А. О. Гохман

ИНВАРИАНТЫ КЛАССА C^K КОНЕЧНЫХ ГРУПП КОКСТЕРА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ТЕРМИНАХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статье изучаются функции f класса $C^k(\mathbb{R}^n)$, инвариантные относительно конечных групп W, порожденных отражениями. Всякая функция f представима в виде функции F от базисных W-инвариантных полиномов. При этом наблюдается понижение гладкости F по сравнению с f. Для описания гладкости F в статье предлагаются специальные анизотропные пространства, что в случае классических групп Кокстера позволяет дать более точные оценки падения гладкости, чем это возможно в терминах традиционных классов C^k.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть W – действующая в $\mathbb{R}^n$ конечная группа, порожденная отражениями. Известно, что алгебра W-инвариантных полиномов конечно порождена, причем в качестве базиса можно указать набор полиномов $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))$, где $p_i(x)$ однородны и алгебраически независимы. Числа $k_i = \deg p_i(x)$ обладают рядом замечательных свойств. Во-первых, $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = \operatorname{card} W$. Во-вторых, $k_1 + \ldots + k_n = n + \operatorname{card} R(W)$, где $R(W)$ – множество всех отражений, входящих в группу W. Принято называть $h_W = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} k_i$ числом Кокстера группы W. Пусть $\lambda_\tau(x)$ – соответствующая отражению $\tau \in R(W)$ линейная форма, ядром которой является отражающая гиперплоскость (зеркало) H_τ, тогда якобиан отображения $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, порожденного базисом $p(x)$, равен $J_p(x) = c \prod\limits_{\tau \in R(W)} \lambda_\tau(x)$, где $c = \mathrm{const} \neq 0$.

Всякая группа W может быть представлена в виде прямого произведения неразложимых сомножителей определенного вида. К числу этих сомножителей могут принадлежать группы из серий Кокстера A_ℓ, $B_\ell (= C_\ell)$, D_ℓ, диэдральная группа $\mathfrak{D}_m$, а также исключительные группы E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4 (более подробно см. [1–3]).

Функция $f(x)$ класса $C^k(\mathbb{R}^n)^W$ (т.е. инвариантная относительно группы W) может быть представлена в виде

$$f(x) = F(p(x)), \tag{1.1}$$

где имеет место падение (понижение) гладкости функции $F(p)$ по сравнению с гладкостью функции $f(x)$. Связь гладкости $F(p)$ и $f(x)$ в случае различных групп Кокстера исследовалась в ряде работ. Исторически первая такая задача была решена в 1943 году Х. Уитни [4] при $n=1$ для четной функции $f(x)$: при $p(x)=x^2$ нельзя гарантировать гладкость $F(p)$ выше $C^{[k/2]}(\mathbb{R})$. Явление падения гладкости было исследовано Ж. Барбансоном для $W=S_n$ [5] и в общем случае [6]. Этой же проблеме посвящены работы [7–9]. Во всех указанных источниках гладкость $F(p)$ описывается в терминах классов $C^{[k/\mu]}$, где μ – величина падения гладкости на области или в конкретной точке. Так, если группа W порождена отражениями относительно гиперплоскостей $H_1,\dots,H_m$, а W_i – ими же за исключением отражения относительно H_i, то для функции $F(p)$ в работе [6] гарантируется гладкость $C^{[k/\mu]}(\mathbb{R}^n)$, где $\mu = 1+\operatorname{card} R(W) - \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \operatorname{card} R(W_i)$. Однако, как нам кажется, такие классы не вполне отвечают поставленным требованиям. Дело в том, что величина μ_j потери гладкости производной $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x))$ по сравнению с исходной функций $F(p(x))=f(x)$, вообще говоря, различна при разных j, поэтому понижение гладкости более точно характеризуется не числом $\mu = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mu_j$, а вектором $\overline{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)$. Таким образом, непрерывными будут производные $D^\alpha F(p)$ при $(\overline{\mu},\alpha)\leqslant k$. (Здесь и далее имеется в виду, что $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мульти-индекс, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$, $(\alpha,\beta)=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n$.) В связи с этим введем классы гладкости $C^k_{\overline{\mu}}$, где $\overline{\mu}=(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $k\in\mathbb{N}$. Будем говорить, что функция $F(p)$ принадлежит классу $C^k_{\overline{\mu}}$ в точке или на области, если производные $D^\alpha F(p)$ при $(\overline{\mu},\alpha)\leqslant k$ непрерывны в окрестности точки или на области соответственно. Так, например, класс $C^k_{(1,\dots,1)}$ совпадает с обычным классом C^k. В данной статье μ_j целые, однако в некоторых случаях они могут быть и дробными. Такая ситуация возникает, например, при рассмотрении обратной задачи, когда по гладкости $F(p)$ восстанавливается гладкость $f(x)$ и при некоторых условиях происходит не понижение, а повышение гладкости (для случая $W = S_n$ см. [10]).

Для некоторых групп Кокстера оценки гладкости $F(p)$ в терминах классов $C^k_{\overline{\mu}}$ были получены в работах [11, 12].

В настоящей статье мы попытаемся дать более полную картину, рассмотрев функции, инвариантные относительно групп A_n, B_n, D_n и диэдральной группы $\mathfrak{D}_m$. Что касается исключительных групп, то мы ограничимся замечанием о том, что анизотропность гладкости $F(p)$ для них имеет место, но подробно разбирать этот вопрос не будем. Далее, в терминах классов $C^k_{\overline{\mu}}$ будет рассмотрена теорема деления для случая функций конечной гладкости. В заключение полученные результаты будут рассмотрены в сравнении с теми оценками падения гладкости, которые имелись ранее.

Рассмотрим множество $p(\mathbb{R}^n)$. Его внутренняя часть $\operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n)$ состоит из p-образов точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $J_p(x) \neq 0$. Граница $\partial p(\mathbb{R}^n)$ состоит из p-образов точек x, для которых $J_p(x) = 0$. Другими словами, границу $\partial p(\mathbb{R}^n)$ составляют образы отражающих гиперплоскостей H_τ, $\tau \in R(W)$. Рассмотрим множество $M = \operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n) \cup L$, где $L \subset \partial p(\mathbb{R}^n)$. Будем понимать гладкость на M в смысле работы [7]: будем называть $F(p)$ принадлежащей классу $C^k(M)$, если $F(p)$ принадлежит классу $C^k(\operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n))$ и все производные $D^\alpha F(p)$ при $|\alpha| \leqslant k$ могут быть по непрерывности доопределены на все множество M. Далее, C^k-гладкость функции $F(p)$ в точке $p_0 \in \partial p(\mathbb{R}^n)$ нами понимается в том смысле, что соответствующие производные $D^\alpha F(p)$ существуют и непрерывны на $\Omega(p_0) \cap \operatorname{Int} p(\mathbb{R}^n)$, где $\Omega(p_0)$ – окрестность точки p_0 в $p(\mathbb{R}^n)$, и могут быть по непрерывности доопределены в $\Omega(p_0)$. Заметим, что гладкость в нашем смысле вполне согласуется с обычной гладкостью, т.к. для классических групп Кокстера W функции $F(p)$ могут быть продолжены через границу области $p(\mathbb{R}^n)$ с сохранением класса гладкости [13]. Естественным образом эти определения распространяются и на классы $C^k_{\overline{\mu}}$.

Будем обозначать через $C^{k,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, классы Гельдера.

Пусть $m < n$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, $x = (\widehat{x}, \hat{\hat{x}})$, где $\widehat{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $\hat{\hat{x}} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$. Если в качестве группы W рассматривается симметрическая группа S_n, либо группы Кокстера B_n или D_n, то наряду с представлением (1.1) имеет место представление $f(x) = \widehat{F}(p(\widehat{x}), \hat{\hat{x}})$, где $p(\widehat{x}) = (p_1(\widehat{x}), \dots, p_m(\widehat{x}))$ – базис, отвечающий группе S_m, B_m или D_m соответственно, действующей в $\mathbb{R}^m$. Введем следующее обозначение. Под производной $\frac{\partial f(x)}{\partial p_s(\widehat{x})}$ мы будем понимать производную $\frac{\partial \widehat{F}}{\partial p_s}(p(\widehat{x}),\, \hat{\hat{x}})$, $s = 1, \dots, m$.

Наконец, введем следующие специальные обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначаем через $\varkappa(x)$ максимальное число совпадающих в точке x координат x_i (наибольшую кратность x_i), через $\varkappa_0(x)$ обозначим число координат x_i, равных нулю, а через $\varkappa_1(x)$ – наибольшую кратность $x_i \neq 0$. Например, если $x = (0, 1, 2, 3, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^7$, то $\varkappa(x) = \varkappa_0(x) = 3$, $\varkappa_1(x) = 2$.

2. Случай $W = A_n$

Действие группы A_n совпадает с действием симметрической группы S_{n+1} на гиперплоскости $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому для удобства и без ограничения общности рассмотрим случай $W = S_n$. В этом случае множество $R(S_n)$ состоит из отражений относительно гиперплоскостей $x_i - x_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, а базис $p(x)$ есть набор $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x))$ элементарных симметрических функций.

Случай $W = S_n$ был рассмотрен в работе [5], при этом было установлено, что функции $f(x)$ класса $C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ в соотношении (1.1) соответствует функция $F(\sigma)$ класса $C^{[k/n]}(\mathbb{R}^n)$. Однако, картина падения гладкости может быть описана более детально. Выясняется [7], что в любой точке $\sigma = \sigma(y) \in \sigma(\mathbb{R}^n)$ функция $F(\sigma)$ имеет гладкость $C^{[k/\varkappa(y)]}$, т.е. указанное n-кратное падение гладкости $F(\sigma)$ относительно $f(x)$ может иметь место лишь на одномерном многообразии.

Приведенные нами оценки падения гладкости точны в терминах классов C^k. Более того, в работе [10] было доказано, что если симметрическая функция имеет вид $f(x) = \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)$, то функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C^{kn}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда соответствующая функция $F(\sigma)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}^n)$. То же справедливо и для ростков f и F в нуле. Далее, как следует из [7] и [10] (см. ниже формулу (2.5)), если в точке $y \in \mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ не достигает уровня гладкости $C^{k\varkappa(y)}$, то в точке $\sigma(y)$ соответствующая ей функция $F(\sigma)$, вообще говоря, не имеет гладкости C^k. В дальнейшем этот факт мы будем использовать.

Мы приведем некоторые результаты из работ [7] и [8], на которые в дальнейшем будем опираться. Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, $k \geqslant n$. Будем считать, что $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1(x_i) = x_i$. При $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m}(\sigma(x))\sigma_{m-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

В [7] была введена система функций

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_p(x_1, \dots, x_{p-1}, x_j)}, \quad p \leqslant j. \tag{2.1}$$

При этом $\Phi_r^{(p)}(x) = \Phi_j^{(p)}(\pi_{jr}x)$, где $\pi_{jr} \in S_n$ – транспозиция, меняющая в x местами координаты x_j и x_r, и

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \frac{\Phi_{p-1}^{(p-1)}(x) - \Phi_j^{(p-1)}(x)}{x_j - x_{p-1}} =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}\right)\Phi_{p-1}^{(p-1)}\right]\bigl(\tau(\pi_{j\,p-1}x) + (1-\tau)x\bigr)\,d\tau, \tag{2.2}$$

причем

$$\Phi_j^{(p)}(x) = \sum_{m=p}^{n} \frac{\partial F}{\partial \sigma_m}(\sigma(x))\sigma_{m-p}(x_p, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n),$$
$$j = 1, \dots, n. \tag{2.3}$$

Кроме того, как следует из [7], при $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma(x)) = \sum_{m=j}^{n} (-1)^{m-j} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_m(x_1, \dots, x_m)}\theta_{m-j}(x_m, \dots, x_n), \tag{2.4}$$

где $\theta_s(x) = \sum\limits_{|\alpha|=s} x^\alpha$ – полный симметрический полином степени s (см. [14]). Обозначим $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant \dots \geqslant x_n\}$. Отображение $x(\sigma) : \sigma(\mathbb{R}^n) \to K$, обратное $\sigma(x)$, непрерывно в силу непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов. Другими словами, $x(\sigma)$ является гомеоморфизмом.

Пусть u_0 – окрестность начала координат в $\mathbb{R}^n$, а $U_0 = \operatorname{Int}\sigma(u_0) \cup \{0\}$.

Лемма 2.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{kn-1,1}(u_0)^{S_n}$, $k \in \mathbb{N}$, но не принадлежит классу $C^{kn}(u_0)$. Тогда соответствующая функция $F(\sigma)$ принадлежит классу $C^{kn-1}_{(n-1,\dots,n-1,n)}(U_0)$, хотя, вообще говоря, $F(\sigma) \notin C^k(U_0)$.*

Доказательство. При $k = 1$ из формул (2.2) и (2.4) следует, что даже при разрывной в нуле производной $\frac{\partial F}{\partial \sigma_n}(\sigma(x))$, в силу того, что производная $D^\alpha f(x)$ при $|\alpha| = n-1$ удовлетворяет в нуле условию Липшица, функция $\Phi_n^{(n)}(x) = \frac{\partial F}{\partial \sigma_n}\,(\sigma(x))$ ограничена при $\sigma(x) \in \operatorname{Int}\sigma(u_0)$. В силу (2.4) при $j < n$ производные $\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma)$ непрерывны на U_0.

При $k > 1$ в силу аналогичных рассуждений непрерывными на U_0 будут производные $D^\alpha F(\sigma)$ при $|\alpha| = k$, кроме, возможно, тех, в которых последнее дифференцирование совершается по переменной σ_n. Однако, в силу того, что внутри $\sigma(u_0)$ функция $F(\sigma)$ обладает той же гладкостью, что и $f(x)$ на u_0 (т.к. на соответствущем множестве $J_\sigma(x) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j) \neq 0$), производные $D^\alpha F(\sigma)$ там непрерывны при $|\alpha| = k$, и поэтому порядок дифференцирования не играет роли. Следовательно, на U_0 непрерывными будут производные $D^\alpha F(\sigma)$ при $|\alpha| = k$, $\alpha_n \neq k$. То, что функция $F(\sigma)$, вообще говоря, не принадлежит классу $C^k(U_0)$, следует из [10], о чем шла речь в начале настоящего раздела. Лемма доказана. •

В других точках $\sigma = \sigma(x)$ из областей $\sigma(\mathbb{R}^n)$, в которых $\varkappa(x) = n$, такого эффекта анизотропности гладкости $F(\sigma)$ не наблюдается.

Лемма 2.2. *Пусть в окрестности точки $y = (a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, S_n-инвариантная функция $f(x)$ имеет гладкость C^{n-1}, но не имеет гладкости C^n. Если производная $\frac{\partial F}{\partial \sigma_n}(\sigma)$ разрывна в точке $\sigma(y)$, то разрывными в $\sigma(y)$ будут также и производные $\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma)$, $j < n$.*

Заключение леммы следует непосредственно из формулы (2.4) при $j = n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

Введем следующее обозначение. Пусть $M_m = \{\sigma = \sigma(x) \in \sigma(\mathbb{R}^n) : \varkappa(x) \leqslant m\}$. Легко видеть, что $\operatorname{Int}\sigma(\mathbb{R}^n) = M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = \sigma(\mathbb{R}^n)$ и $\dim(M_{m+1} \setminus M_m) = n - m$. Как уже было упомянуто, если функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, то соответствующая ей в соотношении (1.1) функция $F(\sigma)$ принадлежит классу

$C^{[k/m]}(M_m)$, $m = 1, \dots, n$. Доказательство в [7] опирается на следующее представление, позволяющее в окрестности $y \in \mathbb{R}^n$ свести дифференцирование по переменной σ_j к дифференцированию по симметрическим полиномам от совпадающих в y координат. А именно, при x, близких к y,

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma(x)) = \sum_s \frac{A_s(x)}{B_s(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_{m_s}(x^{(s)})}, \ j = 1, \dots, n, \tag{2.5}$$

где A_s, B_s – полиномы ($B_s(y) \neq 0$), а $x^{(s)}$ при всяком s – группа координат x_i, обладающая тем свойством, что координаты y с теми же номерами совпадают друг с другом. При многократном дифференцировании в силу (2.5) и (2.2) гладкость всякий раз понижается в окрестности y на $\varkappa(y)$ единиц. Для более подробного изучения оператора (2.5) введем следующее обозначение. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$, $r = 0, 1, 2, \dots$; обозначим

$$\Gamma^{(r)}_{I,J}(\varphi(x)) = \sum_{i \in I} x_i^r \prod_{\substack{q \in I \\ q \neq i}} (x_i - x_q)^{-1} \prod_{p \in J} (x_i - x_p)^{-1} \varphi_i(x),$$

где I и J – непересекающиеся подмножества $\{1, 2, \dots, n\}$ мощностей $\operatorname{card} I$ и $\operatorname{card} J$ соответственно.

Обозначим через L_m ту часть границы $\partial\sigma(\mathbb{R}^n)$, для σ-прообразов x точек которой $m = \varkappa_0(x) > \varkappa_1(x)$. Далее, пусть $\Sigma_m = M_{m-1} \cup L_m$, $m = 2, \dots, n$.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{km-1,1}(\mathbb{R}^n)^{S_n}$ при некоторых k, $m \in \mathbb{N}$, $1 < m \leqslant n$, но не принадлежит классу $C^{km}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в соотношении (1.1) функция $F(\sigma)$ принадлежит $C^{km-1}_{(m-1,\dots,m-1,m)}(\Sigma_m)$, хотя, вообще говоря, $F(\sigma) \notin C^k(\Sigma_m)$.*

Доказательство. Дифференцируя (1.1) как сложную функцию и решая полученную систему методом Крамера, несложно видеть, что при $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma(x)) = (-1)^{j+1} \Gamma^{(n-j)}_{\{1,\dots,n\},\varnothing}(\operatorname{grad} f(x)). \tag{2.6}$$

Если в качестве I брать совокупности индексов координат, которые совпадают в некоторой точке $y \in \mathbb{R}^n$, а $J_I = \{1, \dots, n\} \setminus I$, то в окрестности y справедливо представление

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_j}(\sigma(x)) = (-1)^{j+1} \sum_I \Gamma^{(n-j)}_{I,J_I}\ (\mathrm{grad}\ f(x)). \tag{2.7}$$

В [15] было доказано, что при $I = \{1,\dots,m\}$, $I' = \{2,\dots,m\}$, $J = \{m+1,\dots,n\}$, $J'_\ell = \{\ell,\dots,n\}$ имеет место формула

$$\Gamma^{(r)}_{I,J_I}(\varphi) = \frac{x_1^r \Gamma^{(0)}_{I,\varnothing}(\varphi)}{\prod\limits_{p\in J}(x_1 - x_p)} - \sum_{\ell=m+1}^{n} \frac{\Gamma^{(r)}_{I',J'_\ell}(\varphi)}{\prod\limits_{m+1\leqslant s\leqslant \ell}(x_1 - x_s)} +$$

$$+\frac{\sum\limits_{\substack{\alpha+\beta=r-1\\ \alpha,\beta\geqslant 0}} x_1^\alpha\, \Gamma^{(\beta)}_{I',\varnothing}(\varphi)}{\prod\limits_{p\in J}(x_1 - x_p)}. \tag{2.8}$$

Таким образом, формулы (2.7) и (2.8) позволяют получить точную формулу (2.5). При этом из (2.6)–(2.8) видно, что при всяком I дифференцирование по симметрическому полному $\sigma_{\mathrm{card}\, I}$ от координат x_i, $i \in I$, совершается в (2.5) один раз, другие производные берутся по полиномам меньшей степени и меньшего числа координат. Пусть $\widehat{I}$ и $\widehat{x}$ соответствуют нулевым координатам $y \in \sigma^{-1}(\Sigma_m)$, тогда из (2.7) и (2.8) видно, что в формуле (2.5) рациональный множитель при

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_{\mathrm{card}\,\widehat{I}}(\widehat{x})} = (-1)^{1+\mathrm{card}\,\widehat{I}}\Gamma^{(0)}_{\widehat{I},\varnothing}\ (\mathrm{grad}\, f(x))$$

обращается в нуль в точке y кроме того случая, когда $j = n$ в формулах (2.5)–(2.7). Применив далее рассуждения леммы 2.1, мы получим искомый результат. Функция $F(\sigma)$, вообще говоря, не принадлежит классу $C^k(\Sigma_m)$ в силу контрпримера Дж. Болла [10], формул (2.5), (2.8) и того, что в точках Σ_m справедливо неравенство $\varkappa_0(x) > \varkappa_1(x)$. Теорема доказана. $\bullet$

В силу леммы 2.2 вне Σ_m подобное улучшение гладкости не имеет места. Результат также не имеет места при $f(x) \in C^{km-1,\alpha}(\mathbb{R}^n)^{S_n}$, $\alpha < 1$, что видно уже при $n = 2$, так что в этом смысле результат оптимален.

3. Случай $W = D_n$

Группа D_n содержит отражения относительно гиперплоскостей $x_i - x_j = 0$, $x_i + x_j = 0$, $i, j = 1, \dots, n$. Соответствующий группе D_n полиномиальный базис имеет вид $p(x) = (\sigma_1(\xi(x)), \dots, \sigma_{n-1}(\xi(x)), \sigma_n(x))$, где $\xi(x) = (x_1^2, \dots, x_n^2)$. Пусть $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{D_n}$, тогда во всякой точке $p = p(y)$ из множества $p(\mathbb{R}^n)$ функция $F(p)$ имеет гладкость $C^{[k/\mu_{D_n}(p)]}$. В работе [9] была получена формула $\mu_{D_n}(p) = \max(\varkappa(\xi(y)), 2\varkappa_0(y) - 1)$; в настоящей статье мы покажем, что величину $\mu_{D_n}(p)$ можно уменьшить. Для доказательства в [9] была использована лемма, которая может быть получена на базе леммы 7 из работы [6]. Поскольку она будет полезна и в настоящей статье, мы приведем ее формулировку.

Лемма 3.1 (Барбансон [6]). *Пусть $\lambda_j(x)$ – линейные формы, $\lambda_j(y) = 0$, $j = 1, \dots, m$; $E(x) = \prod_{j=1}^{m} \lambda_j(x)$; $\Lambda_i(x)$ – произведение s_i форм из числа $\lambda_j(x)$, $s_i \geqslant s \geqslant 0$, $i = 1, \dots, h$, $\Lambda(x) = (\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_h(x))$; $f_i(x)$ суть C^r-гладкие в окрестности точки y функции и $f(x) = (f_1(x), \dots, f_h(x))$. Если $(f(x), \Lambda(x))$ вблизи y в каждой точке принадлежит идеалу, порожденному функцией $E(x)$ в алгебре непрерывных функций, то функция $\psi(x) = (f(x), \Lambda(x))/E(x)$ в окрестности точки y имеет гладкость C^{r-m+s}.*

Дифференцируя (1.1) как сложную функцию и выражая $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p)$ через $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ методом Крамера, с помощью леммы 3.1 получаем оценки из работы [9]. В настоящей же работе мы установим следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}^n)^{D_n}$, тогда в точке $p = p(y)$ функция $F(p)$ в соотношении (1.1) имеет гладкость $C^{[k/\mu_{D_n}(p)]}$, где $\mu_{D_n}(p) = \max(\varkappa(\xi(y)), 2\varkappa_0(y) - 2)$.*

Доказательство. Имеем при $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n-1} 2x_i p_{k-1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial p_k}(p(x)) + \\ + \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x)). \tag{3.1}$$

Введем два вспомогательных оператора. Пусть при $1 \leqslant i < j \leqslant n$

$$A_{ij}(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)(x_i - x_j)^{-1},$$

$$B_{ij}(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)(x_i + x_j)^{-1}.$$

При $k \geqslant 2$

$$A_{ij}(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)(x_i - x_j)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\pi_{ij}x)}{\partial x_i}\right)(x_i - x_j)^{-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(\tau x + (1-\tau)(\pi_{ij}x))d\tau,$$

$$B_{ij}(f(x)) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right)(x_i + x_j)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\rho_{ij}x)}{\partial x_i}\right)(x_i + x_j)^{-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(\tau x + (1-\tau)(\rho_{ij}x))d\tau,$$

где π_{ij} – отражение относительно гиперплоскости $x_i - x_j = 0$, а ρ_{ij} – отражение относительно гиперплоскости $x_i + x_j = 0$. Для удобства рассмотрим сначала случай $i = 1$, тогда при $j = 2, \dots, n$ в силу (3.1) имеем

$$A_{1j}(f(x)) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \big(p_{k-1}(x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) -$$

$$- x_1 x_j p_{k-2}(x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\big) \frac{\partial F}{\partial p_k}(p(x)) - \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x)), \tag{3.2}$$

$$B_{1j}(f(x))=2\sum_{k=1}^{n-1}\big(p_{k-1}(x_2,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)+$$

$$+x_1x_jp_{k-2}(x_2,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\big)\frac{\partial F}{\partial p_k}(p(x))+\prod_{\substack{k=2\\k\neq j}}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x)). \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть (решая задачу при $n=2$), что

$$\frac{\partial f(x)}{\partial p_1(x_i,x_j)}=\frac{1}{4}(A_{ij}+B_{ij})(f(x)),$$

поэтому при $j=2,\dots,n$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial p_1(x_1,x_j)}=\sum_{k=1}^{n-1}p_{k-1}(x_2,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\frac{\partial F}{\partial p_k}(p(x)). \tag{3.4}$$

Алгебраическая структура системы (3.4) аналогична структуре системы (2.3), единственным отличием является замена $\sigma(x)$ на $\sigma(\xi(x))$. В силу этого, используя (2.6), получаем при $j<n$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x))=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}x_k^{2(n-1-j)}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\substack{2\leqslant p<q\leqslant n\\p,q\neq k}}(x_p^2-x_q^2)\frac{\partial f(x)}{\partial p_1(x_1,x_k)}\Big/\prod_{2\leqslant p<q\leqslant n}(x_p^2-x_q^2)=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}x_k^{2(n-1-j)}\prod_{\substack{2\leqslant p<q\leqslant n\\p,q\neq k}}(x_p^2-x_q^2)\left(\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)(x_1-x_k)^{-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)(x_1+x_k)^{-1}\right)\Big/\prod_{2\leqslant p<q\leqslant n}(x_p^2-x_q^2)=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{j+k}x_k^{2(n-1-j)}\prod_{\substack{2\leqslant p<q\leqslant n\\p,q\neq k}}(x_p^2-x_q^2)\prod_{\substack{m=2\\m\neq k}}^{n}(x_1^2-x_m^2)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)(x_1+x_k)+\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot(x_1 - x_k)\Big) \Big/ \prod_{1\leqslant p<q\leqslant n} (x_p^2 - x_q^2). \tag{3.5}$$

Знаменатель последнего выражения D_n-антиинвариантен, следовательно таким же будет и числитель, который принадлежит идеалу, порожденному якобианом $J_p(x) = \prod\limits_{1\leqslant p<q\leqslant n} (x_p^2 - x_q^2)$. В силу леммы 3.1 при $j < n$ производная $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x))$ имеет гладкость $C^{k-\max(\varkappa(\xi(y)),2\varkappa_0(y)-2)}$ в окрестности точки y такой, что y_1 входит в число координат, на которых достигается $\max(\varkappa(\xi(y)),$ $2\varkappa_0(y)-2)$. Учитывая, что очередность координат в выкладках (3.2)–(3.4) может быть произвольно изменена, формулу, аналогичную (3.5), можно вывести для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, установлено, что при дифференцировании по σ_j, $j < n$, гладкость понижается в $\mu_{D_n}(p(y))$ раз в любой точке $p(y)$.

Рассмотрим теперь производную $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p)$. Обратимся к системе (3.2). Так как группа S_n есть подгруппа D_n, применим к (3.2) подход, основанный на формуле (2.2), т.е. рассмотрим полученную из (3.2) систему из $n-2$ уравнений, в левой части которых стоят выражения

$$(A_{12} - A_{1j})(f(x))(x_j - x_2)^{-1} = -\Phi_j^{(2)}(x),\ j = 3, \dots, n;$$

на следующем шаге в соответствии с (2.2) понизим размерность системы еще на единицу и т.д. Из формулы (2.1) следует, что $\Phi_n^{(n)}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_n(x)}$, где последнее понимается в смысле дифференцирования $f(x)$ по $\sigma(x)$ – базису, соответствующему $W = S_n$. Поэтому, на последнем шаге получаем

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x)) = \sum_{m=[(n+1)/2]}^{n-1} P_m(x) \frac{\partial F}{\partial p_m}(p(x)) + P_n(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \sigma_n(x)},$$

где $P_m(x)$, $m = 1, \dots, n$ – полиномы и, следовательно, падение гладкости при дифференцировании F по p_n не больше, чем по остальным базисным полиномам. Теорема доказана. $\bullet$

Анизотропность гладкости функции $F(p)$ наблюдается и в случае группы $W = D_n$ при $n \geqslant 3$. (При $n = 2$ легко видеть, что функции $\frac{\partial F}{\partial p_1}(p(x))$ и $\frac{\partial F}{\partial p_2}(p(x))$ обладают одинаковой гладкостью.) Предварительно сделаем следующее замечание. В доказательстве приведенной ниже теоремы 3.2 используются функции

$\Gamma^{(r)}_{I,J}(\varphi)$. Они были введены в разделе 2, причем I, J определялись как непересекающиеся подмножества $\{1,2,\dots,n\}$. В теореме 3.2 вместо $\{1,2,\dots,n\}$ будет фигурировать множество $\{2,3\dots,n\}$, а в формуле (7.4) – множество $\{0,1,\dots,n\}$.

Определим множество

$$\Omega_m=\big\{p=p(x)\in p(\mathbb{R}^n):m=\varkappa_0(x)>\varkappa_1(\xi(x))\big\}\cup\operatorname{Int}p(\mathbb{R}^n),\ m=2,\dots,n.$$

Теорема 3.2. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу Гельдера $C^{2km-2k-1,1}(\mathbb{R}^n)^{D_n}$ при некоторых k, $m\in\mathbb{N}$, $1<m\leqslant n$, $n\geqslant 3$, но не принадлежит классу $C^{2km-2k}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в соотношении* (1.1) *функция $F(p)$ принадлежит классу $C^{2km-2k-1}_{(2m-4,\dots,2m-4,2m-2,2m-2)}(\Omega_m)$, хотя, вообще говоря, $F(p)\notin C^k(\Omega_m)$.*

Доказательство. Воспользуемся аналогией между системой (2.3) при $W=S_n$ и системой (3.4) при $W=D_n$. Положим в (3.5) $\varphi_k(x)=\partial f(x)/\partial p_1(x_1,x_k)$, $k=2,\dots,n$, $\varphi(x)=(\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x))$, тогда (3.5) превращается в рациональную функцию от $\varphi(x)$ и $\xi(x)=(x_1^2,\dots,x_n^2)$. Отсюда следует, что производная $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p)$, будучи алгебраически выраженной в переменной ξ, имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial p_j}=(-1)^{j+1}\Gamma^{(n-1-j)}_{\{2,\dots,n\},\varnothing}(\varphi),\quad j<n.$$

Поэтому, в силу (2.7) и (2.8), в окрестности точки $y\in p^{-1}(\Omega_m)$ производная $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x))$, $j<n$, может быть выражена через производные $f(x)$ по полиномам p от координат, совпадающих по модулю в точке y. Пусть $\widehat{x}$ – группа координат, равных нулю в y, их индексы образуют множество $\widehat{I}$. Так как все рассуждения теоремы 2.1 остаются в силе, в указанном представлении $\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x))$ через производные по полиномам меньшей размерности (аналогичном формуле (2.3)), производная по полиному старшей степени $\partial f(x)/\partial p_{\operatorname{card}\widehat{I}-1}(\widehat{x})$ берется один раз. При этом рациональный множитель при ней обращается в нуль в точке y за исключением случая $j=n-1$. Учитывая представление (3.5), получаем, что на множестве Ω_m дифференцирование по полиномам p_j, $j<n-1$, приводит к падению исходной гладкости на $2m-4$ единицы, а дифференцирование по p_{n-1} – на $2m-2$ единицы. Что касается производной $\frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x))$, то оценка ее гладкости следует из теоремы 3.1. Доказательство того, что, вообще говоря, $F(p)\notin C^k(\Omega_m)$,

проводится по аналогии с теоремой 2.1 с учетом результатов [10]. Теорема доказана. $\bullet$

4. Случай $W = B_n$

Группа $W = B_n$ включает в себя отражения относительно гиперплоскостей $x_i - x_j = 0$, $x_i + x_j = 0$, $x_i = 0$, $i, j = 1, \dots, n$. В случае $W = B_n$ базис $p(x) = \sigma(\xi(x))$ и, дифференцируя (1.1) и решая методом Крамера полученную систему, получаем при $j < n$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j}(p(x)) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} x_i^{2n-2j-1}\cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{p<q\\ p,q\neq i}} (x_p^2 - x_q^2)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}/2\prod_{p<q}(x_p^2 - x_q^2), \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}(p(x)) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j\cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{p<q\\ p,q\neq i}} (x_p^2 - x_q^2)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}/2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{p<q}(x_p^2 - x_q^2). \tag{4.2}$$

Из формул (4.1), (4.2) и леммы 3.1 следует (см. [11]), что если $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{B_n}$, то в точке $p = p(y)$ функция $F(p)$ имеет гладкость $C^k_{\overline{\mu}(p)}$, где

$$\overline{\mu}(p) = \big(\lambda(p), \dots, \lambda(p), \mu_{B_n}(p)\big),$$

$$\lambda(p) = \max\big(\varkappa(\xi(y)), 2\varkappa_0(y) - 1\big),$$

$$\mu_{B_n}(p) = \max\big(\varkappa(\xi(y)), 2\varkappa_0(y)\big).$$

Оценка $\mu_{B_n}(p)$, характеризующая падение гладкости в точке p в терминах C^k, точна в каждой точке $p \in p(\mathbb{R}^n)$, в чем можно убедиться с помощью результатов [7, 10]. Однако, величина $\lambda(p)$ может быть уменьшена.

Введем следующие множества:

$$\Upsilon_m = \{p = p(x) \in p(\mathbb{R}^n) : \max(\varkappa(\xi(x)), 2\varkappa_0(x)) \leqslant m\},$$

$$m = 1, 2, \dots, n,\, 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2,\, 2\left[\frac{n}{2}\right] + 4, \dots, 2n,$$

$$\Upsilon_m^{(1)} = \{p = p(x) : \varkappa(\xi(x)) + 1 = 2\varkappa_0(x) = m\} \cup \Upsilon_{m-1},\ m = 2, 4, \dots, 2n,$$

$$\Upsilon_m^{(2)} = \{p = p(x) : \varkappa(\xi(x)) + 1 < 2\varkappa_0(x) = m\} \cup \Upsilon_{m-2},\ m = 2, 4, \dots, 2n.$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(x)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}^n)^{B_n}$, тогда в соотношении (1.1) функция $F(p)$ в точке $p = p(y)$ имеет гладкость $C^k_{\overline{\mu}(p)}$, где $\overline{\mu}(p) = (\nu(p), \dots, \nu(p), \mu_{B_n}(p))$, причем*

$$\nu(p) = \max(\varkappa(\xi(y)),\, 2\varkappa_0(y) - 2),$$

$$\mu_{B_n}(p) = \max(\varkappa(\xi(y)),\, 2\varkappa_0(y)).$$

Другими словами

$$F(p) \in C^{[k/m]}(\Upsilon_m),\ m = 1, 2, 3, \dots, n,\, 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2,\, 2\left[\frac{n}{2}\right] + 4, \dots, 2n,$$

$$F(p) \in C^k_{(m-1,\dots,m-1,m)}(\Upsilon_m^{(1)}),\ m = 2, 4, \dots, 2n,$$

$$F(p) \in C^k_{(m-2,\dots,m-2,m)}(\Upsilon_m^{(2)}),\ m = 2, 4, \dots, 2n.$$

Доказательство. Группа $W = B_n$ содержит в себе группу $W = D_n$ в качестве подгруппы, поэтому $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)^{D_n}$ и $f(x) = F(p(x)) = G(q(x))$, где $q(x)$ – базис, соответствующий $W = D_n$. Понятно, что $p_i(x) = q_i(x)$ при $i = 1, \dots, n-1$ и $p_n(x) = q_n^2(x)$, т.е.

$$G(q(x)) = G(q_1(x), \dots, q_n(x)) =$$

$$= F(q_1(x), \dots, q_{n-1}(x), q_n^2(x)) = F(p(x)).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial q_i}(q(x)) = \frac{\partial F}{\partial p_i}(p(x)),\ i = 1, \dots, n-1,$$

поэтому, в силу теоремы 3.1

$$\overline{\mu}(p) = (\mu_{D_n}(p), \dots, \mu_{D_n}(p),\ \mu_{B_n}(p)) = (\nu(p), \dots, \nu(p),\ \mu_{B_n}(p)).$$

Теорема доказана. •

5. Случай $W = \mathfrak{D}_m$

Пусть W есть диэдральная группа $\mathfrak{D}_m$, порожденная в $\mathbb{R}^2$ двумя отражениями и содержащая $2m$ элементов. Например, группа $\mathfrak{D}_3$ изоморфна симметрической группе S_3, а группа $\mathfrak{D}_6$ изоморфна группе G_2. Базис в случае $W = \mathfrak{D}_m$ состоит из полиномов

$$p_1(x) = x_1^2 + x_2^2,\ \ p_2(x) = (x_1 + ix_2)^m + (x_1 - ix_2)^m,$$

при этом якобиан отображения $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ равен [1]

$$J_p(x_1, x_2) = 2mi\big((x_1 + ix_2)^m - (x_1 - ix_2)^m\big) =$$

$$= 2mi \prod_{k=1}^{m} \Big((x_1 + ix_2) - e^{\frac{2\pi k i}{m}}(x_1 - ix_2)\Big). \tag{5.1}$$

Если $m \geqslant 3$, то и в случае $W = \mathfrak{D}_m$ имеет место анизотропность гладкости функции $F(p)$.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{D}_m$-инвариантная на $\mathbb{R}^2$ функция $f(x)$ имеет в окрестности начала координат гладкость C^k, тогда соответствующая ей в соотношении (1.1) функция $F(p)$ в начале координат имеет гладкость $C^k_{(2,m)}$.*

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1} = m\big((x_1 + ix_2)^{m-1} + (x_1 - ix_2)^{m-1}\big) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial J_p(x)}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x_2} = mi\big((x_1 + ix_2)^{m-1} - (x_1 - ix_2)^{m-1}\big) = \frac{1}{2m}\frac{\partial J_p(x)}{\partial x_1},$$

откуда, дифференцируя (1.1) и решая полученную систему методом Крамера, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}(p(x)) = \frac{1}{J_p(x)} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2mJ_p(x)} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & -\frac{\partial J_p(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial J_p(x)}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

В силу формулы (5.1) имеем

$$J_p(x_1, x_2) = -m2^{m+1} \prod_{k=1}^{m} \Big(x_1 \sin\frac{\pi k}{m} - x_2 \cos\frac{\pi k}{m}\Big),$$

поскольку

$$\big((x_1+ix_2)-e^{\alpha i}(x_1-ix_2)\big)\big((x_1+ix_2)-e^{(2\pi-\alpha)i}(x_1-ix_2)\big)=$$
$$=2x_1^2-2x_2^2-2(x_1^2+x_2^2)\cos\alpha=2x_1^2(1-\cos\alpha)-2x_2^2(1+\cos\alpha)=$$
$$=4x_1^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-4x_2^2\cos\frac{\alpha}{2}=4\bigg(x_1\sin\frac{\alpha}{2}-x_2\cos\frac{\alpha}{2}\bigg)\cdot$$
$$\cdot\bigg(x_1\sin\left(\frac{2\pi-\alpha}{2}\right)-x_2\cos\left(\frac{2\pi-\alpha}{2}\right)\bigg).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial J_p(x)}{\partial x_1}=-m2^{m+1}\sum_{s=1}^{m}\sin\frac{\pi s}{m}\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{m}\left(x_1\sin\frac{\pi k}{m}-x_2\cos\frac{\pi k}{m}\right)$$

$$\frac{\partial J_p(x)}{\partial x_2}=m2^{m+1}\sum_{s=1}^{m}\cos\frac{\pi s}{m}\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{m}\left(x_1\sin\frac{\pi k}{m}-x_2\cos\frac{\pi k}{m}\right).$$

В силу представления (5.2) и леммы 3.1 получаем, что производная $\frac{\partial F}{\partial p_1}(p(x))$ в окрестности начала координат принадлежит классу C^{k-2}. Далее, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial p_2}(p(x))=\frac{1}{J_p(x)}\det\begin{pmatrix}2x_1 & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\\ 2x_2 & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{2}{J_p(x)}\left(x_1\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)=$$
$$=\frac{2}{J_p(x)}\left(\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}{\sin\frac{\pi}{m}}\left(x_1\sin\frac{\pi}{m}-x_2\cos\frac{\pi}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{m}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)x_2\right).$$

Отсюда в силу леммы 3.1 следует, что в окрестности начала координат производная $\frac{\partial F}{\partial p_2}(p(x))$ имеет гладкость C^{k-m}. Следовательно, поскольку области $p(\mathbb{R}^2)$ и, например, $\{x : 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\}$ связаны гомеоморфизмом, осуществляемым отображением p [6], падение гладкости в нуле функции $F(p)$ относительно $f(x)$ описывается вектором $\overline{\mu}_{\mathfrak{D}_m}(0,0)=(2,m)$. Теорема доказана. $\bullet$

6. Некоторые примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие процесс падения гладкости в случае рассмотренных нами групп Коксгера W.

Случай $W = S_n$. Рассмотрим при $n = 2$ функцию

$$f_S(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Эта функция принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}^2)^{S_2}$, но не принадлежит $C^2(\mathbb{R}^2)$. Соответствующая ей функция

$$F_S(p) = (p_1^2 - 2p_2)^{\frac{2}{3}}$$

непрерывна на $\mathbb{R}^2$, но не имеет гладкости C^1, т.к. производная $\frac{\partial F_S}{\partial p_2}$ разрывна в нуле. Однако $\frac{\partial F}{\partial p_1}$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$, т.е. $F_S \in C^1_{(1,2)}(\mathbb{R}^2)$. Мы привели простой пример, в котором нет необходимости накладывать условия Липшица на производные $f_S(x)$. Однако в общем случае это неизбежно. В самом деле

$$\frac{\partial F_S}{\partial p_1}(p(x)) = \frac{\partial f_S(x)}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial F_S}{\partial p_2}(p(x)) =$$

$$= \frac{\partial f_S(x)}{\partial x_1} - x_2 \left(\frac{\partial f_S(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_S(x)}{\partial x_2} \right) (x_2 - x_1)^{-1} =$$

$$= \frac{\partial f_S(x)}{\partial x_1} - x_2 \left(\left(\frac{\partial f_S(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_S(x_1, x_1)}{\partial x_1} \right) (x_2 - x_1)^{-1} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial f_S(x_2, x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_S(x_1, x_1)}{\partial x_1} \right) (x_2 - x_1)^{-1} \right).$$

Можно построить функцию $f_S(x)$, у которой частные производные $\frac{\partial^2 f_S(x)}{\partial x_1^2}$ или $\frac{\partial^2 f_S(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$ терпят вдоль $x_1 = x_2$ такие разрывы второго рода, что $\frac{\partial F_S(x)}{\partial p_1}$ будет в нуле разрывна, так же как и $\frac{\partial F_S(x)}{\partial p_2}$. Однако, мы не будем отягощать работу громоздким примером. Это же замечание относится и к случаю $W = D_n$.

Дальнейшие примеры будут построены на основе функции Юдовича (см. [6, 16]). Пусть ω_0 есть открытый шар радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в начале координат.

Случай $W = B_n$. Рассмотрим при $n = 2$ функцию

$$f_B(x) = \begin{cases} x_1^4 x_2^4 (-\ln(x_1^2 + x_2^2))^{\frac{1}{2}}, & x \in \omega_0, \quad x \neq (0,0), \\ 0, & x = (0,0). \end{cases}$$

Функция $f_B(x)$ B_2-инвариантна и в окрестности нуля принадлежит классу C^7, но не принадлежит классу C^8. Соответствующая функция

$$F_B(p) = \begin{cases} p_2^2(-\ln p_1)^{\frac{1}{2}}, & p \in p(\omega_0), \quad p \neq (0,0), \\ 0, & p = (0,0) \end{cases}$$

в начале координат принадлежит классу C^1, но не классу C^2, однако ее производные $D^{(1,1)}F_B(p)$ и $D^{(3,0)}F_B(p)$ непрерывны вблизи нуля в $p(\mathbb{R}^2)$, что и соответствует оценкам $\mu_{B_2}(0,0) = 4$, $\overline{\mu}_{B_2}(0,0) = (2,4)$, т.е. $F_B(p)$ вблизи нуля принадлежит классу $C^7_{(2,4)}$.

Случай $W = D_n$. Рассмотрим при $n = 3$ D_3-инвариантную функцию

$$f_D(x) = \begin{cases} x_1^3x_2^3x_3^3\big(-\ln(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)\big)^{\frac{1}{2}}, & x \in \omega_0, \ x \neq (0,0,0), \\ 0, & x = (0,0,0). \end{cases}$$

Эта функция в окрестности начала координат имеет гладкость C^8, но не принадлежит классу C^9. Соответствующая ей функция

$$F_D(p) = \begin{cases} p_3^3(-\ln p_2)^{\frac{1}{2}}, & p \in p(\omega_0), \quad p \neq (0,0,0), \\ 0, & p = (0,0,0) \end{cases}$$

принадлежит в окрестности нуля в $p(\mathbb{R}^3)$ классу C^2, но не C^3, что и отвечает значениям $\mu_{D_3}(0,0,0) = 4$, $\overline{\mu}_{D_3}(0,0,0) = (2,4,3)$ и иллюстрирует теоремы 3.1 и 3.2. (Фактически в нуле $F_D(p)$ имеет гладкость $C^8_{(0,4,3)}$.)

Обратимся к случаю $W = \mathcal{D}_m$. Рассмотрим функцию

$$f_{\mathcal{D}}(x) = \begin{cases} (x_1^3 - 3x_1x_2^2)^2\big(-\ln(x_1^2 + x_2^2)\big)^{\frac{1}{2}}, & x \in \omega_0, \quad x \neq (0,0), \\ 0, & x = (0,0), \end{cases}$$

принадлежащую классу $C^5(\omega_0)^{\mathcal{D}_3}$, но не принадлежащую классу $C^6(\omega_0)$. Соответствующая ей функция

$$F_{\mathcal{D}}(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}p_2^2(-\ln p_1)^{\frac{1}{2}}, & p \in p(\omega_0), \quad p \neq (0,0), \\ 0, & p = (0,0) \end{cases}$$

принадлежит классу C^1, но не классу C^2, вблизи нуля на $p(\mathbb{R}^2)$, т.к. $D^{(0,2)}F_{\mathcal{D}}(p)$ разрывна в начале координат. Однако, $D^{(1,1)}F_{\mathcal{D}}(p)$ и $D^{(2,0)}F_{\mathcal{D}}(p)$ непрерывны в окрестности нуля в $p(\mathbb{R}^2)$, что и соответствует $\overline{\mu}_{\mathcal{D}_3}(0,0) = (2,3)$. Таким образом, $F_{\mathcal{D}}(p)$ имеет гладкость $C^5_{(2,3)}$ в начале координат.

7. Теорема деления

Развивая знаменитые результаты Б. Мальгранжа и Дж. Мэзера, Г. Лассаль [17, 18] доказал теорему деления для функций конечной гладкости. При этом, также как и в случае теорем о дифференцируемых инвариантах, было обнаружено явление потери гладкости. Приведем формулировку теоремы Лассаля.

Пусть функция $f(t,y)$ принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}\times Y)$, где Y – область из $\mathbb{R}^p$, $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, $P(t,d) = t^n + d_1 t^{n-1} + \ldots + d_n$, тогда имеет место соотношение (тождество деления)

$$f(t,y) = P(t,d)q(t,d,y) + \sum_{i=1}^{n} h_i(d,y)t^{n-i}, \tag{7.1}$$

где

$$q(t,d,y) \in C^{[k/n]-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times Y),$$

$$h_i(d,y) \in C^{[(k+1)/n]-1}(\mathbb{R}^n\times Y), \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом оператор $f \to (q, h_1, \dots, h_n)$ линеен и непрерывен в соответствующей топологии. Следует заметить, что решение задачи деления не единственно, но все $(q, h_1, \dots, h_n)$, найденные по функции f, совпадают при $d \in \sigma(\mathbb{R}^n)$, т.е. когда корни $(\zeta_1(d), \dots, \zeta_n(d)) = \zeta(d)$ полинома $P(t,d)$ вещественны. Вне этого множества решение задачи деления может быть построено с помощью теорем продолжения (как, например, в работе [19]). При $d \in \sigma(\mathbb{R}^n)$ в [20] и [7] были получены более детальные оценки гладкости частного q и коэффициентов остатка $(h_1, \dots, h_n)$ в тождестве деления, а именно, было доказано, что

$$q(t,d,y) \in C^{[k/m]-1}(\mathbb{R}\times M_m\times Y), \quad m = 1, \dots, n, \tag{7.2}$$

$$h_i(d,y) \in C^{[(k+1)/m]-1}(M_m\times Y), \quad i = 1, \dots, n, \tag{7.3}$$

Напомним, что $M_m = \{\sigma = \sigma(x) : \varkappa(x) \leqslant m\}$. Рассмотрим область $\mathbb{R}\times M_n$. Ее внутренняя часть $\mathbb{R}\times M_1$ разбивается на подобласти I_ℓ,

$\ell = 1, \dots, n+1$, гладкими при $d \in M_1 = \operatorname{Int} \sigma(\mathbb{R}^n)$ поверхностями $(\zeta_i(d), d)$, соприкасающимися лишь при $d \in \partial\sigma(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$\overline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) \quad \text{и} \quad \overline{f}(\overline{\zeta}, y) = \big(f(\zeta_0, y), \dots, f(\zeta_n, y)\big),$$

тогда, согласно [8] и формуле (2.6) имеем, считая

$$d(\zeta) = (d_1(\zeta), \dots, d_n(\zeta)) = \big(-\sigma_1(\zeta), \sigma_2(\zeta), \dots, (-1)^n \sigma_n(\zeta)\big),$$

$$q(t, d(\zeta), y) = \Gamma^{(0)}_{(0,1,\dots,n),\varnothing}\big(\overline{f}(\overline{\zeta}, y)\big)\Big|_{\zeta_0 = t} = = (-1)^n \frac{\partial\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \int\limits_0^{\zeta_i} f(\tau, y)\, d\tau\right)}{\partial \sigma_{n+1}(\overline{\zeta})}\Bigg|_{\zeta_0 = t}. \tag{7.4}$$

Из формулы (7.4) и формул (2.1), (2.2) следует, что на множествах $I_\ell \times Y$, $\ell = 1, \dots, n+1$, вектор-функция $(q, h_1, \dots, h_n)$ не теряет ни единицы гладкости по сравнению с f. Далее, из (7.4) следует, что разница в гладкости частного q и коэффициентов полинома-остатка $(h_1, \dots, h_n)$ может иметь место не на всем множестве $\mathbb{R} \times M_m \times Y$, как это следует из формул (7.2) и (7.3), а лишь в тех точках, где параметр t совпадает с одним из корней максимальной кратности полинома P с коэффициентами $d = (d_1, \dots, d_n)$, т.е. с координатой наибольшей кратности вектора $(\zeta_1(d), \dots, \zeta_n(d))$. В остальных точках оценку гладкости частного q можно повысить. Обозначим через Π то подмножество $\mathbb{R} \times M_n$, на котором t совпадает с одной из координат максимальной кратности вектора $(\zeta_1(d), \dots, \zeta_n(d))$. Например, при $n = 2$ множество Π есть кривая $(\tau, -2\tau, \tau^2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Pi_m = (\mathbb{R} \times M_m) \setminus \Pi$, на таких множествах гладкость частного q и гладкость коэффициентов $(h_1, \dots, h_n)$ полинома-остатка совпадает, т.е. $q(t, d, y) \in C^{[(k+1)/m]}(\Pi_m \times Y)$, $m = 1, \dots, n$.

В рассматриваемой задаче падению гладкости сопутствует анизотропность гладкости решения $(q, h_1, \dots, h_n)$, что может быть выражено в терминах классов $C^k_{\overline{\mu}}$.

Теорема 7.1. *Пусть при некотором m, $1 < m \leqslant n$, функция $f(t, y)$ принадлежит классу Гельдера $C^{km+m-1,1}\,(\mathbb{R} \times Y)$, но не принадлежит классу $C^{km+m}\,(\mathbb{R} \times Y)$. Тогда в соотношении деления* (7.1)

$$q(t, d, y) \in C^{km-1}_{(1, m-1, \dots, m-1, m, \underbrace{1, \dots, 1}_{p})}(\mathbb{R} \times M_m \times Y),$$

хотя, вообще говоря, $q(t,d,y)\notin C^k(\mathbb{R}\times M_m\times Y)$.

Если же

$$f(t,y)\in C^{km+m-2,1}(\mathbb{R}\times Y),\quad \text{\textit{но}}\quad f(t,y)\notin C^{km+m-1}(\mathbb{R}\times Y),$$

то

$$h_i(d,y)\in C^{km-1}_{(m-1,\dots,m-1,m,\underbrace{1,\dots,1}_{p})}(M_m\times Y),\ i=1,\dots,n,$$

$$q(t,d,y)\in C^{km-1}_{(m-1,\dots,m-1,m,\underbrace{1,\dots,1}_{p})}(\Pi_m\times Y),$$

хотя, вообще говоря,

$$h_i(d,y)\notin C^k(M_m\times Y),\quad q(t,d,y)\notin C^k(\Pi_m\times Y).$$

Доказательство теоремы следует из формулы (7.4), оценок (7.2), (7.3) и теоремы 2.1.

Представляется весьма вероятным, что в терминах анизотропных классов $C^{k}_{\overline{\mu}}$ можно детально описать понижение гладкости и в случае подготовительной теоремы для функций конечной гладкости [21, 22]. Как теорема деления, так и подготовительная теорема, близко родственны задаче о гладких инвариантах и тесно с нею связаны. Все упомянутые теоремы для разных классов функций находят широкое применение в анализе и теории особенностей.

8. Заключение. Некоторые выводы

Как видно из полученных результатов, в той или иной мере анизотропность гладкости функции $F(p)$ наблюдается в представлении (1.1) для всех классических групп Кокстера W. Обсудим структуру вектора $\overline{\mu}_W(p)=(\mu_W^{(1)}(p),\dots,\mu_W^{(n)}(p))$, характеризующего уровень падения гладкости функции $F(p)$ по сравнению с $f(x)$ в точке p. Максимальная координата $\mu_W(p)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mu_W^{(j)}(p)$ этого вектора описывает уровень падения гладкости в точке p в терминах классов C^k, т.е. при $f(x)\in C^k(\mathbb{R}^n)^W$ гарантируется гладкость $C^{[k/\mu_W(p)]}$ функции $F(p)$ в точке p. Так, если $p=p(y)\in p(\mathbb{R}^n)$, то

$$\mu_{S_n}(p)=\varkappa(y),$$

$$\mu_{B_n}(p)=\max\bigl(\varkappa(\xi(y)),2\varkappa_0(y)\bigr),$$

$$\mu_{D_n}(p) = \max\left(\varkappa(\xi(y)), 2\varkappa_0(y) - 2\right),$$

$$\mu_{\mathcal{D}_m}(p) = \begin{cases} 1 & p \in \operatorname{Int} p(\mathbb{R}^2) \\ 2 & p \in \partial p(\mathbb{R}^2), \quad p \neq (0,0) \\ m & p = (0,0). \end{cases}$$

Во всех рассмотренных случаях $\mu_W(p) = h_{W_y}$, где h_{W_y} – число Кокстера стабилизатора W_y точки y. Соответственно глобальная оценка μ_W падения гладкости в терминах классов C^k определяется как число Кокстера h_W самой группы W. Сравним μ_W с приведенной в начале работы оценкой Барбансона, которую в дальнейшем будем обозначать β_W. Напомним, что

$$\beta_W = 1 + \operatorname{card} R(W) - \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{card} R(W_i),$$

где W_i – подгруппа группы W, порожденная теми же отражениями, что и W, кроме i-го по порядку. (Заметим, что и в формуле Барбансона неявно присутствует число Кокстера h_W, поскольку для серий A_n, B_n, D_n, для $\mathcal{D}_m$ и для неразложимых исключительных групп, перечисленных нами во введении, имеет место соотношение $\operatorname{card} R(W) = \frac{1}{2} n\, h_W$ (см. [1–3]).) Несмотря на универсальность, оценка β_W уже при малых n неточна. Так, при $n = 4$ имеем: $\mu_{S_4} = 4 < \beta_{S_4} = 5$, $\mu_{B_4} = 8 < \beta_{B_4} = 12$, $\mu_{D_4} = 6 < \beta_{D_4} = 10$.

Далее, пусть $(k_1(y), \dots, k_n(y))$ – степени базисных полиномов группы W_y. Во всех случаях, когда нами была зафиксирована анизотропность гладкости функции $F(p)$, вектор $\overline{\mu}_W(p)$ подчинялся соотношениям

$$h_{W_y} \geqslant \mu_W^{(j)}(p(y)) \geqslant k_j(y), \quad j = 1, \dots, n.$$

Величины же $h_{W_y} - \mu_W^{(j)}(p(y))$, $j = 1, \dots, n$, определяющие степень анизотропности в точке $p = p(y)$, зависят от структуры точки $y \in \mathbb{R}^n$.

Автор благодарен С. Г. Крейну и А. Г. Баскакову за полезные обсуждения.

Данная работа частично поддержана грантом РФФИ No. 95–01-00032а.

Литература

1. H. S. M. Coxeter, *The product of the generators of a finite group generated by reflections.* — Duke Math. J. **18** (1951), 765–782.

2. Г. С. М. Кокстер, У. О. Дж. Мозер, *Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп.* Наука, М., 1980.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI.* Мир, М., 1972.
4. H. Whitney, *Differentiable even functions.* — Duke Math. J. **10** (1943), 159–160.
5. G. Barbançon, *Théorème de Newton pour les fonctions de classe C^r.* — Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4-e serie **5** (1972), 435–458.
6. G. Barbançon, *Invariants de classe C^r des groupes finis engendres par des reflexions et théorème de Chevalley en classe C^r.* — Duke Math. J. **53, No. 3** (1986), 563–584.
7. А. О. Гохман, *Гладкие симметрические функции.* — Укр. мат. журн. **41, No. 6** (1989), 743–750.
8. А. О. Гохман, *Представление дифференцируемых симметрических функций в различных базисах.* — ДАН СССР **318, No. 5** (1991), 1049–1052.
9. А. О. Гохман, *О гладких функциях, инвариантных относительно групп, порожденных отражениями.* — Мат. заметки **53, No. 4** (1993), 146–147.
10. J. M. Ball, *Differentiability properties of symmetric and isotropic functions.* — Duke Math. J. **51, No. 3** (1984), 699–728.
11. А. О. Гохман, *О понижении гладкости в теореме о дифференцируемых инвариантах групп Кокстера.* — Функц. анализ и его прил. **28, No. 4** (1994), 82–84.
12. А. О. Гохман, *Представление гладких инвариантов групп Кокстера в терминах анизотропных пространств.* Тезисы конференции “Современные методы нелинейного анализа,” Воронеж, 1995, 28–29.
13. В. И. Арнольд, *Гиперболические полиномы и отображения Вандермонда.* — Функц. анализ и его прил. **20, No. 2** (1986), 52–53.
14. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Мир, М., 1985.
15. А. О. Гохман, *О теореме Ньютона для гладких функций.* Деп. в ВИНИТИ, No. 8102–84, 1984.
16. G. Barbançon, M. Raïs, *Sur le théorème de Hilbert différentiable pour les groupes lineaires finis (d'apres E. Noether).* — Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4-e serie **16** (1983), 355–373.
17. G. Lassalle, *Le théorème de préparation différentiable en classe p.* — Ann. Inst. Fourier, Grenoble **23, No. 2** (1973), 97–108.
18. G. Lassalle, *Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables.* — Topology **12** (1973), 41–62.
19. E. Bierstone, *Differentiable functions.* — Bol. Soc. Brazil. Mat. **11, No. 2** (1980), 139–189.
20. А. О. Гохман, *О теореме деления для дифференцируемых функций.* — Успехи мат. наук **41, No. 2** (1986), 191–192.
21. В. И. Бахтин, *Подготовительная теорема Вейерштрасса–Мальгранжа в конечногладком случае.* — Функц. анализ и его прил. **24, No. 2** (1990), 3–16.
22. V. I. Bakhtin, *Weierstrass preparation theorem for finitely smooth modules.* — Theory Singular and its Appl., Providence, R. I. (1990), 287–294.

Gokhman A. O. Invariants of class C^k of finite Coxeter groups and their representation in terms of anisotropic spaces.

The article is devoted to the study of representation of $C^k(\mathbb{R}^n)$-smooth functions f invariant with respect to finite Coxeter groups W in the form $f = F \circ p$, where p is a base in the algebra of W-invariant polynomials. We examine the drop of smoothness of F as compared with f and conclude that this drop has anisotropic nature and that, more precisely, at each point p_0 it is described by a vector $\overline{\mu}(p_0) \in \mathbb{R}^n$. We examine the cases $W = A_n,\ B_n,\ D_n,\ \mathfrak{D}_m$; in each case the greatest component μ_j of $\overline{\mu}$ is equal to the Coxeter number of the stabilizer W_{y_0} of the point y_0, where $p_0 = p(y_0)$.

Воронежский
государственный университет

Поступило 24 декабря 1996 г.