия U_+, действующая в пространстве, содержащем H, есть изометрическая дилатация сжатия T, если ортонональное дополнение G пространства H инвариантно относительно U_+. Блуждающие подпространства операторов U_+ и $U_+|_G$ будут обозначаться соответственно E_* и E.

Нам нужны некоторые формулы, заимствованные из "бескоординатного" варианта теории функциональной модели [2]. Введем изометрические вложения π и π_* пространств векторнозначных функций $H^2(E)$ и $H^2(E_*)$ в $H \oplus G$:

$$\pi \sum_{k \geqslant 0} z^k e_k = \sum_{k \geqslant 0} U_+^k e_k, \qquad e_k \in E,$$

$$\pi_* \sum_{k \geqslant 0} z^k e_{*k} = \sum_{k \geqslant 0} U_+^k e_{*k}, \qquad e_{*k} \in E_*.$$

Тогда $U_+\pi = \pi z$, $U_+\pi_* = \pi_* z$. Для оператора $S = \pi_*^*\pi$ имеем $zS = Sz$. Это означает , что S – оператор умножения на операторнозначную функцию из $H^\infty(E \to E_*)$, которая будет обозначаться той же самой буквой S. Для $|\lambda| < 1$ естественным образом определяются операторы $S(\lambda)$.

Лемма 2. *S – характеристическая функция T.*

Доказательство. Определим изометрические операторы α и α_*: $\alpha : H_{I-T^*T} \to E$, $\alpha h = P_E U_+ h = (U_+ - T)h$; $\alpha_* : H_{I-TT^*} \to E_*$, $\alpha_* h = P_{E_*} h = (I - U_+T^*)h$ (здесь P_E, P_{E_*} обозначают ортогональные проекции на E, E_* соответственно). Имеет место

Сублемма 3. *$S(\lambda)\alpha = \alpha_*\Theta(\lambda)$.*

Другими словами, в сублемме утверждается, что следующая диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} H_{I-T^*T} & \xrightarrow{\alpha} & E \\ {\scriptstyle\Theta(\lambda)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S(\lambda)} \\ H_{I-TT^*} & \xrightarrow{\alpha_*} & E_* \end{array}$$

Доказательство сублеммы 3. Для $h \in H$ имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_*\Theta(\lambda)h - \alpha h = (I - U_+T^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T)h - (U_+ - T)h = \\ (I - U_+T^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T)h - (\lambda - T)h + (\lambda - U_+)h = \\ (\lambda T^* - U_+T^*)(I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T)h + (\lambda - U_+)h = \\ (\lambda - U_+)(I - \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)h = (\lambda - U_+)f, \end{aligned}$$

где $f = (I - \lambda T^*)^{-1}(I - T^*T)h$. Так как $f \in H \oplus G$, получаем $[\pi_*^*(\lambda - U_+)f](\lambda) = [(\lambda - z)(\pi_*^* f)](\lambda) = 0$. Следовательно,

$$\begin{gathered} S(\lambda)\alpha h = [\pi_*^*\alpha h](\lambda) = \\ [\pi_*^*(\alpha h + (\lambda - U_+)f)](\lambda) = [\pi_*^*\alpha_*\Theta(\lambda)h](\lambda) = \alpha_*\Theta(\lambda)h. \end{gathered}$$

Доказательство сублеммы закончено.

Если U_+ – минимальная дилатация, то операторы α и α_* унитарны. Это значит, что функции Θ и S совпадают. Если U_+ – не минимальная дилатация, то, аналогичным образом, чистая часть S совпадает с Θ. Ортогональное дополнение подпространства минимальной изометрической дилатации $H \oplus G$ – инвариантное подпространство оператора U_+. Блуждающее подпространство сужения U_+ на это подпространство содержится в E и E_* и ортогонально образам α и α_*. Следовательно, $S(\lambda)$ действует на этом подпространстве как тождественный оператор. Таким образом, (чистая часть) S – характеристическая функция T, и лемма доказана.

Инвариантные подпространства

1. Теперь предположим, что H_1 – инвариантное подпространство T, и T имеет матрицу $\begin{pmatrix} T_1 & X \\ O & T_2 \end{pmatrix}$ относительно разложения $H = H_1 \oplus H_2$. Следуя [3], мы обозначим блуждающее подпространство сужения U_+ на $H_1 \oplus G$ буквой F; пусь η – изометрическое вложение $H^2(F)$ в $H \oplus G$,

$$\eta \sum_{k \geqslant 0} z^k f_k = \sum_{k \geqslant 0} U_+^k f_k, \quad f_k \in F.$$

Введем функции S_1 и S_2 таким же образом, как мы определили выше функцию S: $S_1 = \eta^* \pi$, $S_2 = \pi_*^* \eta$. Такие же соображения, как мы использовали в предыдущем параграфе, приводят к тому, что S_1 и S_2 – характеристические функции операторов T_1 и T_2 соответственно. В хорошо известной теореме о факторизации характеристической функции (см. напр. [1], §VII.1) утверждается, что $S = S_2 S_1$.

2. Пусть функции Θ_1, Θ_2 имеют для операторов T_1, T_2 такой же смысл, как функция Θ для T. Имеем:

$$\Theta(\lambda) = (I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T) =$$

$$\begin{pmatrix} I - \lambda T_1^* & O \\ -\lambda X^* & I - \lambda T_2^* \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda - T_1 & -X \\ O & \lambda - T_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (I - \lambda T_1^*)^{-1} & O \\ (I - \lambda T_2^*)^{-1} \lambda X^* (I - \lambda T_1^*)^{-1} & (I - \lambda T_2^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - T_1 & -X \\ O & \lambda - T_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Theta_1(\lambda) & -(I-\lambda T_1^*)^{-1}X \\ (I-\lambda T_2^*)^{-1}\lambda X^*\Theta_1(\lambda) & \Theta_2(\lambda)-(I-\lambda T_2^*)^{-1}\lambda X^*(I-\lambda T_1^*)^{-1}X \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I & O \\ (I-\lambda T_2^*)^{-1}\lambda X^* & \Theta_2(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1(\lambda) & -(I-\lambda T_1^*)^{-1}X \\ O & I \end{pmatrix} = \widetilde{\Theta}_2(\lambda)\widetilde{\Theta}_1(\lambda). \qquad (4)$$

Цель этого раздела — показать, что в диаграмму Сублеммы 3 может быть вставлена промежуточная компонента. Введем промежуточный вес:

$$W = \begin{pmatrix} I - T_1T_1^* & X \\ X^* & I - T_2^*T_2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

и вложения $\beta : H_W \to F$, $\beta h = P_F(U_+ + I)h$, $h \in H$. Рассмотим следующую диаграмму.

$$\begin{array}{ccc} H_{I-T^*T} & \xrightarrow{\alpha} & E \\ {\scriptstyle \widetilde{\Theta}_1(\lambda)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S_1(\lambda)} \\ H_W & \xrightarrow{\beta} & F \\ {\scriptstyle \widetilde{\Theta}_2(\lambda)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle S_2(\lambda)} \\ H_{I-TT^*} & \xrightarrow{\alpha_*} & E_* \end{array}$$

Теорема 4. (i) *Эта диаграмма коммутативна;*

(ii) *Операторы α, β, α_* – изометрические. Если U_+ – минимальная изометрическая дилатация, то они унитарны; в этом случае факторизации $S = S_2S_1$ и $\Theta = \widetilde{\Theta}_2\widetilde{\Theta}_1$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Предположим, что изометрическая дилатация минимальна (в общем случае пространство изометрической дилатации распадается в прямую сумму пространства минимальной изометрической дилатации и его ортогонального дополнения; на второй компоненте индуцируются единичные операторы как прямые слагаемые в разложениях операторов $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda)$). Операторы α и α_* унитарны; доказательство такое же, как и в Лемме 2.

Теперь представим набросок доказательства того, что диаграмма коммутативна. Основные идеи — те же самые, что и в доказательстве Сублеммы 3. По определению, $\beta = P_F(U_+ + I)h$. Легко показать, что если $h_1 \in H_1$, то $\beta h_1 = (I - U_+ T_1^*)h_1$, и если $h_2 \in H_2$, то $\beta h_2 = (U_+ - T_2)h_2$. Непосредственным вычислением получается, что для $h = h_1 \oplus h_2 \in H = H_1 \oplus H_2$ имеем: $\beta\widetilde{\Theta}_1(\lambda)h = (U_+ - T)h + (\lambda - U_+)f$, где $f = (I - \lambda T_1^*)^{-1}((I - T_1^* T_1)h_1 - T_1^* X h_2) \in H_1$. Следовательно, $S_1(\lambda)\alpha h = [\eta^*(U_+ - T)h](\lambda) = [\eta^*\beta\widetilde{\Theta}_1(\lambda)h](\lambda) = \beta\Theta_1(\lambda)h$. Доказательство соотношения $S_2(\lambda)\beta = \alpha_*\widetilde{\Theta}_2(\lambda)$ может быть получено по аналогичной схеме с использованием соотношения $\alpha_*\widetilde{\Theta}_2(\lambda)h = \beta h + (\lambda - U_+)f$, где $f = (I - \lambda T_2^*)^{-1}(X^* h_1 + (I - T_2^* T_2)h_2) \in H_2$.

Докажем, что β – унитарный оператор. То, что β – изометрия, доказывается непосредственно. Другое доказательство может быть получено рассмотрением унитарной дилатации T. Тогда вопрос сводится к очевидному случаю унитарных операторов. Остается доказать, что β имеет плотный образ. Возьмем вектор $f \in F$, ортогональный образу β. Это значит, что для любого $h = h_1 \oplus h_2 \in H = H_1 \oplus H_2$ мы имеем $((U_+ + I)h, f) = 0$. Так как $(h_2, f) = (U_+ h_1, f) = 0$, это переписывается как $(h_1 + U_+ h_2, f) = 0$. Это значит, что f ортогонален H_1 и $U_+ H_2$, поскольку h_1 и h_2 – произвольные. Так как $f \in H_1 \oplus G$ и f ортогонален H_1, получаем, что $f \in G$. Это может случиться только если $f \in E$. То, что вектор f ортогонален $U_+ H_2$, означает, что f ортогонален $U_+ H$, и следовательно, $U_+^* f$ ортогонален H. Значит $f \in E_*$. Но если дилатация минимальна, то пересечение E и E_* состоит из нулевого вектора, откуда $f = 0$, и тем самым β – унитарный оператор.

Таким образом, доказательство Теоремы 4 закончено.

Замечания. 1. Легко непосредственно проверить, что чистые части $\widetilde{\Theta}_1$ и $\widetilde{\Theta}_2$ совпадают с Θ_1 и Θ_2 соответственно.

2. Аналогичная конструкция может быть построена для сопряженных операторов. Связь с исходной конструкцией становится ясной, если мы рассмотрим унитарную дилатацию U оператора T. Тогда U отображает блуждающее подпространство, возникающее в сопряженном случае, в блуждающее пространство в конструкции, описанной выше.

3. Также, формулы факторизации Θ и аналогичные формулы, построенные для оператора T^*, взаимосвязаны. Кажущаяся

асимметрия в этих формулах исчезает, если мы вспомним, что имеем дело с весовыми пространствами.

Несжимающие операторы

Мы показали, что характеристическая функция Θ, введенная в этой заметке, совпадает с обычной. Таким образом, мы получили новую интерпретацию характеристической функции, которая позволяет написать формулы, связанные с инвариантным подпространством сжатия.

Это определение может быть естественно расширено на несжимающий случай. Приведем здесь основные определения для несжатий. Классическое определение характеристической функции есть следующее обобщение формулы (1). Пусть $D = |I - T^*T|^{1/2}$, $J = \operatorname{sign}(I - T^*T)$, $D_* = |I - TT^*|^{1/2}$, $J_* = \operatorname{sign}(I - TT^*)$, $\mathcal{D} = \operatorname{clos range} D$, $\mathcal{D}_* = \operatorname{clos range} D_*$. Если $1/\bar{\lambda}$ не принадлежит спектру T (в частности, если λ достаточно мало), то $\theta(\lambda)$ – оператор из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}_*$,

$$\theta(\lambda)d = \left(-TJ + \lambda D_*(I - \lambda T^*)^{-1}D\right) d, \quad d \in D.$$

Теперь построим аналог функции Θ. Пространства H_{I-T^*T}, H_{I-TT^*} определяются так же, как выше, но теперь они не гильбертовы, а пространства Крейна (в чем различие между Θ и θ). Именно, если W – самосопряженный оператор (необязательно неотрицательный), то, как в (2), определим новое скалярное произведение $< \cdot, \cdot >_W = (W\cdot, \cdot)$, которое может быть неопределенным (т.е. $< x, x >_W$ может быть отрицательным). Функция Θ определена той же самой формулой (3): $\Theta(\lambda) = (I - \lambda T^*)^{-1}(\lambda - T)$. Функции Θ и θ связаны известным соотношением $D_*\Theta(\lambda) = \theta(\lambda)DJ$.

Промежуточный вес и факторизация $\Theta = \widetilde{\Theta}_2\widetilde{\Theta}_1$, соответствующие инвариантному подпространству, определяются формулами (4), (5). Надеемся, что эта интерпретация теоремы о факторизации характеристической функции поможет понять, что происходит в вырожденных случаях, например, если сужение вполне неунитарного оператора на инвариантное подпространство есть унитарный оператор. Последнее невозможно, если рассматриваемый оператор – сжатие.

Литература

1. Б. С. Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом*

пространстве. Мир, Москва, 1970.

2. N. K. Nikolskiĭ, V. I. Vasyunin, *A unified approach to function models, and the transcription problem*. The Gohberg anniversary collection, vol. 2 (Calgary, 1988). Operator theory: Advances and Applications, vol. 41, Birkhäuser, Basel – Boston, 1989, pp. 405–434.
3. В. И. Васюнин, *Две классические теоремы о модели в бескоординатном изложении*. — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **178** (1989), 5–22.

Kapustin V. V. Characteristic functions and their factorizations.

A new definition of the characteristic function is introduced for contractions on Hilbert spaces. The relationship with the other definitions is established. A factorization formula corresponding to an invariant subspace is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 ноября 1996г.